ネットワーク上の探索ゲーム

菊田　健作

本稿では，探索理論の中でネットワーク上の探索問題として表される意思決定問題の 1 つについて概説する．ここで考える探索問題とは不確実性下の数理的意思決定問題であり，ゲーム理論を応用して探索者の最適意思決定を考察する．読者が理解しやすいように図を多用している．

キーワード：ネットワーク，2 人ゼロ和ゲーム，最適探索順序

1. はじめに

次のいくつかの例は必ずしもゲームではないが，探索問題と関連があると思われる．

例 1. 山岳地帯で遭難が発生した模様である．携帯電話は通じない．可能性のある範囲を，ひとまとめとして捜索できるいくつかの地域に細分して捜索したい．

例 2. ホームセンターに商品を買いに行った．店内の案内板でおおよその場所はわかるが，目当ての商品の正確な陳列場所がわからない．店内でどのように移動しながら商品を探したらよいか．ホームセンター側としては，客が商品の配置状況を知らないと想定して，目当ての商品を見つけるまでの平均時間を小さくするように店内に経路を設定したい．

例 3. ある動物は食料が乏しくなる季節に備えて食料をいくつかの場所に分散して保管している．他の動物がそれを横取りしようとしてめぼしい場所を確認している．

例 1 に類似のものとしては

- 登山にきていた仲良しの 2 人は離ればなれになってしまった．友達はこれまで歩いてきた路の近辺にいる可能性が大きいので探しながら引き返すことを考えている．
- 可愛がっていた猫がいなくなった．自宅から半径 1 km ぐらいの圏内にいるものと思われる．業者に捜索を頼むと経費がかかるので自分で歩きながら探すことを検討している．
- 国外に目を向けるとテロリストの捜索のような話題も耳にする．
- ショッピングセンターに子連れで買い物に来ていた母親が子供とはぐれてしまった場合．

例 2 に類似のものとしては

- 図書館で目当ての本を探す場合．
- ロボットにビル内を巡回させるとか地域の安全のための巡回等では探索すべき目標物はない．全体に何か異常が起こったとき，原因箇所の発見のためにいくつかの箇所を確認する必要がある．そこで最初から，最適な探索経路を念頭に置いて巡回するということも考えられる．さらに，重点地域を指定して経路を決めることも考えられる．

例をあげだすときりがないが，このような例の中には，探索すべき場所を有限個のひとまとまりとして表現できるものがあるであろう．そしてひとまとまりを調査して目標とするものが存在しないことが確認できた場合には他のひとまとまりに探索対象を切り替える．ひとまとまりの例として地域，国，建造物，社内の部署，海洋のような連続的な探索領域をメッシュに区切ったときのメッシュ等を考えることができる．そこで，調査すべき有限個のひとまとまりをネットワークのノードとして表現し，段取りをつけてノードから他のノードへ調査対象を切り替えることができるときノード同士を枝で結ぶことにする．上記の例の中にはこのようにしてネットワーク上の探索問題としてモデル化できるものがあるであろう．ここではノード（ひとまとまり）を調査するときと，ノードから他のノードへ調査対象を切り替えるときに費用がかかると想定する．この問題は探索理論の中の 1 つのモデルに過ぎないが，第 3 節で述べるように問題を構成する要素を吟味するとバラエティに富んでおり検討せねばならないことが多数あるように思われる．

このような問題を扱った初期の文献が Gluss [1] であ

きくた　けんさく
兵庫県立大学経営学部
〒 651–2197 兵庫県神戸市西区学園西町 8–2–1

る．彼は探索空間が線ネットワークとして表され，探索目標物がノード上に存在する確率が既知の場合に目標物を見つけるまでの期待探索費用を最小化する問題を分析し，探索方法を限定した中での最適解を与えた．Kikuta [2] はこの問題のゲームヴァージョン，つまり存在確率が未知であるとき，意志をもつ目標物 (hider) と探索者の間の 2 人ゼロ和ゲームとして hider と探索者の最適戦略を分析している．その後の研究についてはAlpern/Gal [3] や Alpern/Lidbetter [4] を参照されたい．この方面での最近の成果は Baston/Kikuta [5] であり有向ネットワーク上での 2 人ゼロ和ゲームを分析している．関連する探索問題を解説した成書として Alpern/Gal [3]，Alpern et al. [6]，Garnaev [7]，Ruckle [8] 等がある．

