ドイツ年間ゲーム大賞と最適化

岡本　吉央

キーワード：完全記憶ゲーム，ナッシュ均衡計算，ブラフ，ライアーズ・ダイス，零和ゲーム

本稿は，栢沼 凌汰さんの 2015 年度電気通信大学情報理工学部情報・通信工学科 卒業論文をもとに加筆修正したものである．

1. はじめに

先日，7 月 18 日に，2016 年ドイツ年間ゲーム大賞 (Spiel des Jahres) が発表され，『コードネーム』(Codenames) が受賞した．ドイツ年間ゲーム大賞を受賞したゲーム，または，それにノミネートされたゲームで遊ぶと確かに面白く，ドイツやヨーロッパに根づくゲーム文化を感じることができる．最近では，日本人ゲーム作家菅沼正夫による『街コロ』が 2015 年ドイツ年間ゲーム大賞にノミネートされ，また，カナイセイジの『ラブレター』が毎年ドイツのエッセンで開催されているゲームの祭典 SPIEL（シュピール）で，2014 年にドイツゲーム大賞 (Deutscher Spiele Preis) の第 4 位に輝き，日本発のいわゆる「アナログゲーム」にも注目が集まっている．

ボードゲームやカードゲームを数学的に解析する研究は古くから存在する．本稿が題材とする『ライアーズ・ダイス』(Liar's Dice) は，最適停止問題の研究で有名な Thomas Ferguson[1] [1] も研究をしたゲームである．『ライアーズ・ダイス』をもとにして開発・発売され，1993 年にドイツ年間ゲーム大賞を受賞したのが『ブラフ』(Bluff) である．これはサイコロを使用したゲームであり，サイコロ運のランダム要素とプレイヤー間の駆け引きの絶妙なバランスが楽しめる．ここでは，2 人で遊ぶ『ライアーズ・ダイス』を考察対象とし，さらに使用するサイコロの面の数を 2 以上の任意の整数 N とする．なお，上記栢沼さんの卒業論文では，『ライアーズ・ダイス』よりも複雑な 2 人版『ブラフ』自体も考察対象としているが，その内容は割愛する．

おかもと　よしお
電気通信大学 大学院情報理工学研究科
〒 182–8585 東京都調布市調布ヶ丘 1–5–1
okamotoy@uec.ac.jp

2. 『ライアーズ・ダイス』

文献 [1] に従って，N 面サイコロを用いた『ライアーズ・ダイス』のルールを説明する．これは 2 人で遊ぶゲームであり，それぞれ A と B とする．ゲームは A が先手，B が後手である状態から始まる．まず，A がサイコロを振り，その目を A だけが確認する（つまり，B は出目を見られない）．出目は確率変数であるが，それを $X(1)$ と書くことにする．そして，A はある整数 $y(1)$ を選び，B に「$X(1)$ は $y(1)$ 以上である」と伝える．このとき，この申告は正しくなくてもよい．B が行わなくてはならないのは，A によるこの申告が正しいか見極めることである．正しいと思った場合はパスをする．正しくないと思った場合はブラフと宣言する．ブラフと宣言されたら，A は出目を公開する．そして，A の申告が正しければ，A の勝利，A の申告が誤っていれば，B の勝利となる．

B がパスをした場合は，次に B がサイコロを振る役となる．B はサイコロを振り，その目を B だけが確認する．出目を $X(2)$ とする．そして，B はある整数 $y(2)$ を選び，A に「$X(2)$ は $y(2)$ 以上である」と伝える．このとき，$y(2) > y(1)$ でなくてはならない．この制約が重要であり，B は真実を A に伝えにくくなっている．A はこの申告が正しいと思った場合はパスをし，正しくないと思った場合はブラフと宣言する．ブラフと宣言された場合の処理は前と同じであり，パスを宣言した場合は，またサイコロを振る役を換えて，上の手続きを継続する．i 回目に振られたサイコロの出目が $X(i)$ であり，そのときにプレイヤーが選ぶ整数を $y(i)$ であるとしたとき，$y(1) < y(2) < \cdots < y(i) < \cdots$ という関係が成立しなくてはならないため，ある i に対して $y(i) > N$ となり，$X(i) \leq N$ であるため，「$X(i)$ は $y(i)$ 以上である」という申告は必ず嘘となる．つまり，合理的なプレイヤーが行う『ライアーズ・ダイス』は必ず終了し，勝者が決まる．

[1] 共著者の Chris Ferguson は Thomas Ferguson の息子で，Ph.D. を持つポーカープレイヤー．

3. 最適戦略の導出法

『ライアーズ・ダイス』は自然に展開形ゲームとみなすことができ，勝者が利得 1，敗者が利得 0 を得るとすれば，それは定和ゲームとなり，期待利得が勝率と一致する．計算したい対象は，期待利得を最大にする均衡戦略である．定和ゲームであるため，任意のナッシュ均衡が互いの期待利得を最大にする．以後，それを最適戦略と呼ぶことにする．

