# 表計算ソフトで待ち行列を再現してみよう

井家　敦，岸　康人，佐久間　大

日常生活にはさまざまな種類の混雑（待ち行列）が存在し，その影響の大きさは計り知れません．待ち行列理論は混雑が発生する施設において，利用者行動や施設の構造が混雑に与える影響を明らかにし，施設を設計および運用する際の効果的な評価指標を与えることを目的としています．本稿では，コンビニのレジにおける待ち行列をイメージした例について，表計算ソフト (Microsoft Excel) を用いた簡単な待ち行列の再現方法（モデル化）について詳しく解説します．さらに，現実のデータが得られた際にどのようにモデルに反映すればよいかについても説明します．

キーワード：待ち行列理論，表計算ソフト，シミュレーション

## 1.　はじめに

多くの人が日常的に混雑を経験しており，できるならば混雑は避けたいと思っていることでしょう．混雑の例を挙げてみれば，学生食堂における行列，交通渋滞，病院における診察待ち，スマートフォンの通信速度が上がらない等々，きりがありません．混雑が発生する施設（以下，「サービス施設」と呼ぶ）に共通する特徴は，サービスを提供する窓口（以下，単に「窓口」と呼ぶ）が存在し，そのサービスを必要とする不特定多数の利用者（以下，「客」と呼ぶ）が到着することです．表 1 にサービス施設における窓口と客の例をいくつか挙げます．

ではサービス施設においてなぜ混雑は発生するのでしょうか？　主な原因は，窓口の数には一般に限りがあること，さらに，客の行動（到着の仕方，窓口を占拠する時間など）は不確実であることが挙げられます．このため，サービスを受けるための待ち客が発生し，それが混雑につながります．

**表 1**　サービス施設における窓口と客

| サービス施設 | 窓口 | 客 |
|---|---|---|
| 学生食堂 | 券売機 or 配膳窓口 | 学生 |
| 高速道路 | 入場ゲート or 道路 | 車 |
| 病院 | 診察室 or 会計窓口 | 患者 |
| コンビニ | レジ | 買い物客 |
| スマートフォン | ネット上の通信機器 | データ |

待ち行列理論[1]は，サービス施設における不確実性を確率的に表すことにより，客の行動やシステムの構造が混雑（待ち行列）に与える影響を明らかにし，サービス施設を設計および運用する際の効果的な評価指標を与えることを目的としています．本稿では，コンビニのレジにおける待ち行列をイメージした例について，表計算ソフト (Microsoft Excel) を用いた簡単な待ちの再現方法（モデル）について解説します．さらに，現実のデータが得られた際に，どのようにモデルに反映すればよいかについても説明します．

## 2.　表計算ソフトを使った待ち行列の再現

### 2.1　モデルの説明

図 1 を見てください．あるサービス施設において，窓口（レジ）は一つ稼働しているものとします[2]．窓口に到着した客は，窓口が空いていれば直ちにサービスを受け，サービスを終えたら施設を退去します．客が到着したとき，もしも窓口が他の客により占拠されている場合，その到着客はサービスが自分の番になるま

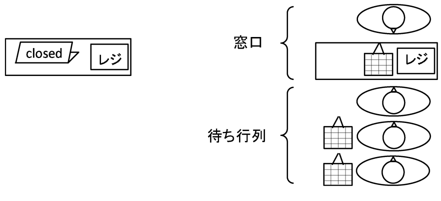



**図 1**　レジの待ち行列

[1] 待ち行列理論を初めて学ぶ人には文献 [1] がお薦めです．
[2] 説明を簡単にするため，動いている窓口を一つに限定しました（深夜の店内をイメージしてもよいかもしれません）．

いのいえ　あつし
神奈川工科大学情報学部情報ネットワーク・コミュニケーション学科
〒 243–0292 神奈川県厚木市下荻野 1030
きし　やすひと
東京交通短期大学運輸科
〒 170–0011 東京都豊島区池袋本町 2–9–1
さくま　ゆたか
防衛大学校情報工学科
〒 239–0811 神奈川県横須賀市走水 1–10–20

