無秩序の代償と安定性の代償

河瀬　康志，牧野　和久

ゲーム理論の非協力ゲームと呼ばれる分野では，「均衡」に関する研究が盛んに行われている．この均衡は，社会的に最適な状況とは限らない．このような均衡の非効率性を測る定量的な指標として，「無秩序の代償」と「安定性の代償」が提案されている．本稿では，これら 2 つの非効率性の指標を，ネットワークデザインゲームを通して紹介する．

キーワード：アルゴリズム論的ゲーム理論，無秩序の代償，安定性の代償，ネットワークデザインゲーム，ポテンシャルゲーム

1. はじめに

1920 年に経済学者の Pigou により考察された図 1 の単純なネットワークを例にとり，利己的な振る舞いにはいかに無駄があるかを見てみよう．図 1 では，頂点 s から頂点 t まで 2 通りの経路がある．上の経路は，遠回りして長いが，道幅が広いため，交通量にかかわらず 1 時間で頂点 s から頂点 t まで通行可能である．一方，下の経路は短いが，道幅が狭いため，交通量が増えるほど通行に時間を要する．交通量が x のとき，通行に x 時間かかるとしよう．今，頂点 s から頂点 t まで総量 1 の移動要求があるとする．例えば 1 単位 100 人として，100 人が同時に s から t まで移動しようとしているとする．このとき，あなたならばどちらの経路を選ぶだろうか．

人々が利己的な判断をするならば，全員が細くて短い下の経路を選ぶであろう．なぜならば，2 つの経路の交通量がどのようになっても，すなわち，自分以外の 99 人がどのような経路を選んだとしても，下の経路はたかだか 1 時間で通行でき，上の経路の通行時間（1 時間）以下となるからである．このように全員が下の経路を選択したとき，各人は通行に 1 時間要し，平均所用時間（社会的コスト）は 1 時間となる．

一方，総量の半分（例えば 100 人中 50 人）が上の経路を，残りの半分が下の経路を選択したとする．上の経路を通る人のかかる時間は 1 時間のままであるが，下の経路を通る人は 0.5 時間（30 分）で通過できるようになる．平均所用時間では $1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$ 時間（45 分）となり，利己的な振る舞いにより全員が下の経路を選択する場合から，大きく状況が改善する．このように，人々が利己的に行動することは，社会にとって必ずしも最適ではない．（厳密な議論は後で行う．）

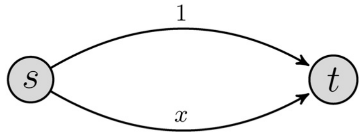

図 1　単純なネットワークの例

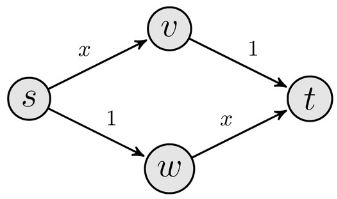

図 2　はじめのネットワーク

次に図 2 のネットワークを考えよう．頂点 s から頂点 t まで総量 1 の移動要求があり，上の経路 $s \to v \to t$ と下の経路 $s \to w \to t$ 共に，通行量を x とすると，通行に $1 + x$ 時間要する．この状況で，人々が利己的に行動する場合，それぞれの経路の通行量は 0.5 ずつとなり，各人の通行に $1 + 0.5 = 1.5$ 時間要する．ここで，利己的な振る舞いによって，各人が自分の利用経路の変更により得をしないという均衡状態になることを仮定している．この例では，上下の経路を 0.5 ずつ利用する状態においては，どの個人が自分の経路を変更しても通行時間は短縮しない．また，この例においては，（x を連続量とすると）それ以外の均衡状態は存在しない．この状況下で，図 3 のように，頂点 v か

かわせ　やすし
東京工業大学大学院社会理工学研究科
〒 152–8552 東京都目黒区大岡山 2–12–1
まきの　かずひさ
京都大学数理解析研究所
〒 606–8502 京都府京都市左京区北白川追分町

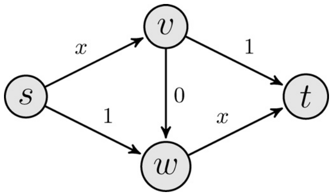

図 3　新しくトンネルを建設した後のネットワーク

表 1　各経路の所要時間

経路	通行量	所要時間
$s \to v \to w \to t$	α	$(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)$
$s \to v \to t$	β	$(\alpha+\beta)+1$
$s \to w \to t$	γ	$1+(\alpha+\gamma)$

