メカニズムデザインの考え方とマッチングのメカニズム

岩崎　敦

本稿ではミクロ経済学から見たメカニズムデザイン（制度設計）の考え方とマッチングのメカニズムを概説する．ゲーム理論およびメカニズムデザインは工学・情報系の学部・大学院出身の研究者・技術者からも注目を集めている．しかしその専門書のほとんどは経済学をある程度学んだ人向けに書かれているため，そのモデルの前提を実感できずに困る人も多い．そこでミクロ経済学におけるメカニズムデザインの立ち位置を紹介し，参加者がもつ選好をどうモデル化しているかを述べる．そのうえで学校選択制や研修医配属などで実践されているマッチングのメカニズムを考えるための安定性や耐戦略性などの概念を解説する．

キーワード：メカニズムデザイン，ミクロ経済学，選好，安定マッチング，耐戦略性

1. はじめに

Googleのキーワード広告におけるオークションや学校選択制におけるマッチングに代表されるように，ゲーム理論およびメカニズムデザインの工学的応用は着実に広がっている．このため当該分野への注目は経済学からだけでなく，他分野にも広がりを見せている．しかしその多くは，工学・情報系の学部・大学院出身の研究者・技術者で，これらを体系的に学ぶ機会はほとんどなかっただろう．

そうした方を対象に2014年12月に開催された「ORセミナー『技術者のためのゲーム理論の基礎』」において，筆者はマッチング理論について講演させていただいた．実は筆者自身が機械工学科の出身で，20年ほど前に研究室に配属されてからゲーム理論の勉強を始めた．当時は大学院のミクロ経済学の教科書 [1] を使ったが，専門用語だけでなく，ミクロ経済学特有の考え方がさっぱりわからずに苦労したことを覚えている．

その頃と比べれば今はとても恵まれており，優れた専門書が多数出版されている．しかし書いてあることは理解できても，なぜそのように考えるのかやなぜそのようなことを気にするのかまでを実感するのはそれなりに大変である．なぜならそれらの専門書は経済学部の学生向けであり，ゲーム理論やメカニズムデザインのもととなる考え方が前提になっているためである．そこで本稿では筆者が苦労した点を踏まえてメカニズムデザインの考え方とマッチングのメカニズムを解説する．

いわさき　あつし
電気通信大学大学院情報システム学研究科
〒182–8585 東京都調布市調布ケ丘1–5–1

2. メカニズムデザインとミクロ経済学

筆者は情報系の研究者なので同僚や知り合いから，「ゲーム理論を勉強するには何から始めたらいいですか？」と聞かれることがそれなりにある．そのとき彼らが「やっぱ○○ですかね？」と言って出してくるのは，岡田章先生の『ゲーム理論』[2] であったり，坂井豊貴先生らによる『メカニズムデザイン』[3] である．これらは筆者もよく参照させていただく素晴らしい本であるが，なかなか骨太で初学者にはかなり敷居が高いと言わざるをえない．

では，もっと簡単な本ならいいのだろうか？　渡辺隆裕先生の『ゼミナールゲーム理論入門』[4] や坂井豊貴先生の『マーケットデザイン入門』[5] は事例も豊富でとっつきやすく，出てくる数式も非常に理解しやすい．

しかしそのモデルの気持ちまでわかるかと言えばなかなかそうはいかない．はじめてマッチングやオークションのモデルを見たとき，どうもしっくりこない部分はなかっただろうか？　過度に簡単化していたり，現実と乖離した都合のいい仮定を使っているから，自分の好みを正直に申告することが最適となる（耐戦略性）といった，いい帰結を導けているだけではないかと疑問に思ったことはないだろうか？　それに，実際の人間がこんなモデルのように合理的に振る舞うとは思えない，もっとさまざまな要素を考慮すべきだと考えるかもしれない．

もちろんそう考えた人は大勢いる．工学・情報系の方々はエージェントシミュレーションや経済物理学による，もっと現実的（に見えるよう）なモデルを好むかもしれない．自動車や情報システムのように全てを設計図や仕様書に書き尽くすことができる対象に慣れ

