協力ゲーム理論入門

岸本　信

本稿では，協力ゲーム理論の基礎である特性関数形ゲームとその代表的な解であるコア，仁，シャープレイ値について解説する．特性関数形ゲームおよびそれぞれの解について一般的な定義を与えるとともに，具体的な状況を特性関数形ゲームとして定式化し，定義した解を用いて分析することにより，それぞれの解の性質と関係性を考察する．また，最後に，特性関数形ゲーム以外の協力ゲーム理論の定式化を紹介する．

キーワード：特性関数形ゲーム，コア，仁，シャープレイ値

1. はじめに

ゲーム理論は大きく，非協力ゲーム理論と協力ゲーム理論に分けることができる．非協力ゲーム理論は，プレイヤー（当事者）たちがさまざまな目的を達成するために独自に行う合理的な行動を分析し，どのような結果が実現するかに主眼を置く．それに対して，協力ゲーム理論は，プレイヤー間で協力して行動することが許されており，協力することによって得られた便益をどのように分配すればよいか，または，分配すべきかが分析の中心となる．協力ゲーム理論は，経済学における市場の分析，政党による法案への投票の分析，さまざまな費用分担の分析などに応用されており，近年では，オークション理論やマッチング理論に代表されるマーケットデザインにも応用が盛んである．

本稿では，協力ゲーム理論の入門として，特性関数形ゲームによる定式化を紹介する．また，その定式化の下で，プレイヤー全員が協力して獲得した便益の分配方法について考察する．この便益の分配方法は解と呼ばれ，さまざまな考え方に基づいて定義されている．本稿では，応用上，最も用いられているコア，仁，シャープレイ値の 3 つの解を紹介し，具体例を用いながら，それぞれの解の性質や関係性について紹介する．

次節以降では，抽象的な数理モデルを用いて特性関数形ゲームとそれぞれの解の定義を紹介した後に，以下の 2 つの例を用いて，具体的に分析を行い，それぞれの解が持つ性質を考察する．

例 1. 同じ方向に家のある A, B, C の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅し，最後に下車した人が料金を支払い，翌日に皆で料金を精算することにした．その居酒屋からそれぞれの家にタクシーで直接帰宅した場合，A の家まで 1,800 円，B の家まで 2,100 円，C の家まで 2,900 円の料金がかかる．また，A の家から B の家までは 1,800 円，C の家までは 2,000 円であり，B と C の家の間は 2,300 円の料金が必要となる．最も安くなるルートで 3 人の家を回るとき，それぞれ，いくらずつタクシー料金を負担すればよいだろうか．

例 2. ある大学の研究室で新技術が開発されたが，大学だけでは実用化できないため，その新技術を実用化可能な 2 社の企業と交渉し，新技術の使用に関するライセンス契約を結ぶことで，大学は利益を得ようと考えている．現在は，この新技術を両企業とも使用していないため，各企業はそれぞれ 4,500 万円の利益を得ているが，両企業がその新技術を使用することによって両企業とも 7,500 万円の利益を得ることが見込まれている．しかし，一方の企業がその新技術を使用し，もう一方の企業が使用しない場合，新技術を使用する企業は市場で優位に立てるため，その企業は 1 億 2,000 万円の利益を獲得し，新技術を持たない企業は 1,500 万円しか利益を得られないと予想されている．このとき，大学は，両企業からいくらずつライセンス料を徴収し，この新技術によって得られる利益を両企業と分配すればよいだろうか．

2. 特性関数形ゲームと配分

n 人の当事者が協力して便益を分配する一般的な状況を分析するために，特性関数形ゲームの定義を与える．n 人のプレイヤー（当事者）の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする[1]．N の非空な部分集合を提携と呼ぶことにする．（N を特に全体提携と呼ぶ．）$\mathbb{R}$ を実数の集合と

きしもと　しん
千葉大学法政経学部
〒 263–8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1–33

[1] 各プレイヤーには，1 から n までの数字が割り振られており，その数字でどのプレイヤーかを特定するものとする．

した場合，N の部分集合の集合 2^N 上での実数値関数 $v: 2^N \to \mathbb{R}$ を特性関数と呼ぶ．各提携 $S\ (\subseteq N)$ に対して，$v(S)$ は提携 S のメンバーが協力することにより獲得できる便益を表す．（ただし，空集合 $\emptyset$ に対しては $v(\emptyset)=0$ とする．）プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を特性関数形ゲームと呼ぶ[2]．

