アメリカン・オプションの最適停止問題

穴太　克則

キーワード：最適停止，自由境界問題，金融工学，数理ファイナンス，オプション

本稿は，富田 享平さんによる 2014 年度芝浦工業大学理工学研究科システム理工学専攻に提出した修士論文をもとに加筆修正したものです．

1. 問題の簡単な説明と得られた結果

例えば，電力会社 A が石油の卸売会社 B と「石油 100 万バレルを時刻 T までに会社 B から K 円で購入する契約」を結んでいたとしましょう．もし石油価格が時刻 T までの間，K 円より下落した市場価格 X_t 円になってしまえば，市場価格で購入できたのに K 円で購入しなければならないという「損」をすることになります．このときに，この契約と別に「T までに石油 100 万バレルを K 円で売却できる権利」をもっていたら損を解消することができます．会社 A は，(a) 石油を市場価格 X_t 円で購入し，権利を行使してこの石油を K 円で売却する．(b) 得られた売却代金 K 円を使って，会社 B から同じ K 円で石油を購入する．結果的に，市場価格 X_t 円のみの支払いとなり「損」が回避されます．

このように一種の保険の役割をもつ商品があります．上で出てきた権利をもつ商品はアメリカン・プット・オプションと呼ばれ，次のように定義されます．「資産価格（株式や石油価格など）がある確率過程 $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ に従って変動するとする．あらかじめ定められた時刻 $T>0$（満期と呼びます）までに，あらかじめ定められた価格 $K>0$（権利行使価格と呼びます）で，原資産を売却できる権利をもつ商品」です．権利ですから権利を行使してもしなくても構いません．

実際にはエネルギー市場などで，満期 T までに，複数回権利行使できる商品が取引されています．このとき，問題は (Q1) 複数回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの合理的価格はいくらか？ (Q2) この複数回権利行使可能なアメリカン・プット・オプションの保有者はいつ権利行使をするのが最適か？になります．このように最適な権利行使のタイミングを決める問題は「最適停止問題」と呼ばれています．アメリカン・プット・オプションは最適停止の理論を応用して解かれます．本稿では (Q2) に焦点を当てます．一度権利行使したら次の権利行使は $\delta>0$ 時間後でなければならないとします．1 回目，2 回目の最適権利行使時刻 τ_1^*，τ_2^* は，それぞれ，

あのう　かつのり
芝浦工業大学 大学院理工学研究科システム理工学専攻
〒 337–8570 埼玉県さいたま市見沼区深作 307
k-ano@shibaura-it.ac.jp

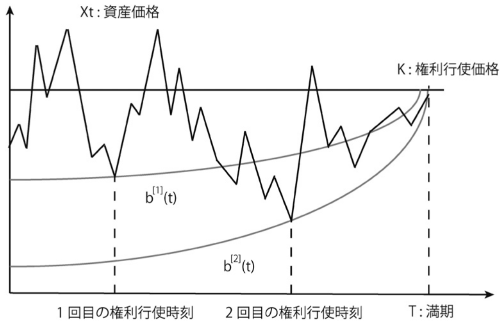

図 1　最適権利行使時刻

$$\tau_1^* = \inf\{t\in[0,T] : X_t \leq b^{[1]}(t)\}, \quad (1)$$
$$\tau_2^* = \inf\{t\in[\tau_1^*+\delta,T] : X_t \leq b^{[2]}(t)\}, \quad (2)$$

で与えられます（図 1 参照）．例えば，τ_1^* は，資産価格が初めて $b^{[1]}(t)$ 以下になった時刻で第 1 回目の権利行使をするのが最適である，を意味します．$b^{[1]}(t), b^{[2]}(t)$ は最適権利行使境界と呼ばれ，t について連続で非減少，$b^{[1]}(t)>b^{[2]}(t)$ であり，$b^{[1]}(T-\delta)=K, b^{[2]}(T)=K$ であることを示すことができます．

1 回だけ権利行使可能な場合は様々に研究されていますが，複数回以上権利行使可能な場合はまだまだ未知のことが広がっています．特に，複数回権利行使問題を自由境界問題と呼ばれる方程式群に定式化し，解いていることが修士論文の成果の一部です．

2. 問題の設定と解き方

資産価格 X_t は幾何ブラウン運動と呼ばれる確率過程に従って変動する，つまり，$X_0=x>0$,

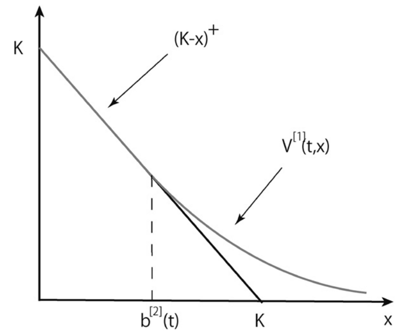

図 2　最適権利行使境界

$$X_t = x \exp\left\{\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} \qquad (3)$$