Ferguson and Ferguson の研究 [1] は，6 面サイコロを用いた場合，つまり，$N=6$ の場合，プレイヤー A の最大期待利得が 41/60 であることを証明した．これは，A と B の戦略を与え，それらが互いの最適反応戦略であることを示すことで，導出された値である．この研究では，任意の正整数 N に対する最大期待利得を導出し，また，彼らの結果が正しいことを確認する．

着目点は，このゲームが完全記憶ゲームであることである．つまり，プレイヤーが今まで覚えていたことを忘れることはない．完全記憶 2 人零和展開形ゲームのナッシュ均衡は，線形計画法を使うことで（ゲーム木のサイズの）多項式時間で計算できるので [2]，定和ゲームを零和ゲームに変換し，それを用いて線形計画問題として定式化する．

しかし，ゲーム木のサイズ自体も大きいため，このアイディアだけで効率的な計算はできない．そのため，「N 面サイコロを用い，$y(i)$ として M 以上の整数を宣言しなくてはならない」場合の部分ゲームに対する最大期待利得を計算し，そこから動的計画法（つまり，後ろ向き帰納法）により，ゲーム自体の最大期待利得を計算する．つまり，線形計画問題としての定式化の中に部分ゲームに対する最大期待利得が使われる，という形で，線形計画法と動的計画法を入れ子状に組み合わせることで，最適性を失わずに計算の効率化が可能となる．これは「完全記憶展開形ゲームでは行動戦略の中にナッシュ均衡が存在する」という Kuhn の定理（の系）によって正当化される．

4. 最適戦略の計算結果

実際に Gurobi Optimizer ver. 6.0.4 を用いて計算した A の最大期待利得（つまり最適戦略における勝率）を図 1 に示す．$N=6$ のときの値が Ferguson and Ferguson [1] の研究結果と一致することも確認できた（41/60 はおよそ 0.6833）．

$N=2$ のとき，A の勝率は 0.75 であり，これは次のような考察でもわかる．まず，$X(1)=2$ ならば，

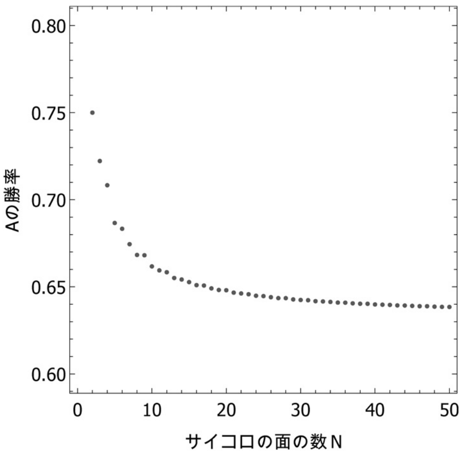

図 1　最適戦略における A の勝率

$y(1)=2$ として，必ず A が勝つ．一方，$X(1)=1$ ならば，$y(1)=1$ とする．このとき，B はパスをして，サイコロを振るが，$X(2)$ が何であれ，$y(2)=2$ としなくてはならないので，$X(2)=1$ ならば，A が勝ち，$X(2)=2$ ならば，B が勝つ．つまり，A が負けるのは，$X(1)=1$ かつ $X(2)=2$ の場合のみであり，それが生起する確率は $1/4=0.25$ なのである．

漸近的な傾向を図 1 から読み取ると，N に関して A の勝率（最大期待利得）は単調減少し[2]，N を大きくしたとき，A の勝率が 0.63 付近のある値に収束していく様子が見られる．実際，$N=200$ の場合，A の勝率はおよそ 0.6337 となった．自然対数の底 e に対して，$1-1/\mathrm{e}$ がおよそ 0.6321 であるので，もしかしたら，A の勝率は $1-1/\mathrm{e}$ に収束するのかもしれない．それを解明することは残された課題である．

得られた最適解を見ることで最適戦略も得られるが，$N=6$ のとき，実際に Ferguson and Ferguson [1] の研究にある戦略と対戦させたところ（つまり，シミュレーションを行ったところ），同程度の勝率が得られた．

参考文献

[1] C. P. Ferguson and T. S. Ferguson, “Models for the Game of Liar’s Dice,” T. E. S. Raghavan, T. S. Ferguson, T. Parthasarathy and O. J. Vrieze (eds.), *Stochastic Games and Related Topics*, Springer, pp. 15–28, 1991.

[2] B. von Stengel, “Computing equilibria for two-person games,” R. J. Aumann and S. Hart (eds.), *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, pp. 1723–1759, 2002.

[2] 図 1 では，$N=8,9$ のときの値が同じに見えるが，実際に減少している．