上記の定義に従って，第 1 節で紹介した 2 つの例を特性関数形ゲームとして定式化する．例 1 では，当事者となるプレイヤーは A，B，C の 3 人なので，A，B，C をそれぞれプレイヤー 1，2，3 と対応させると，プレイヤーの集合は $N=\{1,2,3\}$ となる．次に特性関数 v であるが，この例では，分配するものがタクシー料金という費用であり，各プレイヤーにとって多く分配されることが望ましくないものである．これを各プレイヤーにとって多く分配されることが望ましい便益にするために，個別に支払う場合と比較して，協力することにより，どれだけの費用が節約されるかを考える．まず，全員で協力することによって節約される費用を考える．各プレイヤーが個別にタクシーに乗って帰宅した場合，それぞれ 1,800 円，2,100 円，2,900 円の費用が必要である．しかし，3 人が相乗りして帰宅することにより，居酒屋から $A \to B \to C$ の順にそれぞれの家を回ることで最も安い 1,800 + 1,800 + 2,300 = 5,900 円の料金を 3 人合わせて支払えばよい．（または，$B \to A \to C$ の順にそれぞれの家を回っても，料金は 5,900 円と最も安くなる．）したがって，全員で協力することで節約できる金額は 1,800 + 2,100 + 2,900 − 5,900 = 900 円となるため，$v(\{1,2,3\})=9$ となる．（単位は百円とする．）同様にして，A と B が相乗りして節約できる金額を考えると，$A \to B$ の順に家を回ることで 2 人合わせて最も安い 1,800 + 1,800 = 3,600 円を支払えばよい．したがって，節約できる料金は 1,800 + 2,100 − 3,600 = 300 円となるため，$v(\{1,2\})=3$ となる．また，A だけでタクシーを利用する場合は個別に支払う費用（1,800 円）と実際に支払う費用（1,800 円）が一致し，節約できる金額はゼロとなるため，$v(\{1\})=0$ となる．このようにして，各提携に対して節約される金額を求めると，例 1 では，以下のような特性関数 v となる．

$$v(\{1,2,3\})=9,\quad v(\{1,2\})=3,\quad v(\{2,3\})=6,$$
$$v(\{1,3\})=9,\quad v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$$

[2] 特性関数形ゲームは協力ゲーム理論における定式化の 1 つで，von Neumann and Morgenstern [1] によって与えられ，提携形ゲームとも呼ばれる．その他の協力ゲームの定式化については第 6 節で紹介する．

次に，例 2 を特性関数形ゲームとして定式化する．大学をプレイヤー 1，2 社の企業をそれぞれプレイヤー 2，3 とした場合，例 1 と同様に，プレイヤーの集合は $N=\{1,2,3\}$ となる．次に，特性関数 v は，単位を百万円としたとき，以下の通りに与えられる．

$$v(\{1,2,3\})=150,\quad v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=120,$$
$$v(\{2,3\})=90,\ v(\{1\})=0,\ v(\{2\})=v(\{3\})=15$$

大学（プレイヤー 1）のみでは何も利益を得られないため，$v(\{1\})=0$ となるが，片方の企業と協力することにより，協力した企業は新技術を使用し，1 億 2,000 万円の利益を獲得できるため，$v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=120$ となる．また，大学が 2 社と協力する場合は，両企業とも新技術を使用できるため，$v(\{1,2,3\})=75+75=150$ となる．一方で，1 社がライセンス交渉から降りた場合，新技術は交渉に残る 1 社にライセンスされるため，交渉から降りた企業の利益は $v(\{2\})=v(\{3\})=15$ となり，2 社とも交渉から降りた場合，両企業とも新技術を使えないため，$v(\{2,3\})=45+45=90$ となる．

上記の 2 つの例で定式化した特性関数 v は，次の優加法性と呼ばれる性質を満たしている．優加法性は，共通するメンバーがいない 2 つの提携が合流して行動したほうが，それぞれ独自に行動するよりも悪くならない（便益が低くならない）ことを表している．よって，全員で協力する場合が最も多くの便益を獲得できることを意味する．本稿では，優加法性を満たす特性関数のみを議論の対象とする．

定義 1． 特性関数 v が $S \cap T = \emptyset$ となる任意の提携 $S,T \subseteq N$ に対して $v(S \cup T) \geq v(S)+v(T)$ を満たすとき，特性関数 v は優加法的であるという．

協力ゲーム理論では，$v(N)$ の分配方法を解と呼び，多くの解は次に定義する配分の集合上で与えられる．x_i を任意の $i \in N$ に対してプレイヤー i の利得と呼び，分配した結果，プレイヤー i が獲得する便益を表す．また，各プレイヤーの利得を並べたベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ を利得ベクトルと呼ぶ．（ただし，$\mathbb{R}^n$ は n 次元の実数ベクトルの集合を表す．）このとき，配分は以下の通り定義される．

定義 2． 特性関数形ゲーム (N,v) において，利得ベクトル $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が次の 2 条件を満たすとき，x を配分という．

(1) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$
(2) 任意の $i \in N$ に対して，$x_i \geq v(\{i\})$