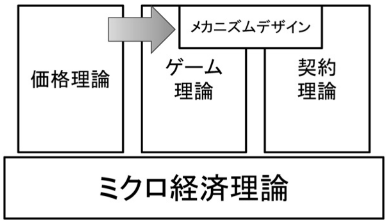

図 1　ミクロ経済学の三本柱

ていると，ゲーム理論によるモデルは単純過ぎて，現実に実践することなど到底不可能なようにみえる．

しかし実際には，オークションとマッチングを中心とする豊富な実践例がある．一方でこれらに比肩する成果がエージェントシミュレーションや経済物理学にあるという話を，筆者はこの 20 年は聞いたことがない．例えば文献 [6] はエージェントシミュレーションの最近の動向を紹介しているが，筆者の実感はあながち間違っていないようである．

これに対して実験経済学 [7] や行動経済学 [8] といった新しい分野が，ゲーム理論の本質を抑えつつ，これまで扱えなかった状況における人間の意思決定を記述することに一定の成功を収めている．とくに実験室実験は実際の人間がメカニズムに参加したときに何が起こるかを観察する「風洞実験」として大いに役立っている．さらにフィールド実験 [9] は教育やビジネス，途上国支援における課題にまで経済学が役立つことを示しつつある．

したがって，ゲーム理論やメカニズムデザインのモデルに一定の実践的な価値があるのは間違いない．では，エージェントシミュレーションや経済物理学のモデルとの違いは何なのだろうか？　それはゲーム理論やメカニズムデザインがミクロ経済学の一分野として発展してきたことにあると筆者は考えている．ミクロ経済学は図 1 に示すように，価格理論，ゲーム理論，契約理論の三本柱から成り立っている [10]．メカニズムデザインはゲーム理論と契約理論の境界に位置しているが，その成り立ちには価格理論が強く影響している．

価格理論は「市場」メカニズムの伝統的な理論であり，複数の主体がもつ選好をもとに，カネやサービスを含むモノを配分する仕組みを扱う．主体の意思決定は市場が提供するモノの価格から決まり，利得や効用は自分以外の相手の行動とは独立に決まると仮定する．研究分野としてはかなり成熟しており，最新の研究のほとんどが効用は自分と相手の行動に依存して決まるゲーム理論にもとづいている．メカニズムデザインでは顧みられることはほとんどないが，その土台はやはり価格理論にある．神取道宏先生の『ミクロ経済学の力』[11] でも，価格理論の重要性が

> 物理学の基礎教育でニュートン力学を教えるのをはしょって素粒子論をたくさん教えるようなもの ([11], p. vi)

と強調されている．もちろんニュートン力学が価格理論であり，素粒子論がゲーム理論である．これからメカニズムデザインを学ぶ方には価格理論における市場モデルも併せて学び始めてほしい．エージェントシミュレーションや経済物理学の研究者も「何で経済学者はオレのモデルを理解せえへんねん」と嘆く前に文献 [11] にチャレンジしてほしい．ただし内容に妥協がない「ごつい」本なので，もう少し気軽にという方は文献 [12] や [13] がよいだろう．

3. ミクロ経済学における選好

市場メカニズムは広義の資源配分問題を扱う．メカニズムは選好の組を入力とし，配分結果を出力とする関数として制度やルールを表現する．メカニズムの参加者は，価格理論における消費者モデルと同じように，与えられた選好にもとづいて「合理的に振る舞う」と仮定する．本章では選好の考え方を紹介する．

選好とは，自分が選ぶことができる選択肢が与えられたとき，その選択肢をどの順番で好むかを表す概念である．例えばあるとき，ツマ（仮名）という人が俳優 T の熱愛報道を見てぶつくさ言っていたとする．そしてその後流れた別の俳優 N の結婚報道には何も言ってなかったとする．このときツマは俳優 T を N より好むとわかる．これを $\mathrm{T} \succ_{ツマ} \mathrm{N}$ と書く．さらにその後，今度は俳優 M の婚約報道を見て何か言っていたようだが，T のときほどうるさくなかったとする．以上の観察はツマが，

$$\mathrm{T} \succ_{ツマ} \mathrm{M} \succ_{ツマ} \mathrm{N}$$

という選好をもっていることを教えてくれる．

ここで俳優 T，N，M の 3 人しかいない世界を考えれば，ツマの選好は完全に記述できている．つまり，与えられた選択肢のうち任意の 2 つを取り出したとき，必ずどちらを好むかがわかるようになっている．これを「完全律」という．もし俳優 T より N のほうを好むとなると困るが，そうはなっていないことも重要である．つまり T を M より好み，M を N より好むなら，ツマは必ず T を N より好むようになっている．これ

