# 混雑課金のゲーム理論的分析

武藤　滋夫

キーワード：混雑課金，ボトルネックモデル，ポテンシャルゲーム

本稿は，湯川 隼貴さんにより東京工業大学大学院社会理工学研究科に提出した2014年度修士論文の概要をもとに，武藤が加筆修正したものである．

## 1. 問題の説明と得られた結果

われわれが毎日直面している問題の一つに道路混雑がある．道路混雑は道路利用者に疲労やストレスを与えるだけでなく，経済損失や有害な排出ガスといった問題も生じさせている．このような問題に対して，道路利用に課金し，交通需要を抑制し分散させる政策があり，混雑課金や混雑税，ロードプライシングなどと呼ばれている．

道路混雑を分析する基本モデルはいくつかあるが，本研究ではボトルネックモデルを用いる．たとえば朝の通勤ラッシュでは，道路利用者は家を出て会社に向かう．ただし，経路上には単位時間当たりの通過交通量に制限のあるところがあり，潜在的な混雑発生場所（ボトルネック）となる．これがボトルネックモデルである．図1はボトルネックモデルのイメージ図であり，中央の細くなった部分がボトルネックである．

本研究では，3期間のボトルネックモデルを用いる．まず，課金がない場合に，通勤者が自分にとって都合のよい時間帯に家を出ると交通が集中しボトルネックで渋滞が生じるナッシュ均衡（以下，単に均衡と記す）に陥ってしまうこと，そして，この均衡状態は社会的最適状態とはならないことを示す．次いで，均衡状態において社会的最適状態に到達するには，どのような混雑課金を行えばよいかを導く．

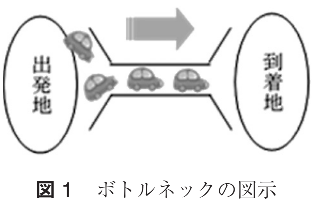


**図1**　ボトルネックの図示

むとう　しげお
東京理科大学 経営学部
〒102–0071 東京都千代田区富士見 1–11–2

## 2. ボトルネックモデルと先行研究

ボトルネックモデルは Vickrey [1] と Hendrickson and Kocur [2] が独立に提案したものであり，到着時刻と混雑の長さに関心をもつ利用者が出発時刻を選択する状況において，どのように混雑が発生するかの分析に用いられた．彼らはまず混雑のない状況が社会的に最適であることを示した．次いで，各利用者が独自に出発時刻を選択する際，均衡においては混雑が発生することを示すとともに，混雑のない状態を均衡として実現する混雑課金スキームを提案した．しかしながら，これらの先行研究は均衡状態の分析のみにとどまっており，課金システムにより，どのようにして社会的に最適な均衡に到達するかは明らかにされていなかった．

## 3. 本研究の問題設定

本研究では，利用者の均衡外における行動も考慮に入れ，ある均衡状態へ到達するよう利用者の行動を導く混雑課金スキームを検討する．以下の分析では，Sandholm [3–5] が本研究とは別の問題において課金スキームを分析した際に用いた，進化ゲームとポテンシャルゲームに基づくアプローチを用いる．

Sandholm [3–5] によるアプローチの概要は以下のとおりである．課金後のゲームが，ポテンシャルゲームになるように課金スキームを設計する．このとき，このゲームのポテンシャル関数がただ一つの最大化点をもち，それが社会的最適状態になるとすると，社会的最適状態がただ一つの均衡状態となる．もちろん，このような課金スキームの存在が問題になる．もし存在すれば，利用者それぞれの戦略の調整により，どのような初期状態からスタートしたとしても社会的最適状態に到達する．

Sandholm [3] のポテンシャルゲームでは戦略集合は有限集合と想定されているため，本研究では研究の出

  

発点として3期間からなるボトルネックモデルを分析する．

## 4. 分析と結果

測度1（たとえば，[0, 1] の閉区間）のプレイヤー（通勤者）の集合を考え，全員がボトルネックを通過して通勤すると仮定する．時刻の集合は {期間 1, 期間 2, 期間 3} で与える．全プレイヤーの始業時間は期間 2 直後で共通とする．期間 3 に家を出発すれば，明らかに始業時間に間に合わないことから，利用者の戦略集合は $S$={期間 1, 期間 2} とする．戦略分布 $x = (x_1,\ x_2) \in X = \{x \in R_+^2 :\ x_1 + x_2 = 1\}$ によって，各期間に出発した利用者の数を表現する．$R_+^2$ は 2 次元の非負の実数ベクトルの集合である．