2. モデル

前節で述べたネットワーク上の探索問題を記号を用いて定義しよう．

$G = (N, E)$ を連結な無向有限ネットワークとする．ここに $N = \{1, ..., n\}, n \geq 2$，はノードの集合，$E \subseteq N \times N$ は枝の集合である．2 人の player つまり hider と探索者がおり，hider は N に含まれるノードのどれか 1 つを選びそこに静止目標物を隠すあるいはそこに隠れる．目標物の探索者は hider がどのノードを選んだかを知らずに任意のノードを選びそこを調べて目標物がないならば，そこから枝上を移動しながら各ノードを調べていく．ノードを調べずに通過することもできる．ノードを通過するのに要する時間は，そのノードを調べても調べなくても同じである．静止目標物が見つかった時点で探索は終了する．探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても 0 である．したがって探索者が同一のノードを 2 度以上調べることはない．ノード $i \in N$ を調べる費用は $c_i > 0$ である．$(i, j) \in E$ のとき，ノード i から j への移動費用は $d(i, j) > 0$ である．これを枝 $(i, j) \in E$ の長さともいう．$(i, j) \notin E$ のときは，i と j を結ぶパスに含まれる枝の移動費用の和を考えその最小値を $d(i, j)$ とする．すべての $i, j \in N$ に対し $d(i, j) = d(j, i)$ である．ただし，$d(i, i) = 0$ とする．

hider の（純粋）戦略はノード $i \in N$ を選ぶことである．探索者の（純粋）戦略は，探索を開始する前に，探索するノードの順序を決定することである．探索者の戦略を $\sigma \equiv \sigma(1)\ldots\sigma(n)$ と表す．σ は N 上の置換である．探索者が探索を開始するノードが $\sigma(1)$ である．探索者が $\sigma(i)$ から $\sigma(i+1)$ へ移動するときは移動費用が $d(\sigma(i), \sigma(i+1))$ であるような任意のパス上を移動すると仮定する．

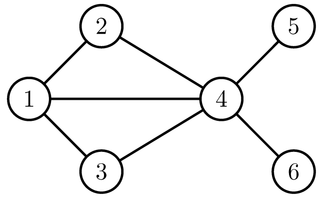

図 1　ネットワーク，$n = 6$

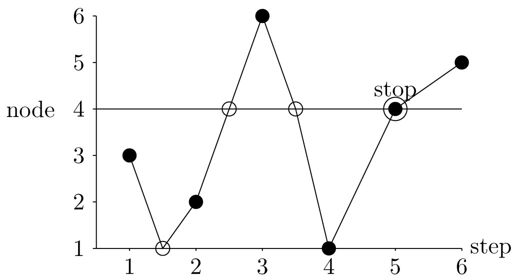

図 2　探索者 326145，hider 4

例えば，図 1 において枝の長さはすべて 1 であるとしよう．探索者が順序 326145 を選んだとすると，彼はノード 3 を調査，ノード 1 または 4 を通過してノード 2 を調査，ノード 4 を通過してノード 6 を調査，ノード 4 を通過してノード 1 を調査，ノード 4 を調査，ノード 5 を調査という手順で探索することになる．仮に，hider がノード 4 を選んだとすれば，ノード 4 を調査して目標物を発見し探索が終了する．これを図 2 のように表すとわかりやすいかもしれない．白丸は通過ノードを表す．

hider と探索者がそれぞれ（純粋）戦略 i, σ を選んだとき，探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する．このときの探索費用は

$$\sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)-1} [d(\sigma(x+1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x+1)}] + c_{\sigma(1)} \quad (1)$$

となる．これを hider の利得と考え，探索者はこれをできるだけ小さく，一方 hider はできるだけ大きくしたい，として 2 人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma = (G, c, d)$ を得る．このゲームの行列は鞍点を持たないので，双方は混合戦略を考える．この場合目標物を発見するまでの期待探索費用が計算される．