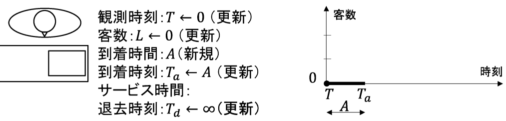



**図 2**　はじめの状況（客が誰もいない）

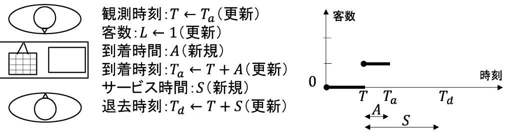



**図 3**　次の状況（客が到着）

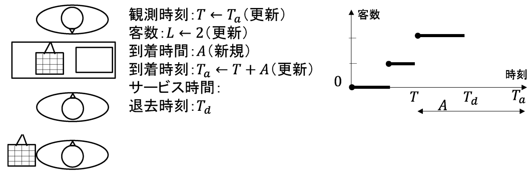



**図 4**　その次の状況（さらに客が到着）

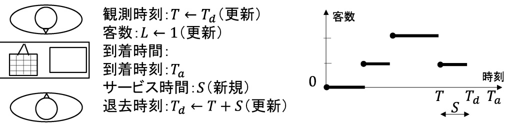



**図 5**　最後の状況（客が退去）

で待ち行列に並びます．窓口が空き次第，待ち行列の客は先着順にてサービスを受けます．2.2 節ではレジにおける待ち行列がどのようにして変化していくのかを具体的に見ていきましょう．

### 2.2　レジ待ち行列の標本路[3]

ここでは，レジの待ち行列が 0 人から始まり[4]，その後，1 人，2 人と増え，その後最初の 1 人がサービスを受け終わって待ち人数が 1 人になるまでの状況について[5]，以下四つの段落を通じて考えてみます．

図 2 を見てください．いま（観測時刻 $T \leftarrow 0$ と表記），レジには客が誰もいないとし（客数 $L \leftarrow 0$ と表記），最初の客が到着する時刻（$T_a$ と表記）までこの状態は変わりません．なお，“$T \leftarrow 0$” は観測時刻 $T$ の値を 0 に置き換える（更新する）ことを意味します（他についても同様）．最初の客が到着するまでの時間を $A$ で表せば（以下，到着の発生する時間間隔を単に「到着時間」と呼ぶ），明らかに $T_a \leftarrow A$ です．いまはレジでサービス中の客はいないため，客のサービス時間を考える必要はなく，さらに客がレジから退去する時刻（$T_d$ と表記）も考える必要はありません（便宜上，$T_d \leftarrow \infty$ と表記[6]）．

次に待ち行列が変化する時刻は，客の到着もしくは退去が起こる時刻です．図 3 を見てください．いまの場合は，明らかに客の到着が先に起こります（$T_a < T_d$ のため）．よって観測時刻を $T \leftarrow T_a$ としましょう．また，客数を $L \leftarrow 1$ に更新します．そして次の客の到着時間 $A$ を新たに考え[7]，次に客が到着する時刻を $T_a \leftarrow T + A$ に更新します．いまは客がレジにおいてサービスを受け始めたので，この客のサービスにかかる時間（以下，「サービス時間」と呼ぶ）を $S$ とし，客の退去時刻を $T_d \leftarrow T + S$ に更新します[8]．ここでは偶然 $T_a < T_d$ であったと仮定しましょう．

次に待ち行列が変化する時刻は，客の到着が起こる時刻であるので（$T_a < T_d$ のため），観測時刻を $T \leftarrow T_a$，客数を $L \leftarrow 2$ に更新しましょう．図 4 を見てください．前の段落と同様に，次の客の到着時間 $A$ を新たに考え，次の客の到着時刻を $T_a \leftarrow T + A$ に更新します．ここでは偶然 $T_a > T_d$ であったとしましょう．

最後に図 5 を見てください．次に待ち行列が変化する時刻は，レジでサービスを終えた客の退去時刻であるので（$T_a > T_d$ のため），観測時刻を $T \leftarrow T_d$，客数を $L \leftarrow 1$ に更新しましょう．さらにこのタイミングで次の客がレジでサービスを受け始めますので，客のサービス時間を $S$ として[9]，客の退去時刻を $T_d \leftarrow T + S$ に更新します．

