待ち行列理論を用いた駐車場共同利用の評価

牛垣　龍一，フンドック　トゥアン，三好　直人

キーワード：待ち行列，駐車場の共同利用，準出生死滅過程，定常分布，待たずに駐車できる確率，平均待ち時間

本稿は，牛垣 龍一が東京工業大学理学部情報科学科に提出した 2015 年度学士論文をもとにしています．

1. はじめに

隣接する二つの店がそれぞれ専用の駐車場を持っている状況を考えます．一方の店に車で来た客は，その店の駐車場が埋まっていたら，たとえもう一方の店の駐車場に空きがあったとしても車を駐めることはできません．では，二つの店が駐車場を共同利用したらどうでしょう．こうすると，どちらかの店に車で来た客は，どちらか一方の店の駐車場に空きがあれば，車を駐めることができます．しかし，これによって，どちらか一方の店だけが得をして，もう一方が割を食うのであれば，共同利用をしないほうがよいでしょう．そこで，駐車場を共同利用したほうがよいのか，それともしないほうがよいのか,「待ち行列理論」を用いて考えてみましょう．

2. モデル化と解析

二つの店（店 1, 2）への客の到着はどちらも定常ポアソン過程にしたがうものとし，駐車時間はどちらも独立な指数分布にしたがうものとします．駐車場が埋まっているときに到着した客は駐車できるまで待ち続け，駐車場に空きができれば，先に並んでいる客から順に車を駐めるものとします．以下，記号を次のように定めます．

- λ_1, λ_2：店 1, 2 への客の到着率
- $1/\mu_1, 1/\mu_2$：店 1, 2 の客の平均駐車時間
- c_1, c_2：店 1, 2 の駐車場の収容可能台数
- $\rho_1 := \lambda_1/\mu_1,\ \rho_2 := \lambda_2/\mu_2$

うしがき　りゅういち，みよし　なおと
東京工業大学 情報理工学院
ふんどっく　とぅあん
筑波大学 システム情報系

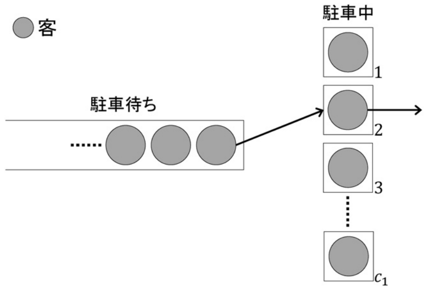

図 1　駐車場を共同利用しない場合のモデル（店 1）

2.1 駐車場を共同利用しない場合

この場合，それぞれの店ごとに考えればよいので，ここでは店 1 に着目します（店 2 についても同様のことが言えます）．駐車場をサーバ，駐車時間をサービス時間と見ると，これは図 1 のような M/M/c_1 と呼ばれる待ち行列モデルになります．このモデルでは，$\rho_1 < c_1$ のとき定常状態が存在し，定常状態において駐車中と駐車待ちの車の合計台数が i である確率（定常分布）$\pi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ は次式で与えられます．

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{{\rho_1}^i}{i!}\,\pi_0, & i = 1, 2, \ldots, c_1, \\ \dfrac{{\rho_1}^i}{{c_1}^{i-c_1}\,c_1!}\,\pi_0, & i = c_1 + 1, c_1 + 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{c_1-1} \frac{{\rho_1}^i}{i!} + \frac{{\rho_1}^{c_1}}{(c_1 - 1)!(c_1 - \rho_1)} \right)^{-1}.$$

2.2 駐車場を共同利用する場合

この場合，$c = c_1 + c_2$ 台分の駐車場を店 1 と店 2 の両方の客が利用します．客は，両方の店を併せて到着率 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ の定常ポアソン過程にしたがって到着し，到着した客は確率 λ_1/λ で店 1 の客，確率 λ_2/λ で店 2 の客です．この場合の待ち行列モデルは図 2 のようになります．実際には，客が到着するときにはどちらの店の客かが決まっていますが，駐車する直前に上記の確率で割り振るようにしても同じです．

