戦略形ゲームにおける純粋戦略均衡の存在
—離散不動点定理によるアプローチ—

渡辺　隆裕

戦略形ゲームにおけるナッシュ均衡の存在はゲーム理論の中心的な定理である．混合戦略まで考えれば n 人有限ゲームにはナッシュ均衡が常に存在することが知られているが，純粋戦略均衡は常に存在するとは限らない．ここでは純粋戦略均衡の存在条件とその応用について解説し，さらに筆者らが最近取り組んでいる離散不動点定理による存在条件について述べる．

キーワード：戦略形ゲーム，ナッシュ均衡，不動点定理

1. 戦略形ゲームとナッシュ均衡

1.1 はじめに

ゲーム理論において，もっとも基本となる理論は非協力ゲームの戦略形ゲームであり，その解はナッシュ均衡である．ゲーム理論が人々を惹きつける理由の 1 つには，その数学自身が持つ魅力もあるのだが，黎明期から今日までのゲーム理論において，もっとも魅力的な数学的性質の 1 つは「すべてのゲームに解が存在する」というナッシュ均衡の存在定理である．本稿は，この非協力ゲームのナッシュ均衡の存在についてのお話である．

今月号と来月号の本誌は共にゲーム理論特集．いわば「ゲーム理論祭り」である．記事の中には応用に関するものも多いので，ゲーム理論の数理に興味ある読者を対象に限定して，本稿を執筆した．初心者の方や応用を目指す方には，少し難しく不満に感じられるかもしれないが勘弁していただきたい．ゲーム理論の基礎や入門は，来月号の記事 [1] に執筆予定である．

1.2 準備

本稿で扱う戦略形ゲームは，n 人のプレイヤーが戦略を同時に選び，その結果で，各プレイヤーの利得が決まるゲームである．ここでプレイヤーの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$，プレイヤー $i \in N$ の戦略の集合を S_i とする．n 人のプレイヤーの戦略を並べた $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ は戦略の組と呼ばれる．戦略の組の集合を S とする．$S = S_1 \times \cdots \times S_n$ である．プレイヤー i の利得関数 u_i は，S からの実数の集合 $\mathbb{R}$ への関数である．

わたなべ　たかひろ
首都大学東京大学院経営学専攻
〒 206–0081 東京都八王子市南大沢 1–1

戦略形ゲーム（以下，単純にゲームと呼ぶ）は，(i) プレイヤーの集合 N，(ii) 各プレイヤーの戦略の集合 $(S_i)_{i \in N}$ (iii) 各プレイヤーの利得関数 $(u_i)_{i \in N}$ の 3 つの要素で記述される．

ゲームにおいてプレイヤーが選ぶと予測される戦略の組合せは，ゲームの解と呼ばれる．ゲームの解の 1 つの（そして最も妥当と思われる）考え方はプレイヤーが自分の利得を最大にするように行動するという考え方だ．ここでプレイヤー i 以外の戦略の集合の直積を，

$$S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

とする．$s_{-i} \in S_{-i}$ は，プレイヤー i 以外の戦略の組 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n)$ を表す．さらに $(t_i, s_{-i}) \in S$ は，プレイヤー i は戦略 $t_i \in S_i$ を選び，プレイヤー i 以外は戦略 $s_{-i} \in S_{-i}$ を選んでいる戦略の組を表すとする．すなわち

$$(t_i, s_{-i}) = (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$$

である．s と (s_i, s_{-i}) は同じ $s = (s_1, \ldots, s_n)$ を表す．

プレイヤー i の戦略 t_i が，

$$u_i(t_i, s_{-i}) = \max_{r_i \in S_i} u_i(r_i, s_{-i})$$

を満たすとき，戦略 t_i は s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応戦略であるという．プレイヤーが自分の利得を最大にするように行動するということは，最適反応戦略を選ぶことであるが，相手の行動が推測できなければ，何に対する最適反応戦略を選べばよいかが決まらない．したがってさらなる仮定がなければゲームの解は定まらない．