### 2.3　離散事象シミュレーション

上述したサービス施設の動きをシミュレーションする方法としては，リンドレーの公式を使用する方法[10]がよく知られていますが，ここでは離散事象シミュレーションによる方法を紹介します．離散事象シミュレーションとは，2.2 節で見たようにサービス施設の状態

[3] ここでの標本路とは，時間に対する客数の関係を表したもの（関数）を指します．

[4] ここで言う「待ち行列」とはサービス中とサービス待ちの客を合わせたものを意味します．

[5] たとえば，1 人目のサービスが思いのほか長く，その後ろに客が並ぶような状況を想像してください．

[6] $\infty$ は数字ではないのですが直感的な表現を使いました．

[7] すでに出てきた $A$ とは別物ですが表記の単純化のため同じ記号を用いました．

[8] あたかもレジ（窓口）に入るタイミングでサービス時間が決まるとしています．これはレジで精算処理をする店員の目線と言ってよいでしょう．

[9] すでに出てきた $S$ とは別物ですが表記の単純化のため同じ記号を用いました．

[10] リンドレーの公式を用いた Excel でのシミュレーションは [2] を参照してください．

（ここでは待ち行列内の人数のことを指し，単に「客数」と呼ぶ）が変化する出来事（「イベント」あるいは「事象」と呼ぶ）に注目し，時系列的にそれらのイベントまで時刻を進めながら待ち行列の状態の変更を行うシミュレーション手法です．ここでいう「イベント」とは次の二つ

- 客のサービス施設への「到着」が発生する
- 客のサービス完了による「退去」が発生する

を指します．シミュレーション方法ですが，以下の六つの手順を参考にしてください．

手順 1.（初期設定）シミュレーション開始時間 $T \leftarrow 0$，サービス施設内の客数 $L \leftarrow 0$ とする．次の客が到着するまでの時間 $A$ を決めて，$T_a \leftarrow A$ とする．また，$T_d \leftarrow \infty$ とする．この場合，次のイベントを $E \leftarrow$ “到着” とする．

手順 2.（現在の時刻の計算）もし，$E =$ “到着” ならば，$T \leftarrow T_a$ とする．一方で，$E =$ “退去” ならば，$T \leftarrow T_d$ とする．

手順 3.（客数の計算）もし，$E =$ “到着” ならば，サービス施設内の客数の履歴 $L_{\text{before}} \leftarrow L$ とし，客数 $L \leftarrow L + 1$ とする．一方で，$E =$ “退去” ならば，$L \leftarrow L - 1$ とする．

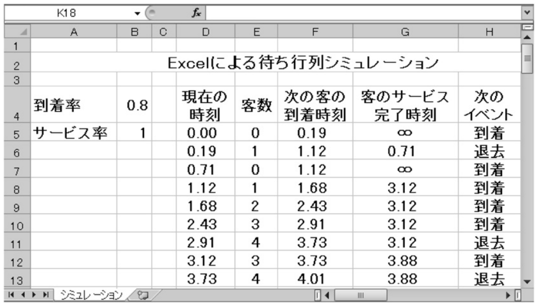
手順 4.（次の客の到着時刻の計算）もし，$E =$ “到着” ならば，次の客が到着するまでの時間 $A$ を決めて，次の客の到着時刻 $T_a \leftarrow T + A$ とする．

手順 5.（客のサービス完了時刻の計算）もし，$L = 0$ ならば，$T_d \leftarrow \infty$ とする．一方で，$L > 0$ ならば，もし，$E =$ “退去” である，あるいは $L_{\text{before}} = 0$ ならば[11]，サービスを受ける客のサービス時間 $S$ を決めて，客のサービス完了時刻 $T_d \leftarrow T + S$ とする．

手順 6.（次のイベントの決定）もし，$T_d < T_a$ ならば，$E \leftarrow$ “退去” とする．さもなければ，$E \leftarrow$ “到着” とする．手順 2 に戻る．