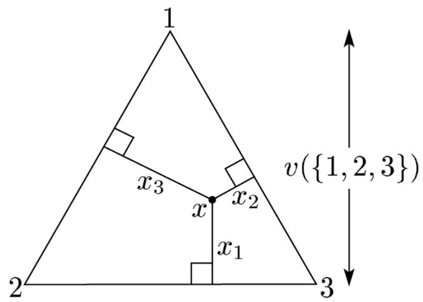

図 1　3 人ゲームの基本三角形

条件 (1) は全体合理性と呼ばれ，プレイヤー全員で $v(N)$ を全て分配していることを表している．一方で，条件 (2) は，各プレイヤーに分配される便益（利得）が自分 1 人だけで獲得できる便益を下回らないことを意味しており，個人合理性と呼ばれる．個人合理性が成り立たない場合，1 人で行動したほうが望ましいプレイヤーが存在するため，全員での協力が達成されなくなってしまう．特性関数形ゲーム (N, v) に対する配分の集合を $\mathcal{I}(v)$ と表すこととする．

本稿では，3 人のプレイヤーによる特性関数形ゲームを分析する際に，図 1 のように，高さ $v(\{1,2,3\}) > 0$ の正三角形内の点として全体合理性を満たす利得ベクトルを表現する．図 1 の点 x において，辺 23，辺 13，辺 12 上に下ろした垂線の長さをそれぞれ x_1, x_2, x_3 としたとき，この点 x は $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\})$ を満たす利得ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ を表す．

次節以降では，全員で協力した際に獲得できる便益 $v(N)$（それぞれの例における $v(\{1,2,3\})$）をどのようにプレイヤー間で分配するのかを考察する．

3.　コア

最初に，協力ゲーム理論による分析において最も用いられる解であるコアを紹介する．

定義 3.　次の配分の部分集合 $\mathcal{C}(v)$ を特性関数形ゲーム (N, v) におけるコアという．

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathcal{I}(v) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \neq \emptyset \text{ となる任意の } S \subseteq N \\ \text{に対して } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \end{array} \right\}$$

コアに含まれる配分が満たす条件は提携合理性と呼ばれ，個人合理性を提携に拡張した概念である．仮にある提携 $S \subseteq N$ が存在して $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$ が成り立つ場合，S 内のプレイヤーが協力して $v(S)$ を獲得し，その便益を自分たちだけで分配したほうが，S 内のプレイヤーにとって配分 x よりも多くの便益を得ることができる．つまり，コアに含まれる配分を分配方法として採用した場合，より多くの便益の獲得を目指して全体提携以外の提携を組み，採用されている配分よりもそのメンバーにとってより望ましい別の分配案をその提携内で実現しようとしても，そのような分配案は存在しないことを意味する[3]．どの提携も自分たちにとってより望ましい別の分配方法を提案できないという意味で，コアに含まれる配分は安定的と呼ばれる．

具体的に前節で特性関数形ゲームとして定式化した例を用いて，コアによる分析を行う．例 1 において，$x = (x_1, x_2, x_3)$ がコアに属する配分と仮定する．このとき，提携合理性と個人合理性より，

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 3, & x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 6, \\ x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 9, & x_i \geq v(\{i\}) = 0 \;\; \forall i \in N \end{array}$$

が成り立たなければならない．また，全体合理性より，$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 9$ を満たす．よって，上記の提携合理性と個人合理性の条件を合わせると，

$$0 \leq x_1 \leq 3, \;\; 0 \leq x_2 \leq 0, \;\; 0 \leq x_3 \leq 6 \qquad \text{(a)}$$

となるため，全体合理性の条件より，配分 $x^* = (3, 0, 6)$ のみが (a) の条件を満たす．したがって，例 1 におけるコアは $\mathcal{C}(v) = \{x^*\}$ の一点集合となる．（図 2 を参照．）

この結果，コアの考え方に従えば，A，B，C は 1 人で帰宅するよりも 3 人で相乗りすることにより，それぞれ 300 円，0 円，600 円だけタクシー代を節約することができる．よって，A，B，C はそれぞれ 1,800 − 300 = 1,500 円，2,100 − 0 = 2,100 円，2,900 − 600 = 2,300 円ずつタクシー代を負担することがコアの考え方に従った料金負担となる．

例 1 では，コアが一点集合となるため，コアの考え方に基づいた分配方法を 1 つだけ提示することができた．しかし，コアは必ずしも一点集合になるとは限らない．それを確かめるために，例 1 を少し変更した次の例を考察する．

例 3.　A，B，C の 3 人が居酒屋からタクシーに相乗りして帰宅することにした．居酒屋と 3 人の家は同じ国道沿いにあり，居酒屋から A，B，C の順に家があ

[3] 一般に，配分間の支配を定義した後に，コアは支配されない配分の集合として定義される．しかし，優加法性を満たす特性関数ゲームでは，提携合理性によって定義されたコアと支配されない配分の集合として定義されたコアは一致することが知られている．詳しくは，中山・船木・武藤 [2] を参照すること．

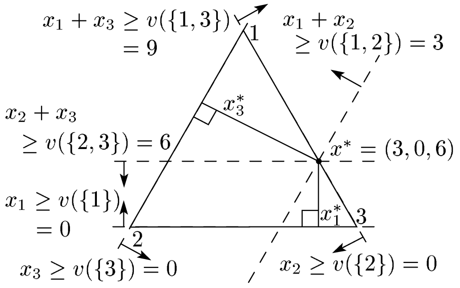

図 2　例 1 における 1 点集合のコア

るため，その居酒屋からそれぞれの家にタクシーで帰宅した場合，A の家まで 1,800 円，B の家まで 2,100 円，C の家まで 2,900 円の料金がかかる．最後に下車する C が料金を支払い，翌日に皆で精算する場合，それぞれ，いくらずつタクシー代を負担すればよいだろうか．

