ビットマップ図形の効率的な詰込み

梅谷　俊治

キーワード：図形詰込み，ビットマップ図形，ミンコフスキー差，スキャンライン

本稿は，村上 祥平さんによる 2015 年度大阪大学大学院情報科学研究科に提出した修士論文をもとに加筆修正したものです．

1. ビットマップ図形の詰込み問題

図形の詰込み問題とは，図 1 に示すように，いくつかの図形を互いに重ならないように与えられた容器内に配置する問題で，長方形，円，多角形，直方体など図形や容器の形状によりさまざまなバリエーションをもちます．この問題は，服の型紙の配置，鉄鋼・繊維などの素材の切り分け，機械部品の板取り，車両の荷物積み込み，地図のラベル配置など多くの分野に応用をもつ最適化問題として知られています．

図形の詰込み問題は一見するとジグソーパズルに似ています．しかし，多くの場合では，図形同士がうまくかみ合うことも，図形を隙間なく敷き詰められることもないため，できる限り隙間が小さくなるような図形の配置を求めることは容易ではありません．ここでは，ピクセルと呼ばれる色のついた点の集合で描かれたビットマップ図形を長方形の容器に詰込む問題を効率よく解くアルゴリズムを紹介します．

2. ストリップパッキング問題

入力として，幅 W（固定）と長さ L（可変）の大きさをもつ長方形と n 個のビットマップ図形 $P_1, \ldots, P_n$ が与えられます．このとき，(1) 図形 P_i $(1 \leq i \leq n)$ は長方形内に配置される，(2) 図形対 P_i, P_j $(1 \leq i < j \leq n)$ は互いに重ならない，という二つの条件の下で必要な長方形の長さ L を最小化する図形 P_i $(1 \leq i \leq n)$ の配置を求める問題をストリップパッキング問題と呼びます．ただし，図形の自由な回転や反転は考えないものとします．

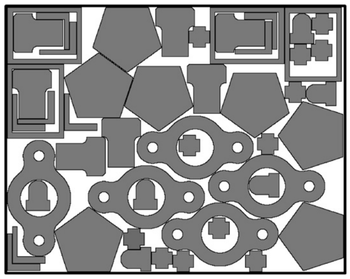

図 1　ビットマップ図形詰込み問題の例

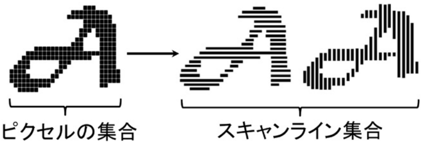

図 2　水平・垂直方向のスキャンラインの集合

ピクセルの集合で表されるビットマップ図形では，ピクセル同士の重なりを確認すれば図形対の重なりを判定できます．しかし，この方法では計算時間が図形の面積に比例するため，高解像なビットマップ図形の重なりを高速に判定できません．そこで，事前にビットマップ図形を走査して短冊状に束ねたスキャンライン図形に変換します．さらに，図形対の重なり判定を効率よく計算するために，水平・垂直方向に走査して 2 種類のスキャンライン図形を作成します（図 2）．

3. 重なり度最小化問題

図形詰込み問題では，あらかじめ与えられた順番に従って一つずつ図形を順番に詰込む方法がよく用いられます．たとえば，左下詰め法では，図形を長方形内の右上隅に配置した後に，配置済みの図形に阻まれて動けなくなるまで左水平方向と下垂直方向の移動を交互に繰返します．さらに，すべての図形を配置した後に，一つの図形を再配置する手続きを繰り返してより充填率の高い配置を探索する局所探索法もよく用いられます．しかし，図形の重なりがない配置だけを探索