ここで相手も自分もお互いにゲームをプレイしてい

表 1　ゲーム 1：両性の戦い

1 \ 2	A_2	B_2
A_1	$(1,2)$	$(0,0)$
B_1	$(0,0)$	$(2,1)$

ると共通に認識しており，さらにすべてのプレイヤーが，ある戦略の組 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ がゲームの解であると共通に予想したとしよう．もしそうであるならば，どのプレイヤー i も，予想される他者の戦略の組 s_{-i}^* において最適反応戦略を選んでいるはずである．このような戦略の組をナッシュ均衡と呼ぶ．

ゲームの解はナッシュ均衡とされている．もしナッシュ均衡以外の戦略の組を，すべてのプレイヤーが結果として予測したならば，少なくとも 1 人のプレイヤーは最適反応戦略を選んでいない．そうであるならば，そのプレイヤーは，最適反応戦略に戦略を変更するであろうから，その戦略の組は結果として起きない，というのがその理由である．

以下，混乱のない限りナッシュ均衡を単に均衡と呼ぶことにする．均衡の定義は以下のようになる．

定義 1.1.　戦略の組 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ において，すべての $i \in N$ に対し $s_i^* \in S_i$ が $s_{-i}^* \in S_{-i}$ の最適反応戦略ならば，$s^* \in S$ を均衡と呼ぶ．

例 1.1（ゲームと均衡）**.**　2 人ゲームは，表 1 の利得行列で表現できる．ゲーム 1 は，$N = \{1, 2\}$,$S_1 = \{A_1, B_1\}$,$S_2 = \{A_2, B_2\}$ となるゲームを表し，プレイヤー 1 は行を，プレイヤー 2 は列を選択する．2 人が選択した行と列が交差した場所の左にプレイヤー 1 の利得が，右にプレイヤー 2 の利得が書かれている．例えば $u_1(A_1, A_2) = 1$,$u_2(A_1, A_2) = 2$ である．ゲーム 1 の均衡は (A_1, A_2) と (B_1, B_2) である．

2.　純粋戦略均衡と混合戦略均衡

表 2 のゲーム 2 は，各プレイヤーが H または T を選び，両方が同じ戦略を選ぶとプレイヤー 1 が勝ち，異なる戦略を選ぶとプレイヤー 2 が勝ち，勝ったほうは利得 1 を獲得する（負けたほうは利得 0）というゲームである．ゲーム 2 は，一見すると均衡が存在しないが，プレイヤーが確率で戦略を選ぶ混合戦略という概念を用いれば，均衡の存在を示すことができる．ゲーム 2 では，両プレイヤー共に「H と T を 1/2 で選ぶ」という混合戦略が均衡になる．

表 2　ゲーム 2：均衡がないゲーム？

1 \ 2	H	T
H	$(1,0)$	$(0,1)$
T	$(0,1)$	$(1,0)$

ナッシュは [2] において，戦略集合が有限であるすべてのゲーム（以下有限ゲーム）において，混合戦略まで考えれば，均衡が少なくとも 1 つは存在することを示した．これは，すべてのゲームに解があることを示すゲーム理論を支える中心的な定理であるが，混合戦略は常にその妥当性が議論になる．果たして，プレイヤーは本当に確率に自分の意思決定を委ねるのかという問題である．経営を題材にした企業人向けの講義で「ゲーム 2 のような場面では経営者はサイコロを振れ」といえば，ゲーム理論は非現実的だといわれかねない（ただし近年は警備問題やスポーツの戦略などに，混合戦略が使えると注目されてきている）．

できれば確率を用いた戦略を使わないでも均衡が存在するほうがありがたい．混合戦略と区別するために，もとの戦略を純粋戦略と呼ぶことにすると，純粋戦略均衡が存在する条件はどのようなものになるのかという興味が出てくる．

3.　均衡の存在と不動点定理

3.1　均衡と不動点定理

経済学では，価格や生産量を戦略と考えるゲームを分析することが多く，そのような場合には戦略を離散的ではなく連続的な量と考えるほうが簡単になることが多い．ここまでは有限ゲームだけ考えたが，戦略集合が実数区間のような無限集合のゲーム（以下無限ゲーム）にも多くの応用がある．3 節では，有限ゲームも無限ゲームも考慮し，戦略の集合 S_i は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であるとする．