### 2.4　Excel による実装例

Excel は Microsoft 社が販売している，世界で最も普及している表計算ソフトです．本節では Excel を用いて，「客の到着時間」と「客のサービス時間」がともに指数分布[12]に従う場合について，このサービス施設の離散事象シミュレーションを図 6 のように行ってみます．まずは 2.3 節の手順 1 に従い，シミュレーションの初期パラメータと初期状態を入力します．なお，「客の到着時間」と「客のサービス時間」がともに指数分布に従う場合，単位時間あたりの平均到着客数（到着率）と平均サービス客数（サービス率）をパラメータとして事前に与える必要があります．



K18

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | Excelによる待ち行列シミュレーション | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | 到着率 | 0.8 | | 現在の時刻 | 客数 | 次の客の到着時刻 | 客のサービス完了時刻 | 次のイベント |
| 5 | サービス率 | 1 | | 0.00 | 0 | 0.19 | ∞ | 到着 |
| 6 | | | | 0.19 | 1 | 1.12 | 0.71 | 退去 |
| 7 | | | | 0.71 | 0 | 1.12 | ∞ | 到着 |
| 8 | | | | 1.12 | 1 | 1.68 | 3.12 | 到着 |
| 9 | | | | 1.68 | 2 | 2.43 | 3.12 | 到着 |
| 10 | | | | 2.43 | 3 | 2.91 | 3.12 | 到着 |
| 11 | | | | 2.91 | 4 | 3.73 | 3.12 | 退去 |
| 12 | | | | 3.12 | 3 | 3.73 | 3.88 | 到着 |
| 13 | | | | 3.73 | 4 | 4.01 | 3.88 | 退去 |

シミュレーション

**図 6**　Excel による待ち行列シミュレーション

手順 1.（初期設定）

- （到着率，サービス率の入力）セル `B4` に到着率，`B5` にサービス率を入力します．このとき，到着率はサービス率より小さい値を選ぶとよいでしょう[13]．
- （シミュレーション開始時刻と初期客数の入力）セル `D5` に「`0`」（シミュレーション開始時刻），セル `E5` に「`0`」（初期客数）を入力します．
- （次の客の到着時刻）次の客の到着時間は指数分布に従う乱数を用いて生成します．セル `F5` に「`=-LN(1-RAND())/$B$4`」[14] と入力するとセル `B4` の到着率に従う指数乱数を発生させることができます[15]．
- （客の退去時刻）初期状態では客数が「`0`」ですのでセル `G5` に「∞」[16] を入力しておきます．
- （次のイベント）セル `H5` には次に起こるイベントである「到着」あるいは「退去」が入力されます．2.3 節の手順 1 でも説明しましたが，初期状態では客数が「`0`」ですのでセル `H5` に入力される値は「到着」となります．

これで初期状態が入力されました．さらに次のイベントまでのシミュレーションを行ってみましょう．

---

[11] このとき客数が 0 から 1 に変化したことを意味します．

[12] 指数分布については 3 節で説明します．

[13] さもなければ客数が時間とともに増加傾向になります．

[14] `$B$4` はセル `B4` の絶対参照（このセルのコピーを行っても，そのセルの参照は固定されている）を示しています．

[15] `RAND()` は 0 以上 1 未満の実数の値をとる一様乱数（0 から 1 の間から無作為に選ばれた数）です．

[16] 適当な文字列で構いませんが，ここではわかりやすさのために「∞」としておきます．

手順 2.（現在の時刻の計算）セル D6 で与えられる時刻はセル H5 で示されたイベントが発生した時刻です．イベントは客の「到着」と「退去」しかありませんので，セル F5 とセル G5 のうち値が小さいものを選ぶこととなります．この場合，セル D6 には条件分岐のための関数である IF 関数を用いて「=IF(H5="到着",F5,G5)」と入力すればよいでしょう．IF 関数では，最初の引数「H5="到着"」が条件となります．この式では，セル H5 の値が「到着」であるなら，セル F5 に示された時刻が与えられ，一方でセル H5 の値が「退去」であるなら，セル G5 に示された時刻が与えられます．