を「推移律」という．メカニズムデザイン（というより経済学）は個人の選好は完全律と推移律を満たすと仮定する．

さらに参加者は可能な選択肢の中でもっとも望ましいものを常に選択すると仮定する．これをもって「合理的に振る舞う」という．完全律と推移律は参加者にとってもっともよい選択肢が必ず定まることを保証し，合理的な参加者はそれを選択すると仮定するだけである．これで経済学と日常会話とでは合理的という言葉の意味がずいぶんと異なることがわかる．日常会話における合理的な人は，一切の感情を排して冷徹に意思決定する人のような印象を与える．しかし経済学はそんなマシンのような人を定義しているわけではない．

選好の概念は囚人のジレンマの利得表にも当てはまる．利得表には2人がお互いに協力できればそれぞれ利得1を，相手が協力するときに自分が裏切れば利得2を獲得するといったようなことが書かれているが，この値自体には何の意味もない．ただより好ましい選択肢に大きな数字を割り当てることで，選好を見やすく表現している．つまり囚人のジレンマの利得表は相手が協力するならば，自分は協力するより裏切るほうを好むと表しているだけなのである．

選好を値で表現したものを効用関数と呼ぶ．効用には大きく分けて序数的効用と基数的効用がある．序数的効用は効用の大小さえわかれば，任意の2つの選択肢に順番をつけることができるがその絶対的大きさに意味がない．また序数的効用は自分と他人の効用が比較できないこと（個人間比較不可能）に注意したい．例えば，ツマとムスメが同じ選好 $\mathrm{T} \succ \mathrm{M} \succ \mathrm{N}$ をもっていたとしてもどちらがより熱狂的にTを好むかは計測できないと考える．マッチングはこの序数的効用を仮定する．

次に基数的効用はその絶対的大きさにも意味があり，金銭や戦闘力といった尺度で計測できるものとする．この場合は自分と他人の効用を比較できること（個人間比較可能）がある．例えば，俳優のグッズにいくら費やせるかを基準にすれば，ツマとムスメのどちらがより熱狂的か計測できると考える．オークションはこの基数的効用を仮定する．

ここで僕が知り合いから3人の俳優と会える券を1枚ずつもらってきたとしよう．それぞれの券で会える俳優は決まっており，俳優Mの券ではTには会えないとする．もちろんそれぞれの券が使えるのは一度きりである．もしツマとムスメが異なる選好をもつなら話は簡単で，ツマとムスメそれぞれがもっとも好む俳優の券を割り当てればよい．しかしツマとムスメの選好がコンフリクトするとこれはとても危険な資源配分問題になる．ムスメの選好を $\mathrm{T} \succ_{ムスメ} \mathrm{N} \succ_{ムスメ} \mathrm{M}$ とすると，俳優Tと会える券は1枚しかない以上2人を完全に満足させることはできない．これに折り合いをつける手続きを考えるのがメカニズムデザインである．

筆者がある問題のメカニズムを考えるとき，その問題に関わる人がどんな選好をもっているかをまず考える．その選好が序数的と基数的のどちらであるか，個人間比較可能か不可能かから考えていく．しかし基数的効用でも個人間で効用を測る尺度が異なるときは比較できないことに注意しよう．例えばツマは俳優のグッズに費やした金額を，ムスメは映画に行った回数を尺度にするようなときは彼女らの効用は基数的であっても比較できない．

次に彼女らがどんな選好をもちうるかを考える．メカニズムデザインでは個々人の選好はその人しか知らない個人情報として扱う．そこで人がどんな選好をもつ可能性があるかを規定するために，ありうる選好の集合（ドメイン）を考える．僕はツマとムスメの選好を直接知ることはできないが，どんな選好をもちうるかは知っていると仮定する．また割当が満たすべき基準も考えなければならない．例えばムスメにTの券を，ツマにMの券を与えると2人の効用の合計を最大化できるかもしれない．もしくは（ちょっとありえないが）俳優Tがムスメよりツマに会いたいと考えているなら，ツマにTの券を，ムスメにMの券を与えてもムスメの不満を説得できるかもしれない[1]．