この例 3 を特性関数形ゲームとして定式化する．A, B, C をそれぞれプレイヤー 1，2，3 と対応させると，プレイヤーの集合は $N = \{1, 2, 3\}$ となる．また，特性関数 v も例 1 と同様に，個別に料金を支払う場合と比較して，協力することによってどれだけの料金が節約されるかを考えることにより，定義する．例えば，3 人が個別にタクシーで帰宅する場合，総額 1,800 + 2,100 + 2,900 = 6,800 円必要となるが，3 人で相乗りすることにより，C の家までの料金 2,900 円で済む．よって，節約される金額は 6,800 − 2,900 = 3,900 円となるため，$v(\{1, 2, 3\}) = 39$（単位は百円）となる．同様にして，全ての提携に対して節約される金額を求めると，以下の特性関数 v となる．

$$v(\{1,2,3\}) = 39,\quad v(\{1,2\}) = 18,\quad v(\{2,3\}) = 21,$$
$$v(\{1,3\}) = 18,\quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

例 1 における分析と同様にして，例 3 における特性関数形ゲームのコアを求めると，

$$0 \leq x_1 \leq 18,\quad 0 \leq x_2 \leq 21,\quad 0 \leq x_3 \leq 21 \qquad \text{(b)}$$

を満たす配分 $x = (x_1, x_2, x_3)$ がコアに属する配分となり，図 3 より，そのような配分は数多く存在する．そのため，例 3 の状況では，コアの考え方だけでは，分配方法を 1 つに絞ることができない．

また，必ずしもコアに含まれる配分が存在する（コアが非空になる）とは限らない．例 2 におけるコアを考えたとき，$x = (x_1, x_2, x_3)$ がコアに属する配分とすると，2 人提携による提携合理性より，

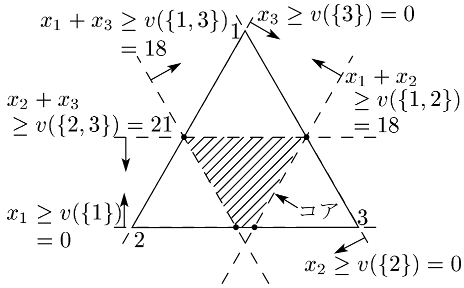

図 3　例 3 におけるコアの領域

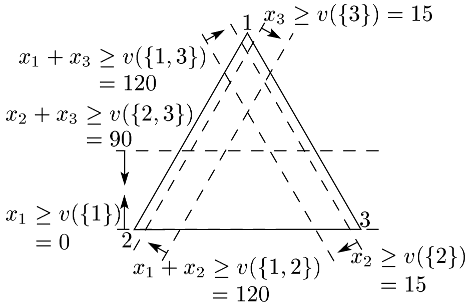

図 4　例 2 におけるコア（空集合）

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 120,$$
$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 90,$$
$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 120$$

が成り立つ．しかし，この 3 つの式を全て加えると，

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 165$$

が成り立つため，全体合理性の条件 $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 150$ に矛盾する．したがって，例 2 においてコアは空集合となる（図 4 を参照）．

コアに含まれる配分は，いかなるプレイヤーと協力して今よりも多くの便益を獲得しようとしても，そのようなことはできないという意味で，プレイヤー全員がその配分に対して異議を唱えられない分配方法である．しかし，コアによる分配方法は，1 つ以上存在する可能性や，全く存在しない可能性がある[4]．

4. 仁

コアを用いた分析で示した通り，コアは大きな領域になることもあり，空集合になることもある．そのため，具体的な便益の分配方法が 1 つ必要な状況では，

[4] コアが必ず非空となる特性関数形ゲームが満たす必要十分条件は平衡性と呼ばれ，Bondareva [3] および Shapley [4] によって明らかにされた．詳細は中山・船木・武藤 [2] を参照すること．

コアによる分析では不十分になる場合がある．そこで，本節では，コアの考え方を生かしながら，便益の分配方法が必ず1つに定まる解である仁を紹介する．

特性関数形ゲーム (N, v) において，任意の配分 $x \in \mathcal{I}(v)$ と任意の提携 $S \subseteq N$ に対して，配分 x に関する提携 S の不満 $e(S, x)$ を $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ と定義する．$e(S, x)$ は，（特に $e(S, x) > 0$ となるときに）提携 S が配分 x に対して持つ不満の量を表すと解釈できるため，定義3より，コアはいかなる提携も不満を持たない配分の集合とも解釈できる．任意の配分 $x \in \mathcal{I}(v)$ に対して，各提携 $S \subseteq N$ の不満 $e(S, x)$ を大きいものから順に並べたベクトルを $\theta(x)$ とする．ただし，$\theta(x)$ は，全体提携 N と空集合 $\emptyset$ に対する不満を除く $2^n - 2$ 次元のベクトルとする．$\geq_{lex}$ を $2^n - 2$ 次元の実数ベクトルの集合 $\mathbb{R}^{2^n-2}$ における辞書式順序とした場合，仁は以下のように定義される[5]．