ら頂点 w に向かうトンネル（道）を新しく建設したとする．実は頂点 v と頂点 w はとても近く，トンネルを建設したことにより，時間をかけずに（所要時間 0 で）頂点 v から頂点 w まで移動が可能になったとしよう．これにより，$s \to v \to w \to t$ という新しい経路で，頂点 s から頂点 t へ移動が可能になる．このとき，新しい経路 $s \to v \to w \to t$ は他の 2 つの経路よりいつでも損をせず，全員がこの新しい経路を選択することとなる．より正確には，経路 $s \to v \to w \to t$, $s \to v \to t$，$s \to w \to t$ にそれぞれ α，β，γ の通行量があるとすると $(\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha,\beta,\gamma \geq 0)$，所要時間はそれぞれ $(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)$，$(\alpha+\beta)+1$, $1+(\alpha+\gamma)$ となる（表 1）．$\alpha+\beta \leq 1$，$\alpha+\gamma \leq 1$ であるので，新しい経路の通行時間が最小となる．したがって，全員が新しい経路を用いるという状態が均衡となる．また，（x を連続量とすると）それ以外に均衡がないとわかる．このとき，各人の所要時間は 2 時間となり，新しく道を建設したにもかかわらず，建設前の所要時間 1.5 時間より全員が損をする結果（所要時間 2 時間）となってしまった．これは，Braess のパラドックスと呼ばれ，人々が利己的に行動するとき，新しく道をつくることで余計に混雑が発生し，さらに状況が悪化する場合があることを示している．

このように，人々が利己的に行動することで達成される状態（均衡解）は，社会的に最適な状況（社会的最適解）に比べ非効率なものになっている．本稿では，この非効率さがどの程度のものなのか，定量的な評価について紹介する．特に「無秩序の代償」と「安定性の代償」という 2 つの非効率さの指標を紹介する．

このような内容はアルゴリズム論とゲーム理論の融合領域であるアルゴリズム論的ゲーム理論という文脈で近年盛んに研究されている．このことは，例えば，アルゴリズム論的ゲーム理論の創始者たち 6 人 (Koutsoupias, Papadimitriou, Nisan, Ronen, Roughgarden, Tardos) が，その功績により 2012 年の Gödel 賞を受賞していることからもわかる．

2.　均衡の非効率さの指標

本節では，均衡解における社会的コストがどの程度非効率になりうるかを解析するための指標を導入する．

プレイヤー集合 N，プレイヤー $i \in N$ の取りうる戦略集合 A_i，プレイヤー $i \in N$ のコスト $\mathrm{cost}_i : \prod_{i \in N} A_i \to \mathbb{R}_+$ の 3 つ組 $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{\mathrm{cost}_i\}_{i \in N})$ を標準型ゲームという．本稿ではプレイヤー集合 N と各プレイヤーの戦略集合 A_i $(i \in N)$ が共に有限である有限ゲームを扱う．ここで，$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．$A = \prod_{i \in N} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ を戦略空間という．

各プレイヤーが利己的に動いた結果，ナッシュ均衡という戦略の組に至るとする．ナッシュ均衡とは，どのプレイヤーも自分の戦略を変えることで，自分のコストを削減できないような戦略の組である．すなわち，戦略の組 $a \in A$ は

$$\mathrm{cost}_i(a) \leq \mathrm{cost}_i(a'_i, a_{-i}) \quad (\forall i \in N,\ \forall a'_i \in A_i)$$

を満たすとき，ナッシュ均衡と呼ばれる．ここで，a_{-i} は戦略の組 a からプレイヤー i の戦略を除くことによりできるベクトル $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ である．一般に，ナッシュ均衡は存在するとは限らず，存在しても複数存在するかもしれない．今後，ナッシュ均衡の集合を A_{Nash} と記す．

戦略の組 a での社会的コスト $\mathrm{cost}(a)$ は，総コスト $\sum_{i \in N} \mathrm{cost}_i(a)$ によって定義する[1]．ナッシュ均衡の非効率さは，均衡の社会的コストと最適な社会的コスト $\min_{a \in A} \mathrm{cost}(a)$ を比較することにより評価される．ただし，ナッシュ均衡は一般に複数個存在するので，どのナッシュ均衡を考えるかにより複数の指標が考えられる．