選好とドメインを定義すると，参加者がどんな嘘をつく（真の選好と異なる選好を申告する）かが決まるので，均衡における参加者の意思決定を予想できる．メカニズムデザインは与えられたドメイン上でルールを設計し，パレート効率性や安定性などの基準を均衡において達成できるようにする．専門家は問題のドメインさえ明確になれば，問題が従来のメカニズムで解決できるかどうかを判断できる．もちろんドメインによっては難しいときもあるが，全然解けない問題かどうかは判断しやすい．さらに全然解けない問題であっても，基準をゆるめたりドメインを制限することで，何とかなることもある．そのようなときはそうした変更がメカニズムの実践上問題がないかを考えることになる．

経済学のモデルは工学・情報系の方にとっては直感に合わない部分も多いかと思う．しかし経済学は人を

[1] 前者はパレート効率性，後者は安定性という基準に相当する．

含んだシステムのモデルを数百年培ってきた学問であり，メカニズムデザインの実践例は経済学の約束事に従うモデルから生まれている点を強調しておきたい．

4. マッチングのモデル

マッチングは，研修医と病院をマッチする研修医配属問題や生徒と学校をマッチする学校選択制，大学関係者に身近な問題として，学生を研究室やゼミに配属する研究室配属問題などを実践例にもつ．さらに生体腎移植において，患者とドナーをマッチする腎臓交換メカニズムにまで広がっている．2012 年のノーベル経済学賞（正確にはノーベル記念経済学スウェーデン国立銀行賞）がマッチングメカニズムの理論とその実践に対して与えられている．

マッチングの基本的なモデルは安定結婚問題として知られている．安定結婚問題では，男性は女性に選好（好みの順位）をもち，女性は男性に対して選好をもつと仮定して，各男性（女性）がどの女性（男性）と結婚するのが望ましいかを考える．そして，そこで定義される望ましい男女の組合せ（マッチング）を求めるには，どんな手続き（メカニズム）を用いるべきかを議論する．この問題にはさまざまなバージョンが存在するが，もっとも基本的なケースである男女間の 1 対 1 のマッチングを考える．

マッチングに 3 人の男性と 3 人の女性が参加するとする．この問題の入力を $(M, W, \succ_M, \succ_W)$ で表現し，$M=$ (John, Ken, Lee) を男性の集合，$W=$ (Alice, Becky, Carol) を女性の集合とする．また $\succ_M = (\succ_J, \succ_K, \succ_L)$ と $\succ_W = (\succ_A, \succ_B, \succ_C)$ をそれぞれ男性と女性の選好の組とする．例えば $\succ_J$ を

$$\text{Alice} \succ_J \text{Becky} \succ_J \text{Carol}$$

とすると，「John の第一希望は Alice，第二希望は Becky，第三希望は Carol」という意味になる．

現実には John の選好として，「Carol とはどうしても結婚したくない (Alice $\succ_J$ Becky $\succ_J \emptyset \succ_J$ Carol)」や「Alice と Becky であればどちらでもよい (Alice $\sim_J$ Becky $\succ_J$ Carol)」といった状況も考えられるが，本稿では扱わないものとする．

マッチングはどの男性がどの女性と結婚するかを示す関数 $\mu : M \cup W \to M \cup W$ のうち，全ての男性 $m \in M$ に対して $\mu(m) \in W$，全ての女性 $w \in W$ に対して $\mu(w) \in M$，そしてどのような男性 m と女性 w の組合せに対しても，$\mu(m) = w$ であれば必ず $\mu(w) = m$ となり，逆も常に成立する関数として定義する．例えばあるマッチング μ において，John が Becky と結婚しているとき，$\mu(\text{John}) = \text{Becky}$ および $\mu(\text{Becky}) = \text{John}$ となる．

男性と女性がもちうる選好の組の集合を $P_{M \cup W}$，考えられるマッチングの集合を X とする．マッチングメカニズム f は選好の組 $\succ \in P_{M \cup W}$ を入力とし，マッチング $\mu \in X$ を出力とする関数 $f : P_{M \cup W} \to X$ となる．

あるマッチングが（パレート）効率的であるとは，いずれかの参加者の効用を犠牲にすることなしには，他の参加者の効用を向上することができないことを意味する．例えば，John が今のマッチングで与えられている相手より希望順位の高い相手と結婚させるためには，他の誰かを今のマッチングで与えられている相手より希望順位の低い相手と結婚させなければいけなくなる．