定義 4. 任意の $y \in \mathcal{I}(v)$ に対して $\theta(y) \geq_{lex} \theta(x)$ を満たす配分 x の集合を特性関数形ゲーム (N, v) における仁という．

仁は Schmeidler [5] によって考えられた解であり，必ず1点集合（ただ1つの配分）になることが知られている．よって，これ以後では，仁に含まれるただ1つの配分を特性関数形ゲーム (N, v) における仁と呼び，その配分を $\eta(v) = (\eta_1(v), \eta_2(v), \ldots, \eta_n(v))$ で表す．

定義4より，仁は全ての配分の中で最大の不満が最小になる配分となる．さらに，そのような配分が複数ある場合は2番目に大きな不満も最小となる配分でなければならず，同様にして，そのような配分も複数ある場合は3番目に大きな不満が最小 $\cdots$ という性質を持つ配分である．また，$\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$ ならば $\eta(v) \in \mathcal{C}(v)$ が成り立つ[6]．つまり，仁となる分配方法は，必ず1つだけ存在し，最大の不満を最小にするという観点からプレイヤー（当事者）たちを納得させ，コアが非空である場合には安定的なものとなる．

コアが空集合となる例2における仁を求める．任意の配分 $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して，各2人提携と各1人提携の x に関する不満は以下の通り与えられる．

$$
\begin{aligned}
&e(\{1,2\}, x) = v(\{1,2\}) - x_1 - x_2 = 120 - x_1 - x_2,\\
&e(\{2,3\}, x) = v(\{2,3\}) - x_2 - x_3 = 90 - x_2 - x_3,\\
&e(\{1,3\}, x) = v(\{1,3\}) - x_1 - x_3 = 120 - x_1 - x_3,\\
&e(\{1\}, x) = v(\{1\}) - x_1 = -x_1\\
&e(\{i\}, x) = v(\{i\}) - x_i = 15 - x_i \quad \forall i = 2, 3
\end{aligned}
$$

全体合理性の条件 $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 150$ を用いて，2人提携の不満を書き換えると，

$$
\begin{aligned}
&e(\{1,2\}, x) = x_3 - 30, \quad e(\{2,3\}, x) = x_1 - 60,\\
&e(\{1,3\}, x) = x_2 - 30
\end{aligned}
$$

となる．仁は最大の不満を最小にする配分であるため，上記の6つの提携の不満が，ある値 M 以下であるとし，配分 x と M を変数として M を最小にすることを考えればよい．つまり，以下の線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\min M\\
&\text{s.t.} \ -M \leq x_1 \leq M + 60,\\
&\qquad -M + 15 \leq x_2 \leq M + 30,\\
&\qquad -M + 15 \leq x_3 \leq M + 30,\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 150,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 15,\ x_3 \geq 15
\end{aligned}
$$

この線形計画問題において，制約条件を満たす x_1, x_2, x_3 が存在するためには，最初の3つの不等式と個人合理性より，$-M \leq M + 60 \Leftrightarrow M \geq -30$，$-M + 15 \leq M + 30 \Leftrightarrow M \geq -7.5$，$0 \leq M + 60 \Leftrightarrow M \geq -60$,$15 \leq M + 30 \Leftrightarrow M \geq -15$ が成り立つ必要がある．また，最初の3つの不等式と全体合理性（4つ目の式）より，$-3M + 30 \leq x_1 + x_2 + x_3 = 150 \leq 3M + 120 \Leftrightarrow M \geq -40$ かつ $M \geq 10$ となる．よって，これら全ての条件を満たす M の最小値は10となり，$M = 10$ を制約条件の不等式に代入することにより，制約条件は $0 \leq x_1 \leq 70$，$15 \leq x_2 \leq 40$，$15 \leq x_3 \leq 40, x_1 + x_2 + x_3 = 150$ となるため，$M = 10$ は $x_1 = 70, x_2 = x_3 = 40$ のみで達成される．したがって，例2における仁は $\eta(v) = (70, 40, 40)$ となる．つまり，仁の考え方に従えば，大学は7,000万円，両企業は共に4,000万円の利益を得ることになるため，大学は各企業からそれぞれ $7{,}500 - 4{,}000 = 3{,}500$ 万円のライセンス料を徴収することになる．このように，コアが空集合である場合でも，仁は必ず存在する．

例2と同様の方法で，例3における仁を求めると $\eta(v) = (11, 14, 14)$ となる．（読者自身で確認してもらいたい．）この仁 $\eta(v) = (11, 14, 14)$ は (b) の条件を満たすため，コアに含まれることがわかる．よって，仁の考え方に従えば，A，B，C が協力することにより，それぞれ1,100円，1,400円，1,400円のタクシー代が節約されることを表す配分をコアの中から選ぶことが