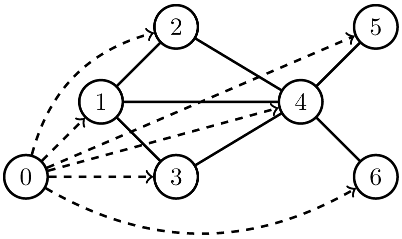

図 3　図 1 と同値な問題

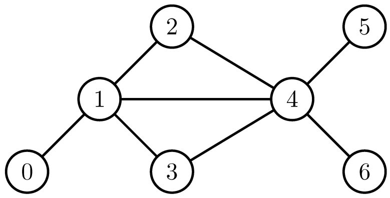

図 4　図 1 と別の問題，初期位置ノード 0

3. モデルの構成要素

ここではモデルを構成する諸要素について述べながら今後の研究の方向を検討する．

3.1 目標物の確率分布

例 2 において各商品のこれまでの販売実績が保存されているとしよう．売り場を複数のパーツに区切ったとき，販売実績の大きい商品があるパーツに任意の客の目当てとする商品が置かれている可能性が大きいであろう．店舗内に順路を設けるとするならば客が目当てとする商品に到達するまでにかかる時間が平均して少なくなるように設定すべきであろう．一方，新規の店舗でしかも販売実績がなく商品の売れ行きについて知識がない場合は，同じ路は高々2 度しか通らないような順路を設ければよいように思われる．例 2 に関していえば販売実績がある場合が，存在確率が既知の場合に相当する．存在確率が未知の場合は，探索者が仮想的な hider とゲームを行うという想定で最適探索順序を求めるというのも 1 つの方法であろう．

3.2 初期位置

探索者の初期位置がネットワークのノードの 1 つに指定されている場合，そのノードには目標物は存在しないことを前提とする．探索者はそのノードから出発して枝に沿って移動する．一方，第 2 節で述べたモデルでは初期位置が指定されない場合であり，探索者が探索を開始するノードを選ぶことも戦略に含まれている．Gluss [1] では前者が仮定されている．戦略を検討する場合に考えるネットワークの対称性は初期位置を指定されないほうが指定される場合より大きいので，両プレーヤーの戦略の記述が簡単になることもある．指定されないほうにおいて特別な点を加えて（図 3），指定される場合の特殊ケースというように形式的に表現できるが，そうすることによる解析上のメリットは小さいように思われる．なお，図 4 のように初期位置 0 を指定した場合，(1) に $d(0, \sigma(1))$ を加える．

3.3 目標物が動くかどうか

第 2 節の一般モデルでは hider はいったん隠れる場所を決めたら以後そこに留まり動かないことを仮定している．仮に，動くことができると想定するとノード数が 2，3 個でも解析が難しくなる．第 1 節の例 1 では同じ場所を繰り返し探す必要がでてくるであろう．

3.4 探索領域

ネットワークのノードばかりでなく枝の任意の点にも目標物が存在する可能性がある場合は Alpern/Gal [3] 等により研究されている．探索領域が連続となり探索費用や戦略の表現もそれに即したものになる．本稿では，目標物はノードのみに存在する可能性があると仮定している．

3.5 費用

探索者がノードから隣接ノードへ移動するときに想定するのが移動費用である．第 2 節の一般モデルで $d(i, j)$ として定義している．あるノードから次のノードへ移るときに必要な準備作業を枝が表しているとすればこれを段取り費用あるいは切り替え費用と呼ぶこともある．探索者がノードを調べるときに生じるのが調査費用である．例えば，ノードが国，県，あるいは市を抽象化したものとすると調査費用がノードによって異なると考えられる．この場合，2 人ゼロ和ゲームを数理的に解くのは難しくなる．一方，ノード間の移動費用が異なる場合，モデルが欠陥を持たないようにするためには例えば $d(i, j)$ が三角不等式を満たさねばならない等種々の条件を考える必要がでてくる．実用上は，すべての枝について移動費用が同じであると仮定できるようにするとか，すべてのノードについて調査費用が同じであると仮定できるようにとかモデル化の段階で工夫するのも 1 つの方法であろう．

3.6 ネットワーク

ノードから隣接ノードへの探索者の移動が一方向のみ可能であるような枝が存在するとする．これを有向枝として表現したとき，探索の初期ノードからすべての他のノードへ到達できるようなパスがあるかどうか問題となる．また，そのようなパスがあるときは，最

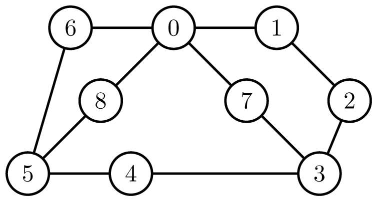

図 5　サイクルを含むネットワーク，初期位置ノード 0

短距離を与えるようなパスが重要である（[5] 参照）．無向ネットワークの場合（つまり，第 2 節のモデル）に比べて探索者の戦略の個数は小さくなるので，個別の問題によっては解析が容易になることもある．