定義 1（効率性）**.** マッチングの集合 $X' \subseteq X$ と参加者の集合 $A \subseteq M \cup W$ を考える．あるマッチング $\mu \in X'$ が X' と A に対して効率的であるとは，全ての $i \in A$ にとって，$\nu(i) \succeq_i \mu(i)$ かつ，少なくとも 1 人の $j \in A$ にとって $\nu(j) \succ_j \mu(j)$ を満たすような他のマッチング $\nu \in X'$ が存在しないことを意味する．

ここでもし $A = M \cup W$ であれば全体側効率性と呼び，$A = M(W)$ であれば男性（女性）側効率性と呼び区別する．X' には全てのマッチングの集合か全ての安定マッチングの集合を使うことが多い．

あるマッチングメカニズムが耐戦略性をもつとは，どの参加者が嘘の選好を申告しても，自身の有利になるようにマッチングを操作できないことを指す．言いかえると全ての参加者が真の選好を申告することが弱支配戦略となる．

定義 2（耐戦略性）**.** 参加者の集合 $A \subseteq M \cup W$ を考える．あるマッチングメカニズム f が耐戦略性を満たすとは，任意の選好の組 $\succ \in P_{M \cup W}$，任意の参加者 $i \in A$，i が申告するいかなる選好 $\succ'_i \in P_i$ に対して，

$$f_i(\succ) \succeq_i f_i(\succ'_i, \succ_{-i})$$

が成立することを言う．ここで，$\succ_{-i}$ を i を除く全ての参加者が申告する選好の組とし，f_i を f の i に関する要素とする．

ここでもし $A = M \cup W$ であれば両性にとっての耐戦略性と呼び，$A = M(W)$ であれば男性（女性）にとっての耐戦略性と呼び区別する．

最後に安定性を定義する．安定性はマッチングメカ

ニズムにとって非常に重要な性質である．安定性を定義する準備として，ブロッキングペアの概念を導入する．

定義 3（ブロッキングペア）**．** $w \succ_m \mu(m)$ かつ $m \succ_w \mu(w)$ を満たす男 m と女 w のペアが存在するとき，マッチング μ がブロックされるという．このような m と w のペアをブロッキングペアという．

ブロッキングペアを直感的に説明する．John はあるマッチングで決められた結婚相手よりも Alice を好み，Alice も現在の結婚相手よりも John を好んでいるとする．このとき John と Alice は現在の結婚相手と離婚して，改めて結婚したほうがより幸せになれる．つまり結婚式が行われる前に勝手に 2 人で抜けだしてしまい，残った 4 人が困ることになる．明らかにブロッキングペアが存在するマッチングは不安定と言える．

定義 4（安定性）**．** あるマッチングが安定であるとは，そのマッチングの中にブロッキングペアが一組も存在しない場合をいう．

例 1． 3 人の男性と 3 人の女性が以下の選好をもつ場合を考える．

$$\begin{aligned}
&\succ_J\text{: Becky} \succ_J \text{Carol} \succ_J \text{Alice},\\
&\succ_K\text{: Becky} \succ_K \text{Carol} \succ_K \text{Alice},\\
&\succ_L\text{: Alice} \succ_L \text{Carol} \succ_L \text{Becky},\\
&\succ_A\text{: John} \succ_A \text{Ken} \succ_A \text{Lee},\\
&\succ_B\text{: John} \succ_B \text{Ken} \succ_B \text{Lee},\\
&\succ_C\text{: John} \succ_C \text{Lee} \succ_C \text{Ken}.
\end{aligned}$$

このとき，以下に示すマッチング μ は安定である：

$$\begin{aligned}
\mu(\text{John}) &= \text{Becky}, & \mu(\text{Alice}) &= \text{Lee},\\
\mu(\text{Ken}) &= \text{Carol}, & \mu(\text{Becky}) &= \text{John},\\
\mu(\text{Lee}) &= \text{Alice}, & \mu(\text{Carol}) &= \text{Ken}.
\end{aligned}$$

安定なマッチングはそこから逸脱しても，より好ましい相手とペアになれることはないという意味で望ましい．また，全ての安定マッチングは全体効率性を常に満たす．例えば John と Becky はお互いに第一希望同士であるため，Ken の相手をより希望順位の高い Becky に変えるとは，John はより希望順位の低い相手と結婚することになる．ただし，このマッチングは男性側効率性を満たすが女性側効率性は満たさない．一般に安定性と男性（女性）側効率性は必ずしも両立しないが，次に述べる受入保留メカニズムは全ての安定マッチングの集合と男性（もしくは女性）に対して効率的な安定マッチングを求めることができる．