時刻 $t \geq 0$ での駐車中と駐車待ちの車の合計台数を $N(t)$，駐車中の車のうち店 1 の客の車の数を $M(t)$ と

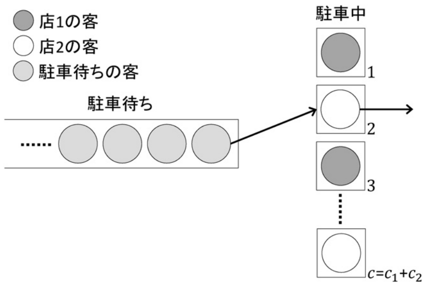

図 2 駐車場を共同利用する場合のモデル

すると，確率過程 $\{(N(t), M(t))\}_{t\geq 0}$ は状態空間 $\mathcal{S} = \{(i,j) \mid i = 0,1,2,\ldots; j = 0,1,\ldots,\min(i,c)\}$ 上で**準出生死滅過程**と呼ばれる連続時間マルコフ連鎖になります．さらに，$i > c$ を満たす状態 (i,j) については，i に関して同じ状態推移構造をもつことがわかります．このマルコフ連鎖は $\rho_1 + \rho_2 < c$ のときに定常状態を持ち，定常状態において状態が $(i,j) \in \mathcal{S}$ である確率（定常分布）$\widetilde{\pi}_{i,j}$ を数値計算によって求めることができます（詳しくは [1] をご参照ください）.

3. 数値評価

3.1 評価指標

実際に数値計算を行い，駐車場を共同利用する場合としない場合とを比べてみましょう．用いる評価指標は「待たずに駐車できる確率」と「平均待ち時間」の二つです．これらの評価指標はどちらも定常分布から求めることができます．たとえば，駐車場を共同利用しない場合の（店 1 の）「待たずに駐車できる確率」は，

$$p_{(\text{店 1 単独})} = \sum_{i=0}^{c_1-1} \pi_i$$
$$= 1 - \left(1 + (c_1 - \rho_1)(c_1 - 1)! \sum_{i=0}^{c_1-1} \frac{1}{i!\, {\rho_1}^{c_1-i}}\right)^{-1}$$

となります．この最後の式の第 2 項は**アーラン C 式**と呼ばれています．一方，駐車場を共同利用する場合の「待たずに駐車できる確率」は，どちらの店の客についても，

$$p_{(\text{共同利用})} = \sum_{i=0}^{c-1} \sum_{j=0}^{i} \widetilde{\pi}_{i,j}$$

です.

3.2 計算結果

$c_1 = 5, c_2 = 10, 1/\mu_1 = 0.1$（時間）, $1/\mu_2 = 1$（時間）として，それぞれの店にとって駐車場を共同利用したほうがよいのか，それともしないほうがよいのかを調べた結果が図 3，図 4 です．図中の領域 1〜3 はそれぞれ次の場合を表しています.

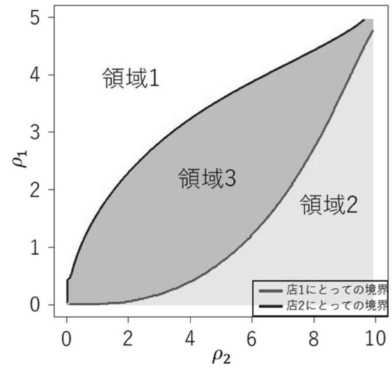

図 3 待たずに駐車できる確率による評価

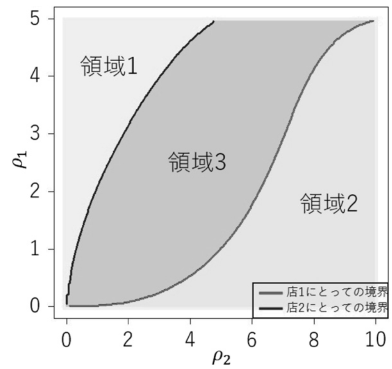

図 4 平均待ち時間による評価

- 領域 1：店 1 にとっては共同利用したほうがよく，店 2 にとっては共同利用しないほうがよい.
- 領域 2：店 1 にとっては共同利用しないほうがよく，店 2 にとっては共同利用したほうがよい.
- 領域 3：両方の店にとって共同利用したほうがよい.

パラメータの値を変えて同様の計算を行ったところ，同じように両方の店にとって共同利用したほうがよい領域があることが確認できました.

4. まとめと今後の課題

隣接する二つの店が駐車場を共同利用したほうがよいのかどうかを，待ち行列理論を用いて調べてみました．今後は，到着率が待ち行列の長さによって変わる場合や，駐車場の一部のみを共同利用する場合などの評価が考えられます.

参考文献

[1] 滝根哲哉，“M/M/1 を越えて—準出生死滅過程への招待—，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**59**, pp. 179–184, 2014.