[5] 任意の $x, y \in \mathbb{R}^{2^n-2}$ に対して，$x = y$，または，ある整数 l が存在して $1 \leq l \leq 2^n - 2$ かつ任意の $k = 1, 2, \ldots, l-1$ に対して $x_k = y_k$ かつ $x_l > y_l$ が成り立つとき，$x \geq_{lex} y$ となる．

[6] この性質より，例1におけるコアは1点集合であるため，仁は $\eta(v) = x^* = (3, 0, 6)$ となる．

できる．ゆえに，A，B，C はそれぞれ 1,800 − 1,100 = 700 円，2,100 − 1,400 = 700 円，2,900 − 1,400 = 1,500 円ずつタクシー代を負担することが例 3 において仁の考え方に従った料金の負担となる．

例 2 では，最大不満を最小化するための線形計画問題を 1 度解くことによって仁を求めることができた．一般に，n 人のプレイヤーによる特性関数形ゲームでは，最大不満を最小化するための線形計画問題を解き，最小となる最大不満を実現する配分が複数ある場合は，さらに，その配分の中で 2 番目に大きな不満を最小化するための線形計画問題を解くというように，仁を求めるために，何度（最大 $n-1$ 回）も線形計画問題を解く必要がある．しかし，このように線形計画問題を繰り返し解くことにより，どのような特性関数形ゲームであっても必ず仁を求めることができる[7]．

5. シャープレイ値

3 つ目の解として，提携に対するプレイヤーの貢献度に応じて便益を分配する解を紹介する．この解は，Shapley [7] によって定義されたため，シャープレイ値と呼ばれる．任意の $i \in N$ と任意の部分集合 $S \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ を S に対するプレイヤー i の限界貢献度と呼ぶ[8]．これは，プレイヤー i が S に加わることによって，獲得できる便益が $v(S)$ から $v(S \cup \{i\})$ に変化するため，その差はプレイヤー i が S に加わることによって生じる追加的な貢献度と解釈できる．この限界貢献度を用いて，シャープレイ値は以下の通りに定義される．

定義 5. 任意の部分集合 $S \subseteq N$ に対して S の要素数 $|S|$ を s とする．（$S = \emptyset$ ならば $s = 0$.）そのとき，次の式で与えられるプレイヤー i $(\in N)$ の利得 $\phi_i(v)$ を特性関数形ゲーム (N, v) におけるプレイヤー i のシャープレイ値という．

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

また，全てのプレイヤーのシャープレイ値を並べたベクトル $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots, \phi_n(v))$ を特性関数形ゲーム (N, v) におけるシャープレイ値という．

特性関数形ゲーム (N, v) において，プレイヤーが 1 人ずつ加わり，全体提携が形成される状況を考える．全体提携への形成過程は $n!$ 通りあり，それが全て等確率で起こるとした場合，各プレイヤーの全体提携への形成過程における限界貢献度の期待値がそのプレイヤーのシャープレイ値となる[9]．定義 5 ではシャープレイ値 $\phi(v)$ が配分であることは仮定されていない．しかし，$\phi(v)$ は必ず全体合理性を満たし，優加法性を満たす特性関数形ゲームでは個人合理性も満たすことが容易に確かめられるため，本稿では配分として扱う．

例 3 におけるシャープレイ値を求める．例 3 では，プレイヤー数は 3 人なので，1 人ずつ加わり，全体提携が形成される過程は 6 通りある．その各形成過程において，各プレイヤーの限界貢献度は表 1 の通りとなる．表 1 において，第 1 列は全体提携の形成過程を表し，例えば，$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ は，プレイヤー 1，2，3 の順番で加わり，全体提携が形成されることを表している．第 2 列から第 4 列までは各プレイヤーの限界貢献度を表し，$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ の形成過程においてプレイヤー 1 の限界貢献度は $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$，プレイヤー 2 の限界貢献度は $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 18$，プレイヤー 3 の限界貢献度は $v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 21$ となる．

表 1 より，例 3 における各プレイヤーのシャープレイ値は，$\phi_1(v) = (18 \cdot 4)/6 = 12$，$\phi_2(v) = \phi_3(v) = (18 + 21 \cdot 3)/6 = 13.5$ となる．したがって，例 3 において，シャープレイ値の考え方に従った場合，A，B，C はそれぞれ 1,800 − 1,200 = 600 円，2,100 − 1,350 = 750 円，2,900 − 1,350 = 1,550 円ずつタクシー代を負担することになる．

このシャープレイ値による料金の負担は，次のように解釈することもできる．居酒屋から A の家までは 3 人ともタクシーに乗車するため，A の家までの料金 1,800 円を 3 人で割り，1 人当たり 600 円ずつ支払う．A の家から B の家までは，B と C の 2 人しか乗車しないため，A と B の家の間の料金 2,100 − 1,800 = 300 円を 2 人で割り，B と C で 150 円ずつ支払う．B の家から C の家までは，C しか乗車しないため，B と C の家の間の料金 2,900 − 2,100 = 800 円は C のみが支払う．この分配方法によって，A，B，C がそれぞれ支払う料金は，600 円，600 + 150 = 750 円，600 + 150 + 800 = 1,550 円となり，シャープレイ値による料金の分担方法と一致することがわかる．例 3 におけ