ノードの探索順序はネットワーク上のパスを定義する．このようなパスのうちハミルトン・パスや構造がそれに近いものが最適解に関わってくることが予想される．探索者の初期位置が指定されている場合，ツリーネットワーク上の 2 人ゼロ和ゲームにおける hider の最適混合戦略がネットワークの構造に依存する関係式を満たすことは知られている（[2] 参照）．例えば，図 7 の状況では，hider の混合戦略を (p_1, p_2, p_3) とすると，

$$\frac{p_1}{c_1} = \frac{p_2 + p_3}{2d(1,3) + c_2 + c_3}, \frac{p_2}{c_2} = \frac{p_3}{2d(2,3) + c_3} \quad (2)$$

一般に，サイクルを含むネットワークのほうがツリーネットワークよりも解析するのが難しい．ただし，サイクルを複数個含むネットワークの場合もツリーネットワーク同様の関係式があるかもしれないので，それがわかれば研究の進展が期待できる．例えば，図 5 の場合に，$c_i = c, i = 1, \ldots, 8$ かつ $d(i,j) = 1, \forall(i,j) \in E$ を仮定すると hider の最適戦略はどのようになるだろうか．

3.7　発見確率

第 2 節の一般モデルでは，発見確率つまり目標物が存在するノードを調べたときその目標物を見逃さない確率は 1 であると仮定している．例えば，この確率を 1/2 としただけでも，探索者は同じノードを繰り返し（無限回？）調査することを検討せねばならなくなり解析は難しくなることが予想される．

3.8　目標物の個数，探索者の人数

第 2 節の一般モデルでは，目標物の個数，探索者の人数はいずれも 1 としている．これらが複数になると戦略の定義が複雑になる等モデル化の段階で検討せねばならないことが多くなる．一方，目標物が存在しない確率を導入したモデルは検討の余地があると考えられる．

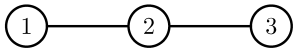

図 6　線ネットワーク，$n = 3$

4.　モデルの特徴

本研究は，数理的に探索者の最適解を求めるあるいは最適解の特徴をつかむことを目指している．数値データが存在する個別の問題に対しては，線形計画法ソフトウェアを用いて最適解を計算できる．そこで，シミュレーションによって最適解の特徴を推測するのも 1 つの方法である．ネットワークのノード数が n の場合，モデルを特徴づけるパラメータの個数は最大 $\binom{n}{2} + n$ である．最適解の特徴をつかむために 2 人ゼロ和ゲームを解く場合，パラメータの数値を変えていくときに工夫を要するであろう．

4.1　2 人ゼロ和ゲーム

ノード数が n，hider を行プレーヤー，探索者を列プレーヤーとすると，2 人ゼロ和ゲームの行列のサイズは $n \times n!$ である．例えば，$n = 3$ で図 6 のような線ネットワーク上のゲームでは行列は次の (3) のようになる．ただし，枝の移動費用を $d(1,2) = d(2,1) = d(2,3) = d(3,2) = 1$ およびノードの調査費用を $c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 2$ として，hider の戦略は第 1 行から 1，2，3 の順，探索者の戦略は第 1 列から 123，132，213，231，312，321 の順である．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 2 & 2 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 9 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

枝の移動費用およびノードの調査費用はすべて正であり，異なる 2 つの順列においては出現順が逆であるようなノードの組が少なくとも 1 つあるから行または列の間には戦略の支配関係がないことに注意する．この行列ゲームの 1 つの解は，hider は確率 $(p, 1-2p, p)$，$3/10 \leq p \leq 4/10$ でノード 1，2，3 に隠れること，探索者は順列 123 と 321 を確率 1/2 ずつで選ぶことである．ゲームの値は 5 である．さて，図 6 で表されるモデルを変えて，探索者の初期位置がノード 0 であるようなモデルを考えよう．移動費用は $d(0,1) = 1$ が加わっただけで他は同じとする（図 7）．行列は次の (4) ようになる．

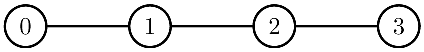

図 7　探索者の初期位置がノード 0

$$A=\begin{bmatrix}3&3&7&11&9&11\\6&10&4&4&12&8\\9&7&11&7&5&5\end{bmatrix}\tag{4}$$