定義 2.1（Koutsoupias–Papadimitriou [1], Roughgarden–Tardos [2]）**.**　ナッシュ均衡における最悪な社会的コストと（戦略の組の中で）最適な社会的コストの比

$$\frac{\max_{a \in A_{\mathrm{Nash}}} \mathrm{cost}(a)}{\min_{a \in A} \mathrm{cost}(a)}$$

[1] 社会的コストとして，最大コスト $\max_{i \in N} \mathrm{cost}_i(a)$ などを用いることもある．

を無秩序の代償 (Price of Anarchy) という.

定義 2.2 (Schulz–Moses [3], Anshelevich ら [4]). ナッシュ均衡における最適な社会的コストと(戦略の組の中で)最適な社会的コストの比

$$\frac{\min_{a \in A_{\mathrm{Nash}}} \mathrm{cost}(a)}{\min_{a \in A} \mathrm{cost}(a)}$$

を安定性の代償 (Price of Stability) という.

無秩序の代償は, どの均衡が達成されるかわからない場合に, 最悪の場合でもどの程度の非効率さなのかを表す. 安定性の代償は, どの均衡が達成されるかが操作できる場合に, どの程度まで非効率性を抑えることができるかを示す.

これらの指標は常に 1 以上の値をとり, 大きいほど非効率であるといえる. 指標が 1 の場合は, 社会的最適解が均衡においても達成できることを意味する.

特に, ゲーム集合に対して, 最悪の場合に指標がどの程度大きくなるかを上限により評価する. 例えば, ゲーム集合 $\mathcal{G}$ に対する無秩序の代償は

$$\sup_{G \in \mathcal{G}} \frac{\max_{a \in A_{\mathrm{Nash}}(G)} \mathrm{cost}(a)}{\min_{a \in A(G)} \mathrm{cost}(a)}$$

となる. ただし, $A(G), A_{\mathrm{Nash}}(G)$ はそれぞれゲーム G における戦略空間と Nash 均衡の集合とする. これにより, 具体的なゲームの形がわからない場合についても非効率さを議論することができ, 社会システムの保証などが可能になる.

3. ポテンシャルゲーム

本節では Monderer と Shapley [5] により提案された, ポテンシャルゲームと呼ばれる標準型ゲームを紹介する. 標準型ゲーム $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{\mathrm{cost}_i\}_{i \in N})$ がポテンシャルゲームであるとは, 以下の条件を満たす関数 $\Phi : A \to \mathbb{R}$ が存在することである.

> 任意の戦略の組 $a \in A$, プレイヤー $i \in N$ とその戦略 $a'_i \in A_i$ について,
>
> $$\Phi(a) - \Phi(a'_i, a_{-i}) = \mathrm{cost}_i(a) - \mathrm{cost}_i(a'_i, a_{-i}).$$

ここで, Φ はポテンシャル関数と呼ばれる. 上の式は, プレイヤー i の戦略変更による i 自身のコスト変化が, プレイヤーに依存しない 1 つの関数 Φ によって表現できることを意味する.

ポテンシャル関数は均衡解析のための有用な道具となる. 例えば, 以下のような定理を示すことができる. ただし, 本稿では有限ゲームのみを扱っていることに注意されたい.

定理 3.1. ポテンシャルゲームはナッシュ均衡をもつ. 特にポテンシャル最小の戦略の組はナッシュ均衡となる.

証明. ポテンシャル最小の戦略の組を $a^* \ (\in \arg\min_{a \in A} \Phi(a))$ とすると, 任意のプレイヤー $i \in N$ とその戦略 $a_i \in A_i$ について,

$$\mathrm{cost}_i(a^*) - \mathrm{cost}_i(a_i, a^*_{-i}) = \Phi(a^*) - \Phi(a_i, a^*_{-i}) \leq 0$$

が成立するので, a^* はナッシュ均衡となる. □

なお, 定理 3.1 におけるポテンシャルの最小性は極小性(局所最適性)で置き換えることができる.

定理 3.2. ポテンシャルゲームにおいては, 各プレイヤーが順に自分のコストを小さくするよう戦略変更を繰り返すことで, ナッシュ均衡を達成できる.