[7] 詳細は，Maschler et al. [6] を参照すること．
[8] ここで考える S は提携ではなく部分集合であるため，$S = \emptyset$ の場合も含む．
[9] シャープレイ値はもともと，Shapley [7] によって公理系から導出された解である．公理とは，特性関数形ゲームの分配方法（利得ベクトル）として満たすことが望ましい性質を意味し，シャープレイ値はさまざまな公理によって特徴づけられている．公理系からの導出についての詳細は中山・船木・武藤 [2] を参照すること．

表 1 例 3 における各プレイヤーの限界貢献度

全体提携の形成過程	各プレイヤーの限界貢献度		
	1	2	3
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	0	18	21
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	0	21	18
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	18	0	21
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	18	0	21
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	18	21	0
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	18	21	0
シャープレイ値 $\phi(v)$	12	13.5	13.5

表 2 例 1 における各プレイヤーの限界貢献度

全体提携の形成過程	各プレイヤーの限界貢献度		
	1	2	3
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	0	3	6
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	0	0	9
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	3	0	6
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	3	0	6
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	9	0	0
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	3	6	0
シャープレイ値 $\phi(v)$	3	1.5	4.5

る特性関数形ゲームは，空港ゲームと呼ばれる種類の特性関数形ゲームであり，空港ゲームではシャープレイ値が上記の分配方法と一致することが知られている．(空港ゲームについては，中山 [8] を参照すること．)

また，このシャープレイ値 $\phi(v) = (12, 13.5, 13.5)$ は，(b) の条件を満たすため，コアに含まれる安定的な配分であることもわかる．しかし，必ずしもシャープレイ値はコアに含まれるとは限らない．それを確かめるために，例 1 におけるシャープレイ値を考える．例 3 と同様にして，全ての全体提携への形成過程における各プレイヤーの限界貢献度は表 2 にまとめられるため，例 1 におけるシャープレイ値は $\phi(v) = (3, 1.5, 4.5)$ となる．しかし，例 1 におけるコアは図 2 より，配分 $x^* = (3, 0, 6)$ のみの 1 点集合である．したがって，$\phi(v) \neq x^*$ より，シャープレイ値は必ずしもコアに含まれるとは限らないことがわかる．

シャープレイ値とコアの包含関係については，さまざまな研究が行われているが，ここでは Shapley [9] による凸ゲームの研究を紹介する．

定義 6. 特性関数形ゲーム (N, v) において，任意のプレイヤー $i \in N$ とプレイヤー i を含まない任意の部分集合 $S, T \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して，$T \subseteq S$ ならば，

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \leq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

が成り立つとき，(N, v) を凸ゲームという．

凸ゲームは，各プレイヤーにとって，加わる提携の規模が大きくなるほど，限界貢献度も大きくなることを意味している[10]．Shapley [9] により，特性関数形ゲーム (N, v) が凸ゲームであるとき，シャープレイ値 $\phi(v)$ は必ずコア $\mathcal{C}(v)$ に含まれる $(\phi(v) \in \mathcal{C}(v))$ ことが示された．実際，例 3 における特性関数 v は定義 6 の条件を満たす．したがって，例 3 で定式化した特性関数形ゲームは凸ゲームであるため，シャープレイ値がコアに含まれる結果となる．

[10] Shapley [9] における凸ゲームの定義は，任意の部分集合 $S, T \subseteq N$ に対して $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$（$v$ が優モジュラ関数）で与えられる．本稿で与えている定義は，Shapley [9] における定義と同値である．

6. その他の協力ゲームの定式化と解概念

本稿では，協力ゲーム理論の基礎である特性関数形ゲームによる定式化とその代表的な解であるコア，仁，シャープレイ値を紹介した．特性関数形ゲームでは，この他にも多くの解が考えられている．配分の安定性の考え方に基づいて定義された解として，安定集合 (von Neumann and Morgenstern [1]) や交渉集合 (Aumann and Maschler [10]) などがあり，提携の不満の考え方に基づいて定義された解として，カーネル (Davis and Maschler [11]) などがある．

また，本稿で紹介した例では，各プレイヤーの効用（満足度）を料金の節約額や利益という貨幣額そのもので与え，その貨幣の受け渡しがプレイヤー間で自由にできる状況を考察した．このように，各プレイヤーの効用が貨幣などのやり取りを通してプレイヤー間で譲渡できるとき，各プレイヤーは譲渡可能な効用 (transferable utility) を持つといい，本稿で紹介した特性関数形ゲームは，譲渡可能な効用を仮定しているため，TU ゲームと呼ばれる．一方で，譲渡可能な効用を仮定しない特性関数形ゲームを NTU (non-transferable utility) ゲームと呼ぶ．この NTU ゲームは，TU ゲームの拡張として捉えることができるため，本稿で紹介した解（コア・仁・シャープレイ値）も NTU ゲームに拡張され，経済学などでみられる譲渡可能な効用では扱うことができない状況の分析に応用されている．

