

# 一般化 Ho-Lee モデルに基づく ゲーム・スワップションの価格評価について

大西 匡光

キーワード：ゲーム・スワップション，一般化 Ho-Lee モデル，確率ゲーム

本稿は、筆者（大西 匡光）と当時大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程在学中の落合 夏海の指導のもとで、蛸名 安希さん（現在、SMBC 日興証券）が 2015 年度に提出した修士論文をもとに加筆・修正した論文を要約したものです。

## 1. ゲーム・スワップションとは

まず、代表的な金利スワップ（以下、単にスワップと呼ぶ）とは、特定の期間中、2 者間で固定金利と変動金利とを交換する契約のことで、金利に関わる最も基本的なデリバティブの一つです。例えば、カレンダー上で予め定められた 5 年の間、半年ごとに、固定金利と変動金利とを交換する契約などが一例です。変動金利としては、短期金融市場（マネー・マーケット）において、銀行などの金融機関が短期的な資金の運用や調達を行う際に設定される金利などが参照されます。2 者間で合意に至るためには「等価」な交換でないといけません。さまざまな理由から、両者にとってメリットのある契約を設計することができ、銀行などはその仲介をすることで利益を得ることができます（例えば、[1, 2]）。

次に、スワップションとは、スワップの上に書かれたオプションと言えます。つまり、2 当事者のうちの一方、例えば、固定金利支払い側に、(E) 将来のある時点（満期）に（ヨーロッパ型）、（満期）あるいは、(A) その時点までに（アメリカ型）、スワップに入る（開始する）ことのできる権利（オプション）を与える契約のことで、(B) スワップに入る権利を行使できる時点が、満期までの一部の時点のみに制限されている場合、パミュダ型と言われます。いずれの場合にも、権利が与えら

れる側にはその対価となるプレミアム（料金）が求められ、その適正な価格を求める問題が多くの実務家と研究者の間の関心事となってきました。その評価の際には、金利の期間構造の確率的なダイナミクス、つまり、短期金利、中期金利、そして長期金利へと、貸付け借入れの様々な期間の長さに応じて設定される金利の利率が、時間の経過とともにどのようにランダムに変動するのかを記述する確率モデルの構築が重要になります。

さて、本修士論文で提案するゲーム・スワップションは、スワップションのゲーム版とも言えるもので、固定金利支払い側と変動金利支払い側との双方にスワップに入る権利を与えるものです。スワップに入る権利を行使できる時点の集合は 2 者それぞれに規定され、適用される固定金利の利率（行使レート）は、先に権利を行使したほうがいづれかなのかに依存するものとして（同時に行使した場合を含めて）、3 種の行使レートを仮定します。この行使レートの設定によっては、実質的には、一方のみに権利行使を許すことになり、したがって、ゲーム・スワップションは、その特別な場合として、通常のスワップションを含むものとみなすことができます。また、本修士論文では、(S) 権利行使がなされた直後からスワップに入るスポット・スタート型、(F) スワップに入る時点が予めカレンダー上で固定されているフォワード・スタート型、の 2 種それぞれを分析対象とします。

## 2. 一般化 Ho-Lee モデル

本修士論文では、離散時間モデルを扱い、金利の期間構造モデルとしては、一般化 Ho-Lee モデルを採用しています。一般化 Ho-Lee モデルとは、市場の無裁定条件、すなわち「損失を被るリスクを全く負うことなく、正の利潤を生む事象が生起する確率が正となるような機会が無いこと」を保証する、離散時間の金利の期間構造モデルとして有名な Ho-Lee モデル [3] を、Ho-Lee 自身らが最近に一般化した

おおにし まさみつ  
大阪大学 大学院経済学研究科、数理・データ科学教育研究センター [兼任]、データピリティブフロンティア機構 [兼任]  
〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7  
ohnishi@econ.osaka-u.ac.jp

もので、金利の期間構造のより多様な構造と変動を記述できるモデルとして有望視されているものです [4]。そこでは、金利の期間構造が、時刻と金利・債券市場の状態との二つ変数のペアに対応する節点からなる 2 項格子、あるいは再結合 2 項木の上を、時間の経過とともに、隣接する二つの節点のいずれかにランダムに推移していくものと仮定します。