証明. プレイヤーが自分のコストを小さくするよう戦略変更を繰り返すことによって得られる戦略の組の列を $(a^0, a^1, \dots)$ とする. i 回目に戦略変更したプレイヤーを $k \in N$ とすると, $\mathrm{cost}_k(a^i) < \mathrm{cost}_k(a^{i-1})$, $a^i_j = a^{i-1}_j \ (\forall j \in N \setminus \{k\})$ が成立する. したがって, ポテンシャル関数 Φ について $\Phi(a^0) > \Phi(a^1) > \cdots$ が成立するが, A は有限であるので, いずれ誰も戦略を変更できなくなる. 最終的に得られた(すなわち, 誰も戦略変更できない)組がナッシュ均衡である. □

4. ネットワークデザインゲーム

本節ではポテンシャルゲームの中で, 特に, Anshelevich ら [4] により提案されたネットワークデザインゲームの定義を与え, 無秩序・安定性の代償の上下限を論じる. ネットワークデザインゲームは非負の枝コスト $c : E \to \mathbb{R}_+$ をもつグラフ $G = (V, E)$ 上で定義される. ただし, V を頂点集合, E を枝集合とする. 各プレイヤー $i \in N$ は指定された頂点対 (s_i, t_i) を結ぶことを目的とする. すなわち, 戦略集合 A_i は

$$A_i = \{P \subseteq E \mid P \text{ は } s_i\text{–}t_i \text{ パスの枝集合}\} \subseteq 2^E$$

となる. ただし, 各 $i \in N$ に対し s_i–t_i パスは存在すると仮定する.

各プレイヤー i が s_i–t_i パス P_i を選んだ戦略の組 $a = (P_1, \dots, P_n)$ に対して, $\xi_a(e)$ を a において枝 e

を使うプレイヤー数

$$\xi_a(e) = |\{j \in N : e \in P_j\}|$$

とし，プレイヤー i のコストを

$$\mathrm{cost}_i(a) = \sum_{e \in P_i} \frac{c(e)}{\xi_a(e)}$$

と定義する．このとき，社会的コストは

$$\mathrm{cost}(a) = \sum_{i \in N} \mathrm{cost}_i(a) = \sum_{i \in N} \sum_{e \in P_i} \frac{c(e)}{\xi_a(e)} = \sum_{e \in \bigcup_i P_i} c(e)$$

となる．このコスト関数は，枝 e の使用コスト $c(e)$ を利用したプレイヤー全員で均等に負担することを意味する．

与えられるグラフ G の有向，無向性に従って，対応するゲームを有向ネットワークデザインゲーム，無向ネットワークデザインゲームという．また，任意の $i \in N$ が同じ始点 $s\ (= s_i)$ をもつネットワークデザインゲームをマルチキャストゲームという．さらに，s 以外の全ての頂点 $v \in V \setminus \{s\}$ について，$t_i = v$ となるプレイヤー $i \in N$ が存在するとき，ブロードキャストゲームという．

このネットワークデザインゲームはポテンシャルゲームである [6]．実際，ポテンシャル関数 Φ は

$$\Phi(a) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{\xi_a(e)} \frac{c(e)}{i} = \sum_{e \in E} c(e) \cdot H(\xi_a(e)) \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，$H(k)$ は k 番目の調和級数 $\sum_{i=1}^{k} 1/i$ である．ただし，$H(0) = 0$ とする．定理 3.1 より，ネットワークデザインゲームにはナッシュ均衡が常に存在することがわかる．

4.1 無秩序の代償

ネットワークデザインゲームの無秩序の代償を考察しよう．$a = (P_1, \ldots, P_n)$ をナッシュ均衡，$a^* = (P_1^*, \ldots, P_n^*)$ を社会的最適な戦略の組とする．

各プレイヤー i について，s_i から t_i への最短経路長を ℓ_i とすると，定義より

$$\mathrm{cost}_i(a) \le \ell_i,$$
$$\mathrm{cost}_i(a^*) = \sum_{e \in P_i^*} \frac{c(e)}{\xi_{a^*}(e)} \ge \sum_{e \in P_i^*} \frac{c(e)}{n} \ge \frac{\ell_i}{n}$$