5. 受入保留メカニズム

安定マッチングはかなり厳しい条件のように見えるかもしれない．しかしどんな安定結婚問題にも安定マッチングは必ず存在することが証明されている [14]．さらにそれを見つけるための手続きも考案されている．

定理 1． 安定結婚問題には少なくとも 1 つの安定マッチングが必ず存在し，その 1 つを受入保留 (deferred-acceptance, DA) メカニズムで求めることができる．

DA メカニズムはゲール–シャプレイ (Gale–Shapley) メカニズムとも呼ばれる．DA には男性からプロポーズするやり方と，女性からプロポーズするやり方があり，前者を男性最適 DA，後者を女性最適 DA と呼び区別する．ここでは男性からプロポーズするやり方について説明する．

ステップ 1　各男性は自分の第一希望の女性にプロポーズする．各女性はプロポーズしてきた男性の中から最も希望順位の高い男性を受諾し，仮マッチする．それ以外の男性のプロポーズをリジェクトする．

ステップ k　ステップ $k-1$ で，リジェクトされた各男性は，自分がまだリジェクトされていない女性の中から最も希望順位が高い女性にプロポーズする．各女性はプロポーズしてきた男性と現在仮マッチしている男性の中から，最も希望順位の高い男性のプロポーズを受諾し，仮マッチする．そして，それ以外の男性のプロポーズをリジェクトする．

終了条件　新たにリジェクトされる男性が 1 人もいなくなった時点で，DA は終了し，各女性に仮マッチしている男性を正式マッチとする．

例 1 をもとに DA メカニズムの動作例を示す．

例 2． ステップ 1 で，男性 John と Ken は女性 Becky に，Lee は Alice にプロポーズする．Becky は John のプロポーズを受諾し，Ken をリジェクトする．この結果，John–Becky と Lee–Alice が仮マッチとなる．ステップ 2 で，ステップ 1 でリジェクトされた Ken が Carol にプロポーズし，Carol はプロポーズを受諾する．ここでリジェクトされた男性は一人もいなくなるため，DA を終了し，例 1 で示したマッチングが正式マッチとなる．

DA によって得られたマッチングがブロッキングペアを含まないことは簡単に証明できる．まず，もしある男性 m がマッチした女性 $\mu(m)$ よりも別の女性 w を好むとすれば，DA のどこかでのステップで m は w

にリジェクトされてなければならない．このため w は m よりも望ましい男性のプロポーズを受諾していることになる．それゆえ，m と w のペアが DA に参加せず，独自にペアに作ろうとすることはない，つまりブロッキングペアとならない．

定理 1 は安定マッチングは必ず存在するだけでなく，複数存在しうることを示している．DA は複数存在する安定マッチングの中から 1 つを選択する．とくに男性からプロポーズする DA は，全ての安定マッチングの集合と男性に対して効率的なマッチングを見つけ出す．これを男性最適安定マッチングという．しかし安定でないマッチングを含む集合に対しては男性側効率的になるとは限らない．

定理 2. 男性最適 DA メカニズムが与えるマッチングにおいて，各男性は安定マッチングの下で結婚できる女性の中から最も望ましい女性と結婚している．

つまり全ての男性が他のどのような安定マッチングよりも，例 1 のマッチングを好むもしくは同程度に好むことが保証される．一方で女性からこのマッチングを見た場合はどうなるだろうか？　例 1 で得たマッチング μ に対して，次の安定マッチング ν を考える．

$$\begin{aligned} \nu(\text{John}) &= \text{Becky}, & \nu(\text{Alice}) &= \text{Ken}, \\ \nu(\text{Ken}) &= \text{Alice}, & \nu(\text{Becky}) &= \text{John}, \\ \nu(\text{Lee}) &= \text{Carol}, & \nu(\text{Carol}) &= \text{Lee}. \end{aligned}$$