有限ゲームも無限ゲームも，ゲームの均衡の存在は，最適反応戦略を考察し，不動点定理を用いることで議論できる．このことについて説明しよう．関数 $\hat{b}_i : S_{-i} \to S_i$ が

$$\hat{b}_i(s_{-i}) \in \mathrm{argmax}_{r_i \in S_i}\, u_i(r_i, s_{-i})$$

を満たすとき，$\hat{b}_i$ をプレイヤー i の最適反応関数と呼ぶ．$\hat{b}_i$ は他のプレイヤーの戦略 s_{-i} に対してプレイヤー i の最適反応戦略を 1 つ与える関数である．ここで $\hat{b}(s) = (\hat{b}_1(s_{-1}), \ldots, \hat{b}_n(s_{-n}))$ とする．このとき $s^* \in \hat{b}(s^*)$ となる s^* は $\hat{b}$ の不動点と呼ばれる．均衡の

定義をよく見ると，s^* が $\hat{b}$ の不動点であることと s^* が均衡であることは同値であることがわかる．したがって，均衡が存在する条件は，$\hat{b}$ の不動点が存在する条件と同じである．そして以下の定理 3.1 は，不動点（＝均衡）の存在条件を与える．

定理 3.1（ブラウアーの不動点定理）**．** S が有界閉凸集合であり，$\hat{b}$ が連続関数であれば $\hat{b}$ の不動点が存在する．

3.2 最適反応対応と角谷の不動点定理

後に例 3.1 で議論するが，定理 3.1 は，このままでは使いづらい．さまざまなゲームの均衡の存在を証明するには，上記の最適反応関数ではなく，最適反応対応と呼ばれるものを使うほうがよいのである．対応とはある集合の要素に，ある集合の部分集合を対応させる関数である．プレイヤー i の最適反応対応は

$$\rho_i(s_{-i}) = \operatorname{argmax}_{r_i \in S_i} u_i(r_i, s_{-i})$$

で定義される．すなわち $\rho_i(s_{-i})$ は他のプレイヤーの戦略 s_{-i} に対する，プレイヤー i のすべての最適反応戦略の集合である．

ここで $\rho(s) = \rho_1(s_{-1}) \times \cdots \times \rho_n(s_{-n})$ とする．このとき $s^* \in \rho(s^*)$ となる s^* は ρ の不動点と呼ばれる．やはり，s^* が $\hat{b}$ の不動点であることと s^* が均衡であることは同値である．

前の定理 3.1 と同様に $\rho(s)$ が「ある意味」で連続であれば不動点が存在するのであるが，対応の連続性は関数の連続性よりも少し複雑である．以下の例を使い，最適反応関数と最適反応対応の違い，および対応の連続性について考察してみよう．

例 3.1（ゲーム 2 と最適反応対応）**．** 再度，ゲーム 2 において混合戦略を許すゲームを考えよう．ゲーム 2 において，プレイヤー 1 は確率 s_1 で H を（確率 $1-s_1$ で T を）選び，プレイヤー 2 は確率 s_2 で H を（確率 $1-s_2$ で T を）選ぶとすると，混合戦略を許すゲームは，$S_1 = S_2 = [0,1]$ である無限ゲームと解釈することもできる．プレイヤー 1 の利得は，期待値を計算することにより

$$u_1(s_1, s_2) = (2s_2 - 1)s_1 + (1 - s_2)$$

であることがわかる．

まずプレイヤー 1 の最適反応「関数」$\hat{b}_1(s_2)$ から考察してみよう．$\hat{b}_1$ は，$s_2 < 1/2$ では $\hat{b}_1(s_2) = 0$，$s_2 > 1/2$ では $\hat{b}_1(s_2) = 1$ である．$s_2 = 1/2$ では，すべての s_1 が最適反応戦略となるため $\hat{b}_1$ は $[0,1]$ のどの値も取りうるが，しかしどの値を取っても $\hat{b}_1$ は $1/2$ で不連続になってしまう．このため定理 3.1 は，このようなゲームの均衡の存在証明には使えないことがわかる．