手順 3.（客数の計算）セル E6 には「=E5+IF(H5="到着",1,-1)」と入力します．つまり，セル E5 で計算された客数に対して，セル H5 で計算された次のイベントが「到着」なら 1 を加算し，さもなければ 1 を減算します．

手順 4.（次の客の到着時刻の計算）セル F6 に「=IF(H5="到着",D6-LN(1-RAND())/$B$4,F5)」と入力します．セル H5 で計算された次のイベントが「到着」なら，現在の時刻に対して，次の客の到着までの時間（指数分布に従う乱数で生成した値）を加算します．一方で，次のイベントが「退去」である場合は，次の客の到着時刻に変化がありませんのでセル F5 の値が与えられます．

手順 5.（客のサービス完了時刻の計算）セル G6 に「=IF(E6=0, "∞", (IF(OR(H5="退去", E5=0), D6-LN(1-RAND())/$B$5,G5)))」と入力します．すなわち，セル E6 で計算された客数が 0 の場合，客のサービス完了時刻は「∞」となります．それ以外の場合で，もし次のイベントが「退去」である，あるいは，前の客数が 0 であるならば，現在の時刻に対して，現在サービス中の客のサービス時間を加算します．さもなければ，客のサービス完了時刻に変化がありませんので，セル G5 の値が与えられます．ここで，「OR(H5="退去",E5=0)」は二つの条件「H5="到着"」「E5>0」のいずれかが「真」である場合に，IF 関数の条件が「真」となることを指します．

手順 6.（次のイベントの計算）セル H6 に「=IF(F6>G6,"退去","到着")」と入力します．

以降のシミュレーションについてはセル範囲 D6:H6 を選択し，オートフィル機能を用いて，行番号 6 以降のセルに値を入力すればよいでしょう．図 7 はシミュレーション結果の標本路です[17]．

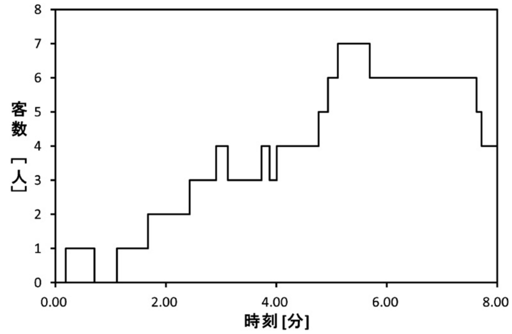



**図 7**　Excel シミュレーションでの標本路

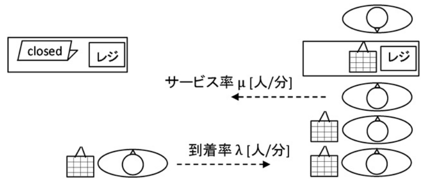



**図 8**　到着率とサービス率

本節では，窓口が一つの場合での Excel によるシミュレーション方法について紹介をしました．ただ実際のサービス施設では窓口が複数存在することも多くあります．窓口が複数存在する場合については，Excel によるシミュレーションは窓口が一つの場合に比べて表現が煩雑になるのでここでは割愛します．

## 3. 到着率とサービス率の推定

前節までは，待ち行列モデルの仕組みについて見てきました．シミュレーションや解析に意味をもたせるには，実際のシステムから観測される不規則な情報（客の到着の仕方，窓口でのサービス時間など）をモデルに反映する必要があります．本節では観測データにおける不規則性をどのようにモデルで表現すればよいかについて考えます．混雑しているコンビニのレジを観察できたとしましょう．私たちは商品を選び終わってレジの待ち行列に並ぶ客と，購入を終えた客の退去を見ることができます（図 8 参照）．

待ち行列理論では，到着率 $\lambda$ [人/分] とサービス率 $\mu$ [人/分] によってシステムを記述します．Excel シミュレーションのセル B4 と B5 に記述する値はこれらの率

[17] 本シミュレーションでは乱数を使っているため，読者のみなさんが行うシミュレーション結果は必ずしも本稿の結果（図 6 および 7）と一致しないことに注意してください．