ここで John と Becky は同じ相手とマッチしているので μ と ν を同程度に好む．しかし Alice は Ken $\succ_A$ Lee であるので μ より ν を好む．同様に Carol も μ より ν を好むので，全ての女性が μ より ν を好む，もしくは同程度に好む状態になっている．このとき μ を男性最適（女性最悪）安定マッチング，ν を女性最適（男性最悪）安定マッチングと呼ぶ．ν のような女性最適安定マッチングを得るには，女性からプロポーズし，男性が受諾かリジェクトかを選択する女性最適 DA を使えばよい．

耐戦略性については以下の定理が成立する．

定理 3. 男性（女性）最適 DA は男性（女性）にとっての耐戦略性を満たす．

男性最適 DA であれば，男性はどのように申告を偽っても，自分のマッチングが改善されることはない．しかし一方で，プロポーズされる側にとっての耐戦略性はどうなるだろうか？　残念なことに，男性最適 DA メカニズムの下で，女性は嘘の申告をしてマッチングを改善することができる．

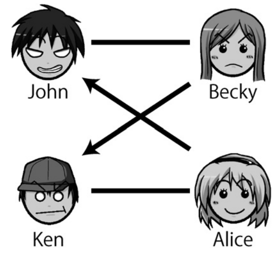

図 2　女性にとって耐戦略性をもたない例

例 3. John たちが以下に示す選好をもつ場合を考える．

$$\begin{aligned} &\succ_J\text{: Becky} \succ_J \text{Alice} \succ_J \text{Carol}, \\ &\succ_K\text{: Alice} \succ_K \text{Becky} \succ_K \text{Carol}, \\ &\succ_L\text{: Alice} \succ_K \text{Becky} \succ_K \text{Carol}, \\ &\succ_A\text{: John} \succ_A \text{Ken} \succ_A \text{Lee}, \\ &\succ_B\text{: Ken} \succ_B \text{John} \succ_B \text{Lee}, \\ &\succ_C\text{: John} \succ_C \text{Lee} \succ_C \text{Ken}. \end{aligned}$$

男性最適 DA メカニズムを実行すると，John は Becky にプロポーズし，Ken と Lee は Alice にプロポーズする．まず John と Becky が仮マッチとなる．ここで Alice は Ken と Lee のどちらを選ぶべきだろうか？　この 2 人のうちでより好ましいのは Ken である．Alice が正直に選べば Ken と Alice が仮マッチとなる（図 2 の線）．

しかし Alice は John を，Becky は Ken を第一希望としている．そこで Alice があえて Ken をリジェクトし，Lee と仮マッチとなることを選んだとする．次のステップで Ken は Becky にプロポーズする．このとき Becky は前のステップで，仮マッチとなった John をリジェクトして Ken と仮マッチとなる．この結果次のステップで John，すなわち Alice にとって最も好ましい相手が Alice にプロポーズしてくれるようになる Alice は嘘をつくことで Alice（と Becky）がより好むマッチングが実現する（図 2 の矢印）．

このように DA はプロポーズを受ける側にとっては耐戦略性を満たすことができない．しかしこれは DA メカニズム固有の問題ではなく，マッチングメカニズム一般の問題であることが示されている [15]．

定理 4. 安定かつ（両性にとって）耐戦略性を満たすマッチングメカニズムは存在しない．

この定理は安定性の必要条件である全体効率性と両性にとっての耐戦略性を満たすメカニズムの存在を仮

定して矛盾を導くことで導かれる．1 対 1 という基本的な状況でさえも安定性を要求する限り，このインセンティブの問題は常に発生しうる．

しかしこの不可能性定理は DA がまったく使えないことを意味するわけではない．たしかにプロポーズする側とされる側の両方で耐戦略性を満たすことはできないが，プロポーズされる側にとって選好を偽る誘因がない，もしくは小さい場合は，必要な性質は満たされていると言える．例えば研究室配属問題は，複数の学生が 1 つの研究室とマッチする場合の安定結婚問題である．これは多対一マッチングと呼ばれ，学生にとっての耐戦略性を満たしつつ，安定マッチングを求められる DA の拡張を構成できる．もちろん研究室側の耐戦略性は保証できないが，研究室が選好を偽る可能性は低いと考えることができる．そもそも研究室の数に比べて学生数はとても多く，全ての学生への順序づけをうまく操作することは難しい．また研究室の選好順序は恣意的ではなく，成績などの何らかの客観的な基準が要求されることが多い．これは学校選択制においても同様であり，学校側は生徒に対する選好を決定する基準を事前に公表することが義務づけられている [16]．さらにアメリカの研修医マッチングである National Resident Matching Program の実データから，病院側が嘘を申告する誘因のあるケースがごく限られていることが明らかにされている [17]．