となる．したがって，

$$n \cdot \mathrm{cost}(a^*) \ge \mathrm{cost}(a)$$

なので，無秩序の代償は n 以下である．

次に，プレイヤー数が n であるネットワークデザインゲームの無秩序の代償が n になる例を図 4 に示す．この例では，すべてのプレイヤーは同一の始点 s と，同一の終点 t をもつ．各プレイヤーは，コスト 1 の経路か，コストが n の経路を選択する．このとき，社会的最適解は全員がコスト 1 の経路を選ぶときであり，最適な社会的コストは 1 となる．一方，全員がコスト n の経路を選ぶ戦略の組はナッシュ均衡になり，その社会的コストは n となる．したがって，無秩序の代償は n となる．

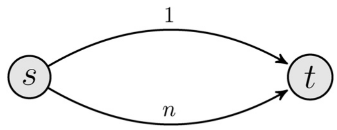

図 4　無秩序の代償が n となる n 人ネットワークデザインゲーム

定理 4.1 (Anshelevich ら [4])**.** プレイヤー数 n の（無向および有向）ネットワークデザインゲームにおける無秩序の代償は

$$\sup_{n\ \text{人ネットワークデザインゲーム}\ G} \frac{\max_{a \in A_{\mathrm{Nash}}(G)} \mathrm{cost}(a)}{\min_{a \in A(G)} \mathrm{cost}(a)} = n$$

となる．

以上より，n 人ネットワークデザインゲームでは無秩序の代償が n ととても大きくなりうる．このことから，どの均衡が達成されるかわからない状況では，とても容認できないような非効率な状況になりうる．そこで，うまい均衡を選択できる場合の非効率さを次節で考えよう．

4.2 安定性の代償

有向ネットワークデザインゲーム，特にブロードキャストゲームに限定しても，安定性の代償が $H(n)$ になる例が知られている [4,7].

図 5 中のネットワーク上でのブロードキャストゲームを考える．すなわち，n 人のプレイヤー $N = \{1, \ldots, n\}$ が存在し，各プレイヤー $i \in N$ は同一の始点 s と，それぞれ異なる終点 t_i をもつ．$2n - 1$ 本の枝があり，$c(s, t_1) = 1 + \varepsilon$, $c(s, t_i) = 1/i\ (i = 2, 3, \ldots, n)$, $c(t_1, t_i) = 0\ (i = 2, 3, \ldots, n)$ である．ただし，ε は十分小さい正の数とする．このとき，プレイヤー 1 は $\{(s, t_1)\}$ という戦略しかなく，プレイヤー $i\ (= 2, 3, \ldots, n)$ は，$\{(s, t_i)\}$, $\{(s, t_1), (t_1, t_i)\}$ という 2 通りの戦略をもつ．

社会的最適解は，プレイヤー $i = 2, 3, \ldots, n$ がパス $\{(s, t_1), (t_1, t_i)\}$ を選択するときである．このとき，社会的コストは $1+\varepsilon$，各プレイヤーのコストは $(1+\varepsilon)/n$

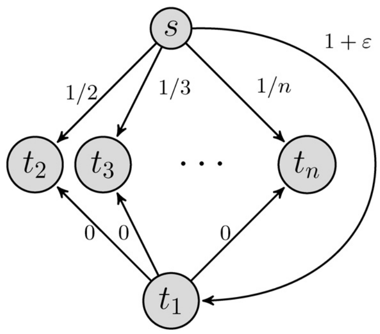

図 5　安定性の代償が H_n となる n 人ネットワークデザインゲーム

となる．しかし，これはナッシュ均衡ではない．なぜならば，プレイヤー n はパス $\{(s, t_n)\}$ を選択することで，コストを $1/n$ に下げることができるからである．同様に k 人が枝 (s, t_1) を使う戦略の組を考えると，k 人中の少なくとも 1 人は戦略を変えることでコストを $1/k$ 以下に削減できるので，ナッシュ均衡ではない．この議論によって，全プレイヤー i が $\{(s, t_i)\}$ パスを選ぶ戦略の組が唯一のナッシュ均衡となる．このときの社会的コストは $H(n) + \varepsilon$ となる．