うめたに　しゅんじ
大阪大学 大学院情報科学研究科
〒 565–0871 大阪府吹田市山田丘 1–5
umetani@ist.osaka-u.ac.jp

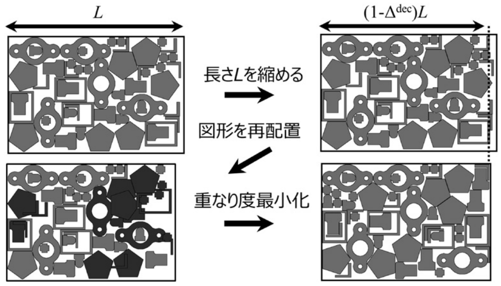

図 3　図形詰込みアルゴリズムの実行例

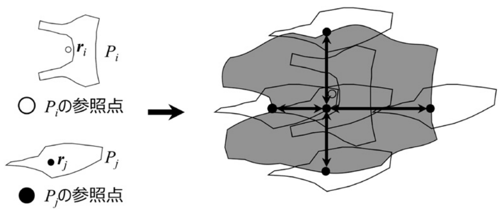

図 4　ミンコフスキー差と重なり度の計算

する方法では，充填率の高い配置になると一つの図形だけを動かして新しい配置を求めることは困難になります．そこで，探索の途中では図形の重なりを許容し，長方形の長さ L を一時的に固定して図形対の重なりの総和を最小化する重なり度最小化問題を考えます．長方形の長さ L を更新しては重なり度最小化問題を解く手続きを繰り返すことでストリップパッキング問題を解きます（図 3）．

図形対 P_i, P_j の重なりを解消するために必要な水平・垂直方向の最小移動距離をそれぞれ f_{ij}^h, f_{ij}^v とします．ここでは，図形 P_i, P_j の重なり度を $f_{ij} = \min\{f_{ij}^h, f_{ij}^v\}$ と定義し，重なり最小化問題ではそれらの総和 $F = \sum_{i,j} f_{ij}$ を最小化する図形の配置を求めます．

4.　ミンコフスキー差と重なり度の計算

図形の詰込み問題を効率よく解くためには，図形対 P_i, P_j が重なりをもつかどうかを高速に判定する必要があります．そこで，多くの図形詰込みアルゴリズムでは，ミンコフスキー差 [1] と呼ばれるデータ構造を事前に作成し，これを用いて図形対の重なりを判定します．図形 P_i, P_j について配置の基準となる参照点 $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j$ を定めます．このとき，P_i と P_j が重なりをもつ参照点の相対位置 $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ の全体を P_j の P_i に対するミンコフスキー差と呼び，$P_i \ominus P_j$ と表します（図 4）．

参照点の相対位置 $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ をミンコフスキー差 $P_i \ominus P_j$ の外部に置けば P_j を P_i と重ならないように配置できます．ミンコフスキー差 $P_i \ominus P_j$ を用いれば図形 P_i, P_j の重なり度 $f_{ij} = \min\{f_{ij}^h, f_{ij}^v\}$ も容易に計算できます．図形 P_i, P_j はスキャンラインの集合で表されるため，ミンコフスキー差 $P_i \ominus P_j$ もスキャンラインの集合で表せます．スキャンラインの集合で表されたミンコフスキー差では，参照点の相対位置 $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ からスキャンラインの端までの最小距離が f_{ij}^h, f_{ij}^v となります（図 5）．

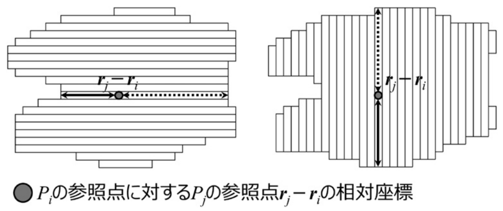

図 5　スキャンラインの集合で表されたミンコフスキー差による f_{ij}^h, f_{ij}^v の計算

表 1　ベンチマーク問題例に対する実験結果

問題例	図形数	BLF [2]	提案手法
Profiles1	32	82.5%	85.2%
Profiles2	50	73.8%	74.2%
Profiles3	46	70.8%	70.8%
Profiles4	54	86.8%	84.1%
Profiles5	50	75.9%	80.0%
Profiles6	69	72.1%	75.6%
Profiles7	9	73.3%	98.8%
Profiles8	18	78.7%	83.8%
Profiles9	57	52.9%	53.8%
Profiles10	91	65.0%	66.3%

5.　結果と考察

円弧や穴を含む図形のベンチマーク問題例に提案する局所探索法を適用して得られた配置の充填率（%）を表 1 に示します．提案手法では，ベクタ図形をビットマップ図形に変換したもの（長方形の幅 W は 2048 ピクセルに設定）を入力データとして与えました．この結果から，提案手法が円弧や穴を含む図形のベンチマーク問題例において高解像なビットマップ図形でも従来手法と同等以上の性能をもつことを確認しました．

参考文献

[1] M. ドバーグほか（浅野哲夫訳），『コンピュータ・ジオメトリ—計算幾何学：アルゴリズムと応用—』，近代科学社，2010.

[2] E. K. Burke, R. S. R. Hellier, G. Kendall and G. Whitwell, “Irregular packing using the line and arc no-fit polygon,” *Operations Research*, **171**, pp. 948–970, 2010.