**表 2**　到着人数の例

| 時間 | 到着人数 [人] |
|---|---|
| 11:30〜11:40 | 8 |
| 11:40〜11:50 | 10 |
| 11:50〜12:00 | 8 |
| 12:00〜12:10 | 5 |
| 12:10〜12:20 | 9 |

になります．では，到着率 $\lambda$ とサービス率 $\mu$ はどのように定めればよいでしょうか．

### 3.1　到着人数と率

レジの前では，到着する客を数えることができます．たとえば，10 分ごとに到着した人数を数えて記録した結果が表 2 のようになったとします．

この例では，10 分当たり平均 8 人，つまり $\lambda = 0.8$ [人/分] という到着の率を得ることができます．見方を少し変え到着率 $\lambda$ の逆数を考えてみると，$\lambda^{-1} = 1.25$ [分/人] であり，これは客のレジへの到着の発生間隔（つまり，到着時間）が平均 1.25 分であることを意味しています．ゆえに 2.4 節のシミュレーションでは，だいたい 1.25 分ごとにレジに客が到着するとしています (2.4 節のセル F5 や F6 に入力された値を参照)．

### 3.2　到着時間の確率分布について

客の到着時間が平均 $\lambda^{-1} = 1.25$ [分/人] であったとしても，1.25 分間隔で規則的に到着するとは限りません．しかし，多くの到着時間は 1.25 分に近い時間間隔となり，1.25 分から大きく離れる可能性は低くなると考えられるのではないでしょうか．待ち行列理論では，客の到着の仕方はある確率分布に従っていると考えます．確率分布にはさまざまな種類の分布が知られており，どのような分布を用いるかにより待ち行列の挙動は大きく変化します．ここでは，待ち行列理論において最もよく利用される分布であり，Excel シミュレーションで使用した指数分布を紹介します．

客の到着時間が平均 $\lambda^{-1}$ の指数分布に従うとは，到着時間が $t$ 以下（ただし，$t \geq 0$）になる確率 $F(t)$（分布関数と呼ぶ）が $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ となるときを言います[18]．到着時間は連続な値を取るため，ちょうど $t$ になる確率は 0 になります．このような連続型の分布では，“$t$ 以下である”確率を考え，その $t$ についての関数 $F(t)$ を用いて分布を表現します．指数分布の大きな特徴としては，この分布に従い生起するイベントの

[18] $e$ は自然対数の底またはネイピア数と呼ばれる定数で，$e = 2.718\cdots$（無理数）です．$e^x$ は $(e^x)' = e^x$ となる指数関数です．

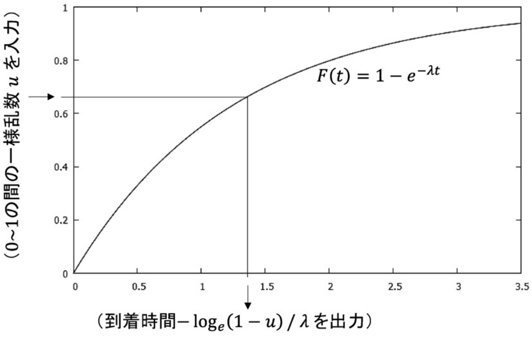



**図 9**　指数分布に従う到着時間の発生

発生間隔は過去に依存しないという性質が挙げられます[19]．このことから，指数分布はコンビニへの客の到着時間へ応用が可能と言えます．さらに，指数分布は待ち行列以外でも広く応用されており，たとえば次のようなイベントの発生間隔への応用が知られています．