経路上のボトルネックでは，期間当たりのキャパシティーがあり，期間 1 と期間 2 では 1/3，期間 3 には 1 とする．期間 3 が多いのは，3 期間で完結させるためである．たとえば，期間 1 に 1/2 が出発したとすれば，期間 1 のキャパシティが 1/3 のため $1/2 - 1/3 = 1/6$ が期間 1 で待機し期間 2 に到着することになる．また，ボトルネック内では，First-in-First-out [FIFO] 原則が成り立つものとする．これは，早い期間にボトルネックに入った通勤者からボトルネックを通過していく，という原則である．

ここで，期間 $i = 1,\ 2$ に家を出た通勤者がボトルネックを通って通勤する際の費用を Vickrey 型の費用関数 $c_i$ で定義する．$j$ は到着する期間である．

$$\begin{aligned} c_i &= a(j - i) + b(2 - j) \quad j = 1,\ 2,\ \ j \geq i \\ c_i &= a(j - i) + c(j - 2) \quad j = 3 \end{aligned}$$

ここで，第 1 項はボトルネックで待機することによる費用，第 2 項は始業時刻より早く到着する，もしくは遅刻することによる費用である．また，ボトルネックモデルにおける標準的なパラメーター条件：$c > a > b > 0$ が満たされるものとする．

各期間において発生する交通量がキャパシティーを超えていれば（つまり $x_i > 1/2,\ i = 1,\ 2$），同じ期間にボトルネックを通過するものはランダムに選ばれると考え，期待費用を $EC_i$ と表すと，利得は $F_i(x_i) = -EC_i(x_i), i = 1,\ 2$ となる．また，社会的な効率性をゲームで発生する総利得 $\bar{F}(x) = x_1F_1(x_1) + x_2F_2(x_2)$ で測ると，社会的な効率性は $x_1 = 1/3,\ x_2 = 2/3$ で最大化されることが示される． この分布を社会的最適状態と呼ぶ．社会的最適状態では，期間 1 には混雑は発生しない．

課金を考えないゲームにおける唯一のナッシュ均衡は $x_1 = 1, x_2 = 0$，つまりすべての利用者が期間 1 に出発するときであることが示される．この点は明らかに社会的最適状態ではなく，混雑課金が必要になる．

本研究では，Sandholm [3–5] によるアプローチを用いて，期間 1 でのキャパシティーを超えた交通量に対して課金を引き上げることにより，通勤者が期間 2 に出発時刻をシフトさせるように促す課金システムを設計した．つまり，期間 1 においてキャパシティーを超えた交通量が発生する場合には課金を引き上げ，逆の場合には課金を引き下げるような課金スキームである．このスキームは，社会的最適状態では，先行研究で提示されている混雑課金を離散化した形に到達するものになっており，本アプローチは先行研究との整合性をもっていると考えられる．

## 5. 今後の課題

最後に今後の課題を述べる．本研究では 3 期間のみを検討したが，実際にはもっと細かく区切られた時間のなかで意思決定をしている．期間数が増えるにつれて解析的な分析は困難になるため，今後はシミュレーション分析が必要になる．また，最近 Cheung [6] は Sandholm [3] のポテンシャルゲームを戦略集合が連続集合となる場合に拡張しており，Cheung [6] を参考にして，連続時間における混雑課金を分析することも今後の研究の一つの方向である．

### 参考文献


[1] W. S. Vickrey, "Congestion theory and transport investment," *American Economic Review*, **59**, pp. 251–260, 1969.

[2] C. Hendrickson and G. Kocur, "Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model," *Transportation Science*, **15**, pp. 62–77, 1981.

[3] W. H. Sandholm, "Potential games with continuous player sets," *Journal of Economic Theory*, **97**, pp. 81–108, 2001.

[4] W. H. Sandholm, "Evolutionary implementation and congestion pricing," *Review of Economic Studies*, **69**, pp. 667–689, 2002.

[5] W. H. Sandholm, "Negative externalities and evolutionary implementation," *Review of Economic Studies*, **72**, pp. 885–915, 2005.

[6] M.-W. Cheung, "Pairwise comparison dynamics for games with continuous strategy space," *Journal of Economic Theory*, **153**, pp. 344–375, 2014.