

Max-Plus 線形システムを応用した 鉄道システムのスケジューリング手法の開発

高橋 弘毅

キーワード：列車の時刻表、スケジューリング、Max-Plus 代数、Max-Plus 線形システム

本稿は、丸山 達也さんによる 2015 年度長岡技術科学大学大学院工学研究科 修士論文をもとに加筆修正したものです。

1. 研究概要と成果

通勤や通学などだけでなく、さまざまな用途で列車が多く利用されている。これらの利用者を時刻どおりに目的地に運ぶためには、鉄道システムのスケジューリングは必要不可欠である。また、事故や故障などが起こった場合にはスケジューリングをやり直す必要があり（再スケジューリングと呼ぶ）、列車の運転再開までに時間がかかると、旅客集中を引き起こすことや他路線への相互乗り入れなどに影響を与えるため、再スケジューリングには迅速性が要求される。本研究では、生産システムのスケジューリング・再スケジューリング手法の一つとして知られる Max-Plus 線形 (MPL) システム [1] をもとに、生産システムとは違った鉄道システム特有の制約を取り扱えるようにモデル化した。その後、簡単な路線図と経路図を用いた数値実験を行い、列車のスケジューリング・再スケジューリング手法の有効性を確認した。

2. 問題の設定とモデル化

ここでは、鉄道システムを列車の時刻表スケジューリングやリソース（乗務員や車両の割り当てなど）のスケジューリングなど列車を運行させるために必要な包括的なシステムと考える。本研究では、この中の時刻表スケジューリングに対し MPL システムを用いて考えていく。MPL システムでは、 \max 演算を加算：

$\max(x, y) = x \oplus y$, $+$ 演算を乗算： $x + y = x \otimes y$, とみなす Max-Plus 代数¹を用いて、非線形なシステムのふるまいを線形な状態方程式として記述することができる。この状態方程式は現代制御理論における状態方程式に似た形で表現することができ、現代制御理論とのアナロジーにより、生産システムのスケジューリング手法やプロジェクト管理手法などさまざまな分野に応用され、有効性が示されている [1]。生産システムのスケジューリングやプロジェクト管理を目的とした MPL システムにおいて、各部品を各列車に、各工程を各駅などに対応させることにより、そのままの列車の時刻表スケジューリングに適用できるかということ、話はそう簡単ではない。たとえば、生産システムやプロジェクト管理では、工程や作業をすべて行うことで製品の完成やプロジェクトが完了するのに対し、列車は配置された駅すべてを運行するわけではない。さらに、都心のような高密度な鉄道では、駅間に複数台の列車が存在する場合を考えなくてはならない。そのため、駅間に存在できる列車の最大本数と、駅間に最低限存在しなければならない列車の最小本数を考慮していく必要もある。このような鉄道特有の状況を考慮し、MPL システムをもとにモデル化していく。

列車の運行状況をモデル化するため、次のような制約を考える：

- 列車は二つ以上の駅を運行する。
- 列車は順次上流から下流まで運行するが、設置されたすべての駅に停車するとは限らない。
- 下流駅より先行する列車が発車するまで、上流駅に次の列車が到着することはできない。
- 後続の列車は、前の列車を追い越さない。
- 鉄道の経路は、'合流'の構造をもつことができる。'合流'の構造をもつ場合、列車は複数の始発駅をもつ。
- 鉄道の経路は、'分岐'の構造をもつことができる。'分岐'の構造をもつ場合、列車は複数の終着駅をもつ。

¹ Max-Plus 代数は零元と単位元が存在するが加算の逆元が存在しない半環構造である。

g) 列車の存在する本数の上限を決める，最大本数区間を設定することができる。

h) 列車の存在しなければならない本数の下限を決める，最小本数区間を設定することができる。

これらの制約のもとに，列車 k の各駅 i に対する最早出発・到着時刻 $\mathbf{x}_E(k)$ をモデル化すると，状態方程式

$$\mathbf{x}_E(k) = \mathbf{A}_k^{\otimes 2\ell-2} \otimes \left[\mathbf{A}_k \otimes [\mathbf{x}'_k \oplus \mathbf{L}_0 \otimes \mathbf{x}_k^+ \oplus \mathbf{x}_k^-] \right],$$

を導くことができる。ここで， \mathbf{A}_k は路線図や経路図（各駅の位置や各駅間の所要時間，駅での停止時間および最大本数区間の設置位置）で決まる行列， \mathbf{L}_0 は最小本数区間の設置位置で決まる行列， \mathbf{x}'_k は列車 k より m 本前の列車の最早出発・到着時刻を反映したベクトル， \mathbf{x}_k^+ は最大本数区間のみを考慮した際の列車の最早出発・到着時刻を反映したベクトル， \mathbf{x}_k^- は列車の始発駅到着時刻に関するベクトル，また， ℓ は列車の運行総本数により決まるスカラー値である。さらに，列車 k に対し再スケジューリングが必要な場合には，再スケジューリングが必要な駅 i に対応する \mathbf{x}_k^- の成分 $[\mathbf{x}_k^-]_i$ に $-\infty$ を代入し，この状態方程式を再度計算すればよい構造になっている。