- 電話局の交換機でのコール（発呼）
- Web サーバへのアクセス
- 交差点で発生する事故
- 工場などでの生産機械の故障

いま到着率 $\lambda$ の値は得られていますので，各客の到着時間がある $t$ 以下になる確率は（たとえば電卓を使えば）計算できるようになりました．シミュレーションを行うためには，これとは逆に各客の到着時間 $t$ を確率的に作り出すことが必要です．分布関数とは，実現値（各客の到着時間）を 0 以上 1 以下の実数（確率）に写す関数ですから，逆に 0 から 1 の間で一様に分布する実数 $u$（一様乱数）を与えれば，その起こりやすさに応じた到着時間 $t$ を逆関数 $F^{-1}(\cdot)$ を用いて，$t = F^{-1}(u) = -\log_e(1-u)/\lambda$ のように求めることができます．より具体的なイメージとしては，図 9 のように関数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ を描き，値域に 0 から 1 の間の一様乱数 $u$ を発生させ，それに対応する定義域の値 $F^{-1}(u) = -\log_e(1-u)/\lambda$ が到着時間の実現値になります．2.4 節の Excel のセル F5 において発生させている乱数はこの計算方法に基づいたものです．これでサービス施設における客の発生をシミュレーションできるようになりました．

### 3.3　サービス時間の確率分布について

コンビニのレジでは商品をもってきた客に対して，店員が商品のバーコードを読み取り，会計をして袋詰めをします．会計に要する時間はどの客もあまり違いはありませんが，その他は商品数に依存します．コンビ

[19] 大雑把に言えば，あとどれ位でイベントが発生するかの予想が難しい場合に指数分布が有用です．

**表 3** サービス時間の例

| 客の番号 | サービス時間 [秒] |
|---|---|
| 1 | 20.183 |
| 2 | 145.895 |
| 3 | 36.180 |
| 4 | 29.721 |
| 5 | 96.807 |
| ...(略) | ... |

ニで買い物をする大半の人は，2，3 の商品を買うだけで，処理にかかる時間はわずかです．ときどき買い物かごに多くの商品を入れた人がやってきて，その人の処理には少々時間がかかります．また，公共料金の支払いやコンサートなどのチケットを求める客はまれに来店し，処理をするためにはかなりの時間を要します．

表 3 は，レジでのサービス時間を記録したものです．多くの客にかかるサービス時間は，平均に近い値になり，過去の履歴に依存しないとみなすことにより，到着時間と同様にサービス時間にも指数分布を当てはめてみます．到着率と区別するため，この指数分布の平均を $\mu^{-1}$ [分/人] と書くことにすると，この例では，$\mu = 1 \div 59.8$ [人/秒] $= 1.0$ [人/分] になります．表 3 は表 2 とは異なり，時間間隔を記録していることに注意して下さい．

### 3.4 確率分布の選択について

以上で Excel シミュレーションの `B4` と `B5` のセルに与える数値（到着率およびサービス率）が得られました．実際にシミュレーションを実行してみて，観察と合っているか試してみるとよいでしょう． 3.2，3.3 節では，到着時間とサービス時間の分布として指数分布を用いました．指数分布は， 待ち行列モデルの解析上好ましい性質を備えていて，実際の解析やシミュレーションでは最もよく利用されています．しかしながら，現実に観測した到着時間やサービス時間の分布とは必ずしも合わないかもしれません．確率分布には多くの種類があり，到着時間やサービス時間の分布として選んだときに待ち行列の挙動がどうなるのかは研究の対象となりますが，本稿の範囲を超えますのでここでは触れません．

## 4. おわりに

本稿では，表計算ソフト (Microsoft Excel) を使って簡単に窓口が一つの待ち行列をシミュレーションする方法と，待ち行列での客の到着およびサービス時間を見積もる方法について解説しました．Excel は待ち行列に限らず，確率的な動作をするシステムを手軽にシミュレーションするのに便利なツールです．本稿で扱った実装例を参考に，より複雑なシステムのシミュレーションに挑戦していただけたら幸いです．

また，本稿では得られたシミュレーション結果について詳しく解説しませんでしたが，たとえば窓口の処理能力が施設内の混雑に与える影響を考察することができます．さらに，待ち行列理論を用いることにより，処理能力と混雑の理論的な関係を明らかにすることもできます．興味をもたれた方は是非，待ち行列理論（広くはオペレーションズ・リサーチ）について学んでみてください．

### 参考文献

[1] 高橋幸雄，森村英典，『混雑と待ち』，朝倉書店，2001.
[2] 大野勝久，逆瀬川浩孝，中出康一，『Excel で学ぶオペレーションズ・リサーチ』，近代科学社，2014.