6. おわりに

本稿は工学・情報系の研究者や技術者のために，メカニズムデザインの発想の元になる価格理論を紹介し，その重要な実践の 1 つであるマッチングを概説した．

マッチング理論は文献 [14] 以来，経済学者だけでなく，計算機科学者の注目を集め続けている．計算機科学者の間では安定結婚問題を最適化問題ととらえ，そのさまざまな拡張に対するアルゴリズムが提案されている．例えば，同順位となる人を書くことや割り当てられたくない人を書かないといった不完全な選好を許す場合がある．この問題でもっともマッチ数が多い安定マッチングを求める問題は NP 困難 [18] であり，その近似アルゴリズムが提案されている [19]．

経済学者からは離島や僻地の医療機関に一定の数の研修医を配属することを保証したいといった要請を考慮して，できるだけ安定性を保証するメカニズムが関心を集めている [20]．筆者も配属される研修医の数に下限つまり最低 1 人はその病院に配属されるといった制約を満たすマッチングメカニズムを提案している [21]．

謝辞　本稿の執筆にあたっては安田洋祐氏および渡辺隆裕氏のご助言をいただきました．ここに深く感謝いたします．また本稿は JSPS 科研費 26280081 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] A. Mas-Colell, M. Whinston and J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
[2] 岡田章，『ゲーム理論』，有斐閣，2011.
[3] 坂井豊貴，藤中裕二，若山琢磨，『メカニズムデザイン—資源配分制度の設計とインセンティブ—』，ミネルヴァ書房，2008.
[4] 渡辺隆裕，『ゼミナールゲーム理論入門』，日本経済新聞出版社，2008.
[5] 坂井豊貴，『マーケットデザイン入門』，ミネルヴァ書房，2010.
[6] 今田高俊，“シミュレーションと社会—文理を結ぶ新しい方法論—，” 学術の動向，p. 2，2012 年 2 月号.
[7] 川越敏司，『実験経済学』，東京大学出版会，2007.
[8] R. Thaler and C. Sunstein, *Nudge*, Penguin Books, 2009.（遠藤真美訳，『実践行動経済学』，日経 BP 社，2009.）
[9] U. Gneezy and J. List, *The Why Axis*, PublicAffairs, 2013.（望月衛訳，『その問題，経済学で解決できます』，東洋経済新報社，2014.）
[10] 菅谷拓生，“ゲーム理論　戦略的状況を分析する強力なツール，” 経済セミナー，4・5 月号，pp. 35–39，日本評論社，2014.
[11] 神取道宏，『ミクロ経済学の力』，日本評論社，2014.
[12] 伊藤秀史，『ひたすら読むエコノミクス』，有斐閣，2012.
[13] I. Gilboa, *Rational Choice*, MIT Press, 2010.（松井彰彦訳，『合理的選択』，みすず書房，2013.）
[14] D. Gale and L. Shapley, “College admissions and the stability of marriage,” *American Mathematical Monthly*, **69**, pp. 9–15, 1962.
[15] A. Roth, “The economics of matching: Stability and incentives,” *Mathematics of Operations Research*, **7**, pp. 617–628, 1982.
[16] 安田洋祐（編），『学校選択制のデザイン—ゲーム理論アプローチ—』，NTT 出版，2010.
[17] A. Roth and E. Peranson, “The redesign of the matching market for American physicians: Some engineering aspects of economic design,” *American Economic Review*, **89**, pp. 748–780, 1999.
[18] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki and Y. Morita, “Stable marriage with incomplete lists and ties,” In *Proceedings of the 26th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pp. 443–452, 1999.
[19] K. Iwama, S. Miyazaki and N. Yamauchi, “A 1.875 approximation algorithm for the stable marriage problem,” In *Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 288–297, 2007.
[20] Y. Kamada and F. Kojima, “Efficient matching under distributional constraints: Theory and applications,” *American Economic Review*, **105**, pp. 67–99, 2015.
[21] D. Fragiadakis, A. Iwasaki, P. Troyan, S. Ueda and M. Yokoo, “Strategyproof matching with minimum quotas,” *Transactions on Economics and Computation*, 2015 (in press).