### 3. 確率ゲームとしての定式化

前節のような設定の下、ゲーム・スワップシヨンの契約の、両当事者（固定金利支払い側と変動金利支払い側）にとっての適正な価値の評価は、金利・債券市場の状態が 2 項格子の上をリスク中立確率測度に従いランダムに推移する不確定状況の下で、両当事者をプレイヤーとし、彼らそれぞれに許された権利行使可能時点の中から、締結した契約の価値を最大化するように行使時刻を決定する行使戦略を選択するゲーム、あるいは権利行使を「停止」と読み替えれば、停止時刻（停止するタイミング）を選択する停止ゲームとして定式化できます。さらに、それは、プレイヤーのそれぞれが、権利行使することを許された時刻ごとに、その時刻において権利行使するか否かを（確率的に）選択する（混合戦略）、有限計画期間のゼロ和確率ゲーム（マルコフ・ゲーム）として再定式化でき、両当事者にとっての契約の適正な価値は、この確率ゲームの鞍点均衡（ミニ・マックス均衡）における期待ペイオフによって定義されるゲーム値として特徴づけることができます。

前節で導入した 2 項格子の節点ごとに、そこから始まる部分ゲームの（求めるべき）ゲーム値を対応させる値関数は、最適性方程式（動的計画方程式、Bellman 方程式）と呼ばれる再帰的な関数方程式を満たし、原理的には、スワップシヨンの満期から出発して、時間について後ろ向きに（バックワード・インダクションで）解くことができます。さらに、本修士論文では、行使レートに関する妥当で弱い条件の下で、この確率ゲームには、混合戦略ではなく、純粋戦略からなる均衡があることを証明したうえで、その事実を活用したバックワード・インダクションによる解法を提案しています。

### 4. 数値計算結果

本修士論文では、最後に、スワップに入る時点については、(S) スポット・スタート型、(F) フォワード・スタート型、のそれぞれに対して、そして、権利行使が許された時点については、(A) アメリカ型、(B) パーミュダ型、の両方に対して、数値計算例を与え、確

率ゲームのゲーム値として求められるゲーム・スワップシヨンの適正価値と両当事者の最適行使戦略を求めるための、前節で述べたバックワード・インダクションによる解法が極めて有効に実行できることを確認しています。さらに、実質的には、一方のみに権利行使を許すこととなるように行使レートを設定することで、通常のスワップシヨンの数値計算結果の比較検討も行っています。

### 5. おわりに

通常のスワップでは、契約締結時（事前的）には、変動金利との交換が等価に、したがって契約の価値がゼロとなるように行使レート、すなわち固定金利の利率が設定されます。スワップシヨンでは、一方の当事者にスワップに入るオプション（権利）が与えられるため、その価値は当該当事者にとって正となります。

ゲーム・スワップシヨンの場合にも、通常のスワップと同様、3 種類の行使レートを適切に設定することで、契約締結時（事前的）には契約の価値がゼロとなるようにすることができます。さらに、契約締結後の金利変動の実現後（事後的）にも、両方の当事者は、自身にとっての契約の価値があまり不利にならないよう、スワップに入る権利を行使することができるため、双方にとってのリスクを軽減可能な契約を設計できる優れた特長をもつと言えます。

### 参考文献

- [1] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th edition, Pearson, 2014 [邦訳有り] .
- [2] R. W. Kolb, *Futures, Options, and Swaps*, 4th edition, Wiley-Blackwell, 2003.
- [3] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, “Term structure movements and pricing interest rate contingent claims,” *The Journal of Finance*, **41**, pp. 1011–1029, 1986.
- [4] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, “Generalized Ho–Lee model: A multi-factor state-time dependent implied volatility function approach,” *The Journal of Fixed Income*, **17**(3), pp. 18–37, 2007.
- [5] N. Ochiai and M. Ohnishi, “Pricing of the Bermudan swaption under the generalized Ho–Lee model,” 数理解析研究所講義録, **1802**, pp. 256–262, 2012.
- [6] N. Ochiai and M. Ohnishi “Valuation of game option bonds under the generalized Ho–Lee model: A stochastic game approach,” *Journal of Mathematical Finance*, **5**, pp. 412–422, 2015.
- [7] 蛭名亜希, 落合夏海, 大西匡光, “Valuation of a game swaption under the generalized Ho–Lee model,” 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋期研究発表大会 アブストラクト集, pp. 58–59, 2016.
- [8] 落合夏海, 大西匡光, “一般化 Ho–Lee モデルに基づくゲーム・オプション債の価格評価—確率ゲームによるアプローチ,” オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **60**, pp. 150–157, 2015.