3. モデルの有効性検証と今後の展望

モデル化した状態方程式の有効性を確認するため，数値実験を行った。図 1 に用いた路線図（上）および経路図（下）を示す。駅数は 8 であり，各駅の停車時間はそれぞれ 1 とした。駅間の所要時間は，図 1（上）のように設定した。また，駅間の列車の最大本数は，駅 3 と 4 を結ぶ破線の矢印間のみ 2 とし，それ以外の駅間では 1 とした。駅間の列車の最小本数は，駅 3 から 5 までを結ぶ点線の矢印間のみ 1 とし，それ以外では最小本数を設定しない。図 1（下）の経路図では，縦に駅番号，横に列車番号を示している。列車の本数は 10 本であり，何も書かれていない駅を列車が運行し，‘-’ が書かれている駅は運行しない。たとえば，列車 2 は駅 1 と 2 から出発し，駅 3 で合流（連結）する。その後，駅 5 で駅 6 と 7 に向かう列車に分かれ，それぞれの終着駅に向かう。

列車の運行が開始された時刻を 0 とし，状態方程式を用いて最早出発・到着時刻を計算した結果を図 2 に示す。この結果より，最大本数や最小本数を考慮して列車の時刻表が作成できていることを確認できる。ここでは，いくつか典型的な結果を見ていく。列車 2 は駅 3 に時刻 13 で到着する。これは駅 3 が‘合流’の構造を持っており，駅 1 と 2 から出発した列車が，駅 3 で

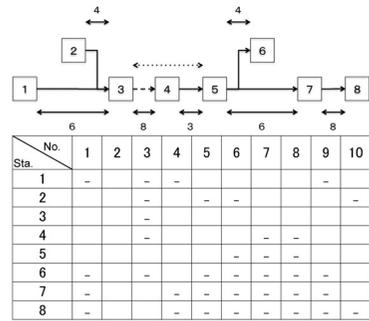


図 1 路線図（上）と経路図（下）

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	6	-	-	20	28	37	45	-	59
2	-	7	-	-	21	29	38	46	-	60
3	0	6	-	14	-	-	37	45	53	-
4	1	7	-	15	-	-	38	46	54	-
5	5	13	-	19	27	36	44	52	58	66
6	6	14	-	20	28	37	45	53	59	67
7	14	22	-	35	40	45	-	-	67	75
8	15	23	-	36	41	46	-	-	68	76
9	18	26	34	39	44	-	-	-	71	79
10	19	27	35	40	45	-	-	-	72	80
11	-	31	-	44	-	-	-	-	-	84
12	-	32	-	45	-	-	-	-	-	85
13	-	33	43	-	-	-	-	-	-	86
14	-	34	44	-	-	-	-	-	-	87
15	-	42	52	-	-	-	-	-	-	-
16	-	43	53	-	-	-	-	-	-	-

図 2 計算された列車の時刻表。上の数字は，その駅の最早到着時刻を，下の数字はその駅の最早出発時刻を表す。

合流するため所要時間が多くかかるほうの時刻をとり，かつ，駅 3 と 4 の間に設定されている最大本数が 2 本であるため，先行する列車 1 の駅 4 の出発時刻 15 よりも早い時刻 13 で，列車 2 は駅 3 に到着できる。次に，駅 2-3 間の最大本数が 1 本であり，列車 3 は駅 3 を運行しないため，列車 4 は，列車 2 が駅 3 を出発したら，駅 2 に到着している。これ以外の列車も制約に則りスケジューリングされていることを確認できる。また，列車に遅れが生じた場合の再スケジューリングについても数値実験を行い有効性の確認をしている。

本研究におけるモデル化を，実際の列車の路線図や経路図を用いて実験してみることで，さらに有効性を実証していきたい。また，本研究のモデル化では，駅を通過するが停車はしない快速運転を行う列車は考慮することはできるが，列車の追い越しを考慮できていない。さらに，列車の往復について考慮する必要があるが，これはリソーススケジューリングと共に考えていく必要があるだろう。現実の鉄道システムにさらに近づけ改良していくことが今後の課題である。

参考文献

[1] 五島洋行，“Max-Plus 代数を用いて日程計画問題を考える，” 計測と制御，**52**, pp. 1083-1089, 2013.