したがってこの例では，安定性の代償は $\varepsilon \to 0$ で $H(n)$ になる．

さらに，どんな n 人ネットワークデザインゲームの安定性の代償も $H(n)$ 以下であることが，ポテンシャル関数を用いることで証明できる．

定理 4.2 (Anshelevich ら [4])**．** プレイヤー数 n の有向ネットワークデザインゲームについて，安定性の代償は

$$\sup_{n\text{ 人ネットワークデザインゲーム } G} \frac{\min_{a \in A_{\mathrm{Nash}}(G)} \mathrm{cost}(a)}{\min_{a \in A(G)} \mathrm{cost}(a)} = H(n)$$

となる．

証明. 安定性の代償が $H(n)$ である例は示したので，上界が $H(n)$ であることを示す．ポテンシャル最小解を a_*，社会的最適解を a^* とする．このとき，ポテンシャル関数は式 (1) であるので，

$$\mathrm{cost}(a_*) \le \Phi(a_*) \le \Phi(a^*) \le \mathrm{cost}(a^*) \cdot H(n).$$

定理 3.1 より，ポテンシャル最小解はナッシュ均衡であるので，安定性の代償は $H(n)$ 以下である．　□

なお，この上界の証明は無向の場合でも成立することがわかる．また，この証明のように，他のポテンシャルゲームにおいても，ポテンシャル最小解を解析することで，ナッシュ均衡の非効率性を導き出すことができる [8〜10]．

定理で有向ネットワークデザインゲームの安定性の代償は $H(n)$ であることを示したが，グラフを無向に限れば安定性の代償は定数で抑えられるだろうと予想されている [4]．しかし，現在知られているもっとも小さな上界は Mamageishvili ら [11] による $H(n/2)$，最大の下界は Bilò ら [12] による 2.245 であり，いまだ大きな差がある．

一方，無向ブロードキャストゲームに限れば，安定性の代償は定数で抑えられることが最近示された．

5. 無向ブロードキャストゲーム

4 節で述べたように，ブロードキャストゲームは，各プレイヤーの始点が等しく，各頂点を終点とするプレイヤーが存在するようなネットワークデザインゲームである．社会的コストは少なくとも 1 人のプレイヤーに使用される枝のコストの和となることから，無向ブロードキャストゲームにおける社会的最適解は，最小全域木に対応する．さらに，ナッシュ均衡で使われる枝集合も全域木となる [7]．

ポテンシャル最小解の解析によって安定性の代償の漸近的にタイトな上界が得られることは多いが，次の定理により，安定性の代償が定数であることを示すためには，別の手法が必要になる．

定理 5.1 (Kawase–Makino [13])**．** 以下の条件を満たすプレイヤー数 n の無向ブロードキャストゲームが存在する．

ポテンシャル最小解の社会的コストが，最適な社会的コストの $\Omega(\sqrt{\log\log n})$ 倍となる．

Fiat ら [7] は，社会的最適解からプレイヤーの戦略を巧妙に変更することで得られるナッシュ均衡を解析することにより，無向マルチキャストゲームに対する安定性の代償の上界を評価した．Bilò ら [14] はこの手法をさらに発展させることで，無向ブロードキャストゲームに対する安定性の代償の上界が定数になることを示した．

定理 5.2 (Bilò ら [14])**．** ある正定数 c が存在し，任意の無向ブロードキャストゲームにおける安定性の代償は c 以下になる．

Bilò ら [14] によって示された安定性の代償の上界は，定数ではあるものの巨大である．しかし，現在知られている下界は Bilò ら [12] による 1.862 であり，ま

だまだ大きな開きがある．

6. 終わりに

均衡の非効率さの研究は古くから行われてきたが，定量的な解析は比較的新しいものである．無秩序の代償の概念は 1999 年に Koutsoupias と Papadimitriou [1] によって提案された．最適解との比に対する最悪解析は，計算機科学において確立された手法である．例えば，近似アルゴリズムに対する近似比 [15] やオンラインアルゴリズムに対する競合比 [16] は同様の概念である．

本稿ではネットワークデザインゲームにおける均衡の非効率さを紹介をしたが，その他にも利己的ルーティング [2, 17]，負荷分散ゲーム [1, 18]，有効効用ゲーム [19, 20] などさまざまなゲームに対する研究が行われている．