ゲームの値は 7 である．式 (2) により hider は確率 $(3/15, 4/15, 8/15)$ でノード 1，2，3 に隠れることが最適であり，探索者の 1 つの最適戦略は順列 123 と 321 を確率 1/2 ずつで選ぶことである．

4.2　順序付け問題

最終的には，探索者の最適解（つまり，ノードの最適探索順序）を知りたいということであるので，探索者による順序付け問題とも考えることができる．図 7 の例において hider がノード 1，2，3 にそれぞれ確率 1/3 で目標物を隠したとしよう．仮に探索者がこれを知っていたとするならば，探索者のそれぞれの順列に対して期待費用が計算されるから探索者はそれが最小であるような順列 123 を選ぶであろう．探索者が hider の最適戦略を計算できるとすれば，探索者は hider がその最適戦略を選ぶと想定して，期待費用が最小になるような順列を確率的に選ぶことになる．この例では順列 123 と 321 をそれぞれ確率 1/2 で選べばよい．順列 132 と 231 をそれぞれ確率 1/2 で選んでもよい．

4.3　数値例による検討

本節では，調査すべきノード数が 4 である種々のネットワークに対して探索者がどのような順列を用いるべきか考えてみよう．以下の例ではすべての枝の移動費用は 1 である．ノードの調査費用の違いが両プレーヤーの戦略にどのように影響するか調べることを意図している．すべての例において調査すべきノード数は 4 であるので，それぞれの場合が $4\times 4!$ 行列ゲームとして表現される．ただし，$C=\sum_{i=1}^{4} c_i$ とする．

例 4.　線ネットワークで探索者の初期位置を指定しない場合である．探索ゲーム $\Gamma=(G,c,d)$ において $N=\{1,2,3,4\}$, $E=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ かつ $d(1,2)=d(2,3)=d(3,4)=1$ とする（図 8）．

Baston/Kikuta [9] によると探索者は次の混合戦略をとることにより期待探索費用を高々

$$\tilde{V}\equiv\frac{6+C}{2}+\sum_{i=1}^{4}\frac{c_i^2}{2(6+C)}-\frac{9}{2(6+C)}$$

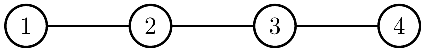

図 8　線ネットワーク $(n=4)$

とすることができる．つまり，ノード 1 を確率 $(3+2c_1)/2(6+C)$ で選び，順列 1234 と 1432 を確率 1/2 で選ぶ；ノード 2 を確率 $(3+2c_2)/2(6+C)$ で選び，順列 2341 と 2143 を確率 1/2 で選ぶ；ノード 3 を確率 $(3+2c_3)/2(6+C)$ で選び，順列 3412 と 3214 を確率 1/2 で選ぶ；ノード 4 を確率 $(3+2c_4)/2(6+C)$ で選び，順列 4123 と 4321 を確率 1/2 で選ぶ，というものである．仮に，$c_1=c_2=c_3=c_4=c$ とするならば $\tilde{V}=2.25+2.5c$ となる．また，もう 1 つの混合戦略をとることにより期待探索費用を高々

$$\tilde{W}\equiv\frac{\max_{1\le i\le 4}c_i+3+C}{2}$$

とすることができる．つまり，順列 1234 と 4321 を確率 1/2 で選ぶ，というものである．仮に，$c_1=c_2=c_3=c_4=c$ とするならば $\tilde{W}=1.5+2.5c$ となる．一方，hider は各ノード i を確率 $(1+c_i)/(4+C)$ で選ぶという混合戦略により期待探索費用を少なくとも

$$\tilde{v}\equiv\frac{3+C}{2}+\sum_{i=1}^{4}\frac{c_i^2}{2(4+C)}+\frac{C}{2(4+C)}$$

とすることができる．仮に，$c_1=c_2=c_3=c_4=c$ とするならば $\tilde{v}=1.5+2.5c=\tilde{W}$ となる．したがって，$\tilde{v}$ を与える戦略 $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ および $\tilde{W}$ を与える戦略がそれぞれ hider および探索者の最適戦略となり，ゲームの値は $1.5+2.5c$ である．次に探索者の初期位置がノード 0 に指定されている場合について調べてみる．