で記述されるとします．$\sigma > 0, r > 0$ は定数であり，B_t は標準ブラウン運動という確率過程です．$V^{[m]}(t,x)$ を，時刻 t で資産価格 $X_t = x$ であり，残り $m = 1, 2$ 回権利行使可能であるときの，オプション所有者の最大期待利得とします．このとき，

$$\begin{aligned} V^{[1]}(t,x) &= \sup_{0\le\tau_2\le T-t} E_{t,x}[e^{-r\tau_2}(K - X_{\tau_2})^+], \\ V^{[2]}(t,x) &= \sup_{0\le\tau_1\le T-t} E_{t,x}[e^{-r\tau_1}(K - X_{\tau_1})^+ \\ &\quad + e^{-r(\tau_1+\delta)}E_{\tau_1, X_{\tau_1}}[V^{[1]}(\tau_1+\delta, X_{\tau_1+\delta})]], \end{aligned}$$

が成り立ちます．$(K - X_\tau)^+$ は $\max\{K - X_\tau, 0\}$ を表し，$\sup_{0\le\tau\le T}$ は権利行使時刻 τ について最大となる期待値を与える記号です．

まず，τ_2^* の求め方を解説します．時刻 t で資産価格 $X_t = x$ で権利行使すれば $(K - x)^+$ の利得を得ます．よって，$(K - x)^+ \ge V^{[1]}(t,x)$ のときは権利行使をしたほうがよいわけです．もし $V^{[1]}(t,x)$ のグラフが図 2 のようになっていれば，「$b^{[2]}(t)$ が存在し，$x \le b^{[2]}(t)$ ならば権利行使が最適である」こと，つまり τ_2^* が最適であることが示されます．

$V^{[1]}(t,x)$ が図 2 のグラフになっていることを示すには，(a) 各 t に対して，$V^{[1]}(t,x)$ は x について $(0,\infty)$ 上で連続で下に凸で減少し正の値をとる，(b) $\lim_{x\to 0+} V^{[1]}(t,x) = K$, (c) $\lim_{x\to\infty} V^{[1]}(t,x) = 0$, (d) $\frac{\partial}{\partial x}V^{[1]}(t,x) = -1$ on $x = b^{[2]}(t)$, をそれぞれ証明[1]すれば OK です．(a)，(c) は，$V^{[1]}(t,x)$ に (3) 式を代入して解析することによって示されます．(d) は smooth fit と呼ばれ，簡単ではないですが示すことができます（証明抜きで成り立つとしている場合が少なからず見られますが，最適停止問題に出てくる smooth fit 条件は証明しなければなりません）．境界 $b^{[2]}(t)$ は t について連続で増加し，$b^{[2]}(T) = K$ も示すことができます．

次に，最適権利行使境界 $b^{[2]}(t)$ と最大期待利得 $V^{[1]}(t,x)$ の求め方ですが，大まかに言うと連立の方程式・不等式を解きます．解き方の考え方を解説します．

(Step 1) $V^{[1]}(t,x)$ と $b^{[2]}(t)$ を発見するために必要な，$V^{[1]}(t,x)$ と $b^{[2]}(t)$ が満たす方程式・不等式群を求め，それぞれが成立することを証明します．例えば「$x > b^{[2]}(t)$ に対して，$V_t^{[1]}(t,x) + rx\frac{\partial}{\partial x}V^{[1]}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V^{[1]}(t,x) = rV^{[1]}(t,x)$」という偏微分方程式が成立します．また，(d) の smooth fit の性質も加えます．その他に種々の方程式・不等式がありますが，やや数学的になるので省略します（詳しくは [1, 2] を参照してください）．これらの連立の方程式（不等式）群は「自由境界問題」と呼ばれています．

(Step 2) 自由境界問題の解のペア $(b^{[2]}(t), V^{[1]}(t,x))$ が最適停止問題の解になっていることを確認します（Verification 定理と呼びます）．

(Step 3) 自由境界問題を解きます．$V^{[1]}(t,x)$ と $b^{[2]}(t)$ を解析的に解を得ることは困難な場合が少なくなく，数値計算に頼ることが多くなります．

最後に，τ_1^* を求める考え方のみを簡潔に述べます．$\tau_2^*, b^{[2]}(t), V^{[1]}(t,x)$ の性質を使い，$V^{[2]}(t,x)$ の性質を解析します．これから τ_1^* が (1) 式で与えられることを示すことができます．次に $b^{[1]}(t)$ と $V^{[2]}(t,x)$ に対する自由境界問題（FBP(2) とします）を導きます．そして，FBP(1) を用いて，FBP(2) を解きます．

3. 考察

金融派生証券はアメリカン・オプション以外にもたくさんありますが，それらはすべて最適停止問題となります．リアル・オプション等も最適停止問題の枠組みで分析されています．数学的にはやや手強そうに感じるかもしれませんが，たくさんの興味深い最適停止の応用があります．本稿が，研究テーマを探索したり方向性を定めたりなど，未来の研究に少しでも 役立つことになれば幸いです．

参考文献

[1] G. Peskir and A. N. Shiryaev, *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems, Lectures in Mathematics. ETH Zurich*, Birkhauser, 2006.
[2] S. D. Jacka, “Optimal stopping and the American put,” *Mathematical Finance*, **1**, pp. 1–14, 1991.

[1] $\frac{\partial}{\partial x}$ は偏微分の記号で，x 以外の変数は定数と思って，x で微分するということを表します．