均衡の非効率さの解析は，『Algorithmic Game Theory』 [21] の第 3 部『Quantifying the Inefficiency of Equilibria』で詳しくまとめられている．日本語の資料としては，岩間『アルゴリズム・サイエンス：出口からの超入門』 [22] の 13 章「利己的ルーティング」がある．ポテンシャルゲームについては宇井「ポテンシャルゲームと離散凹性」[23] で詳しく解説されている．

謝辞　渡辺隆裕先生には掲載の機会を与えてくださったこと，ならびに，本稿をまとめるにあたり有益なコメントをいただいたことに対して感謝いたします．

参考文献

[1] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou, “Worst-case equilibria,” In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pp. 404–413, 1999.
[2] T. Roughgarden and É. Tardos, “How bad is selfish routing?,” *Journal of the ACM*, **49**, pp. 236–259, 2002.
[3] A. S. Schulz and N. S. Moses, “On the performance of user equilibria in traffic networks,” In *Proceedings of the 14th Symposium Discrete Algorithms*, pp.363–378, 2003.
[4] E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. M. Kleinberg, É. Tardos, T. Wexler and T. Roughgarden, “The price of stability for network design with fair cost allocation,” *SIAM Journal on Computing*, **38**, pp. 1602–1623, 2008.
[5] D. Monderer and L. S. Shapley, “Potential games,” *Games and Economic Behavior*, **14**, pp. 124–143, 1996.
[6] R. W. Rosenthal, “A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria,” *International Journal of Game Theory*, **2**, pp. 65–67, 1973.
[7] A. Fiat, H. Kaplan, M. Levy, S. Olonetsky and R. Shabo, “On the price of stability for designing undirected networks with fair cost allocations,” In *Proceedings of the 33rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pp. 608–618, 2006.
[8] I. Caragiannis, M. Flammini, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos and L. Moscardelli, “Tight bounds for selfish and greedy load balancing,” *Algorithmica*, **61**, pp. 606–647, 2011.
[9] G. Christodoulou and E. Koutsoupias, “On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games,” In *Proceedings of the 13th Annual European Symposium*, pp. 59–70, 2005.
[10] G. Christodoulou, E. Koutsoupias and P. G. Spirakis, “On the performance of approximate equilibria in congestion games,” *Algorithmica*, **61**, pp. 116–140, 2011.
[11] A. Mamageishvili, M. Mihalák and S. Montemezzani, “An $H_{n/2}$ upper bound on the price of stability of undirected network design games,” In *Proceedings of the 39th International Symposium, Mathematical Foundations of Computer Science*, pp. 541–552, 2014.
[12] V. Biló, I. Caragiannis, A. Fanelli and G. Monaco, “Improved lower bounds on the price of stability of undirected network design games,” In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pp. 90–101, 2010.
[13] Y. Kawase and K. Makino, “Nash equilibria with minimum potential in undirected broadcast games,” *Theoretical Computer Science*, **482**, pp. 33–47, 2013.
[14] V. Biló, M. Flammini and L. Moscardelli, “The price of stability for undirected broadcast network design with fair cost allocation is constant,” *Games and Economic Behavior*, accepted, 2014.
[15] V. V. Vazirani, *Approximation Algorithms*, Springer, 2001.
[16] A. Bolodin and R. El-Yaniv, *Online Computation and Competitive Analysis*, Cambridge University Press, 1998.
[17] T. Roughgarden, “The price of anrchy is independent of the network topology,” *Journal of Computer and System Sciences*, **67**, pp. 341–364, 2003.
[18] A. Czumaj and B. Vöcking, “Tight bounds for worst-case equilibria,” *ACM Transactions on Algorithms*, **3**, pp. 413–420, 2007.
[19] M. X. Goemans, L. Li, V. S. Mirrokni and M. Thottan, “Market sharing games applied to content distribution in ad-hoc networks,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communication*, **24**, pp. 1020–1033, 2006.
[20] A. Vetta, “Nash equilibria in competitive societies with applications to facility location, traffic routing and auctions,” In *Proceedings of 43rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 416–425, 2002.
[21] N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos and V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007.
[22] 岩間一雄，『アルゴリズム・サイエンス：出口からの超入門（アルゴリズム・サイエンスシリーズ 2　超入門編）』，共立出版，2006.
[23] 宇井貴志，“ポテンシャルゲームと離散凹性”，第 17 回 RAMP シンポジウム論文，pp. 89–105, 2005.