この他にも，協力ゲーム理論ではさまざまな定式化が考えられている．例えば，例 2 では，全員で協力して得た利益を分け合う状況のみを考察したが，新技術を持つ大学は，1 社の企業とのみライセンス契約を結び，

利益を分配したほうが，望ましいかもしれない．このような全員での協力を前提としない状況を扱う定式化として，提携構造を持つ特性関数形ゲームがある．さらに，例 2 では，一方の企業が交渉から降りた場合，交渉に残る 1 社に新技術がライセンスされるため，交渉から降りた企業が獲得する便益を $v(\{i\}) = 15$ $(i = 2, 3)$ と定義した．しかし，一方の企業が交渉から降りた場合，もう一方の企業も交渉から降りる可能性もあり，そのときには先に交渉から降りた企業が獲得する便益は $v(\{i\}) = 45$ $(i = 2, 3)$ となるかもしれない．このように，提携（例 2 では 1 人提携）を組むことで獲得できる便益が，自分たちの提携だけではなく，他のプレイヤーたちがどのような提携を組むのかによっても影響を受ける状況を分析する分割関数形ゲームと呼ばれる定式化もある．また，非協力ゲーム理論の枠組みで扱われる戦略形ゲームにおいて，提携を組み，プレイヤー間の協力行動を許す戦略形協力ゲームと呼ばれる定式化もあり，分析する状況に応じて，さまざまな定式化を行うことができる．

上記で紹介したそれぞれの定式化において，既存の解を拡張して分析が行われたり，その定式化の特徴を生かし，新たな考え方に基づいた解が定義されたりするなど，現在も盛んに研究が行われている．

7. 終わりに

ここまで読み，協力ゲーム理論に興味を持ち，さらなる理解を深めたい読者のために，いくつかの書籍を紹介して，本稿を閉じたいと思う．まず，本稿の脚注の中で何度か紹介したが，中山・船木・武藤 [2] は協力ゲーム理論を包括的に解説した和書である．洋書では，Peleg and Sudhölter [12] が挙げられ，中山・船木・武藤 [2] と内容が共通する部分も多い．しかし，中山・船木・武藤 [2] は戦略形協力ゲームについて詳細に解説しているのに対して，Peleg and Sudhölter [12] では，提携構造を持つ特性関数形ゲームと解の公理化について詳しく解説されている．中山 [8] は，応用例を豊富に用いて，協力ゲーム理論の定式化や解の考え方を基礎から説明し，中山・船木・武藤 [2] では扱っていないトピックもカバーしている．また，応用に特化した書籍として，中山・武藤・船木 [13] と船木・武藤・中山 [14] が挙げられる．この 2 つの書籍は，協力ゲーム理論のみならず，ゲーム理論全般をさまざまな状況に応用し，その分析結果に関する含意を考察している．協力ゲーム理論が現実問題にどのように応用できるかに興味がある読者には，おすすめの書籍である．

参考文献

[1] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1st ed., Princeton University Press, 1944. (2nd ed., 1947, 3rd ed., 1953.)

[2] 中山幹夫，船木由喜彦，武藤滋夫，『協力ゲーム理論』，勁草書房，2008.

[3] O. Bondareva, “Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games,” *Problemy Kybernetiki*, **10**, pp. 119–139, 1963. (in Russian)

[4] L. S. Shapley, “On balanced sets and cores,” *Naval Research Logistics Quarterly*, **14**, pp.453–460, 1967.

[5] D. Schmeidler, “The nucleolus of a characteristic function game,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*,” **17**, pp. 1163–1170, 1969.

[6] M. Maschler, B. Peleg and L. S. Shapley, “Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts,” *Mathematics of Operations Research*, **4**, pp.303–338, 1979.

[7] L. S. Shapley, “A value for n-person games,” *Contributions to the Theory of Games II*, H. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Princeton University Press, pp. 307–317, 1953.

[8] 中山幹夫，『協力ゲームの基礎と応用』，勁草書房，2012.

[9] L. S. Shapley, “Cores of convex games,” *International Journal of Game Theory*, **1**, pp. 11–26, 1971.

[10] R. J. Aumann and M. Maschler, “The bargaining set for cooperative games,” *Advances in Game Theory*, M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker (eds.), Princeton University Press, pp. 443–476, 1964.

[11] M. Davis and M. Maschler, “The kernel of a cooperative game,” *Naval Research Logistics Quarterly*, **12**, pp. 223–259, 1965.

[12] B. Peleg and P. Sudhölter, *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, 2nd ed., Springer-Verlag, 2008. (1st ed., 2003.)

[13] 中山幹夫，武藤滋夫，船木由喜彦（編），『ゲーム理論で解く』，有斐閣，2000.

[14] 船木由喜彦，武藤滋夫，中山幹夫（編著），『ゲーム理論 アプリケーションブック』，東洋経済新報社，2013.