例 5.　線ネットワークで初期位置がノード 0 の場合である．探索ゲーム $\Gamma=(G,c,d)$ において $N=\{0,1,2,3,4\}$, $E=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$ かつ $d(0,1)=d(1,2)=d(2,3)=d(3,4)=1$ である（図 9）．

hider の混合戦略を (p_1,p_2,p_3,p_4) とする．$c_1=c_2=c_3=c_4=c$ の場合

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{c}&=\frac{p_2+p_3+p_4}{6+3c},\\ \frac{p_2}{c}&=\frac{p_3+p_4}{4+2c},\\ \frac{p_3}{c}&=\frac{p_4}{2+c}\end{aligned}\tag{5}$$

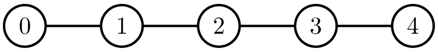

図 9　線ネットワーク，初期位置ノード 0

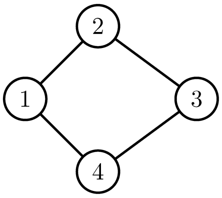

図 10　円ネットワーク $(n = 4)$

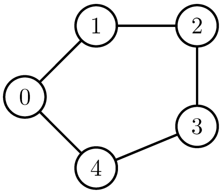

図 11　円ネットワーク，初期位置ノード 0

であれば (p_1, p_2, p_3, p_4) は最適である．詳細は Kikuta [2] を参照されたい．

例 6.　（Baston/Kikuta [9] 参照）円ネットワークで初期位置を指定していない場合である．探索ゲーム $\Gamma = (G, c, d)$ において $N = \{1, 2, 3, 4\}$，$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ かつ $d(1, 2) = d(2, 3) = d(3, 4) = d(4, 1) = 1$ である（図 10）．

hider の最適戦略は確率 $\rho_i \equiv (1 + c_i)/(4 + C)$ でノード i に隠れることである．ここに，$C = \sum_{i=1}^{4} c_i$ である．探索者の最適戦略は確率 ρ_i でノード i を選び，そこから両方向にそれぞれ確率 1/2 で探していくことである．例えばノード 2 を選んだ場合，順列 2341 と 2143 をそれぞれ確率 1/2 で選ぶ．

一方，次の例のように円ネットワークで初期位置を指定している場合はノードの調査費用が特殊な関係式を満たしている場合のみ解かれている．

例 7.　円ネットワークで初期位置がノード 0 の場合である．探索ゲーム $\Gamma = (G, c, d)$ において，$N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\}$ かつ $d(0, 1) = d(1, 2) = d(2, 3) = d(3, 4) = d(4, 0) = 1$（図 11）．

例えば，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ の場合，hider の最適戦略は $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ であり，探索者の最適戦略は順列 1234 と 4321 を確率 1/2 でとることである．

5.　おわりに

本稿では先行研究の成果を明確には述べていない．しかし，第 3，4 節において研究の現状を大まかに述べているのでそれをお読みになり興味のある方は下記参考文献をご参照いただきたい．本研究が社会の多くの局面の意思決定問題の解決に貢献すれば幸いである．最後になりますが，文献 [8] の著者である Ruckle 氏は 2014 年 2 月にご逝去されました．ご冥福をお祈りします．

参考文献

[1] B. Gluss, “Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time,” *Naval Research Logistics Quarterly*, **8**, pp. 277–283, 1961.
[2] K. Kikuta, “A hide and seek game with traveling cost,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33**, pp. 168–187, 1990.
[3] S. Alpern and S. Gal, *The Theory of Search Games and Rendezvous*, Kluwer's International series in Operations Research & Management Science, pp. 95–97, Kluwer Academic Publishers, 2003.
[4] S. Alpern and T. Lidbetter, “Searching a variable speed network,” *Mathematics of Operations Research*, **39**, pp. 697–711, 2014.
[5] V. Baston and K. Kikuta, “Search games on a network with traveling and search costs,” *International Journal of Game Theory*, 2014. DOI: 10.1007/s00182-014-0432-z.
[6] S. Alpern, R. Fokkink, L. Gasieniec, R. Lindelauf and V. S. Subrahmanian, *Search Theory a Game Theoretic Perspective*, Springer, 2013.
[7] A. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, 2000.
[8] W. Ruckle, *Geometric Games and Their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 82, Pitman Advanced Publishing, 1983.
[9] V. Baston and K. Kikuta, “Search games on networks with travelling and search costs and with arbitrary searcher starting points,” *Networks*, **62**, pp. 72–79, 2014.