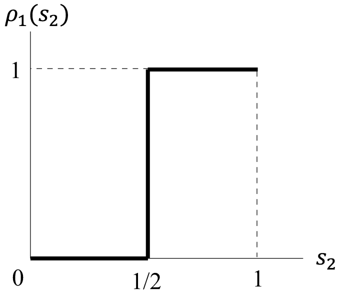

図 1　ゲーム 2 のプレイヤー 1 の最適反応対応

次に最適反応「対応」を考えてみよう．プレイヤー 1 の最適反応対応 ρ_1 は

$$\rho_1(s_2) = \begin{cases} \{1\} & s_2 > 1/2, \\ [0,1] & s_2 = 1/2, \\ \{0\} & s_2 < 1/2 \end{cases}$$

となる．図 1 は，プレイヤー 1 の最適反応対応 ρ_1 を表している．$s_2 = 1/2$ の点では「関数」とは異なる「対応」の特徴がよく現れている．この点でグラフが「繋がっている」ことが，不動点を持つための条件になるため，これを表現しなければならない．

ρ_1 は上半連続であると呼ばれるある種の連続性を持っていると考えられる．また $s_2 = 1/2$ における対応の値が凸集合になっており，このことを合わせることにより，不動点の存在を示すことができる．上半連続の定義を含め，細かい点は誌面の制約から他の文献（[3] など）を参照していただくとして，ここでは，結果としての角谷の不動点定理だけを示す．

定理 3.2（角谷の不動点定理）**．** 任意の $i \in N$ に対して S が有界閉凸集合で，$\rho(s)$ が非空で閉凸な値を持つ上半連続な対応であれば，$\rho(s)$ の不動点が存在する．

この定理だけでは，まだどんなゲームの最適反応対応が条件を満たすかがわからない．しかしこの定理を用いることで 2 つの有用なクラスのゲームが均衡を持つことを示すことができる．

1 つは有限ゲームを混合戦略に拡張したときの均衡の存在である．例 3.1 で見たように，混合戦略まで戦略を拡張すれば，その戦略の集合は有界閉凸集合になる．さらに，その最適反応対応は上半連続で非空で凸

な値を持つことが示せる．この事実と角谷の不動点定理を用いて，ナッシュは有限ゲームにおける均衡の存在を証明したのである．

もう 1 つは，先に述べたような価格や生産量など戦略を連続的な変数と考えたゲームへの応用であり，次の定理が知られている．

定理 3.3（無限ゲームの均衡の存在）**.** 任意の $i \in N$ に対して，S_i が有界閉凸集合で，任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ について $u_i(\cdot, s_{-i})$ が S_i 上の準凹関数で，なおかつ $u_i(s)$ が S 上の連続関数であるならば，ゲームには均衡が存在する．

ここで関数 $u_i(\cdot, s_{-i})$ が S_i 上で準凹関数であるとは，任意の $t_i, r_i \in S_i$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$u_i(\lambda t_i+(1-\lambda)r_i, s_{-i}) \geq \min\{u_i(t_i, s_{-i}), u_i(r_i, s_{-i})\}$$

が成り立つことをいう．凹関数は準凹関数である．

経済学や経営学などでは，利得が自分の変数に関して凹関数となるゲームの応用が多い．1 つの例を以下に示そう．

例 3.2（差別化クールノー競争）**.** 企業がプレイヤーであり，各プレイヤー i は生産量 s_i を決定して，利益を最大にするゲームを考えよう．戦略集合は実数区間 $S_i = [0, \overline{s}_i]$ とし，企業はこの中から生産量を選択する．各企業が販売する財は差別化されているが，その価格はお互いの生産量に影響を受けており，

$$P_i(s) = a_i + \sum_{j \in N} b_{ij} s_j \tag{1}$$

で表されているとする（P_i は逆需要関数と呼ばれる）．一般的に自分が販売する財の生産量が増加すれば，価格は下落するので $b_{ii} < 0$ とする．限界費用は一定で c_i とし，生産量が s_i のときの生産費用は $c_i s_i$ で表されるとする．このとき企業の利益を利得と考えると，利得関数は

$$u_i(s) = P_i(s)s_i - c_i s_i$$

で表される．このとき u_i は，s_i に関して 2 次関数となり，s_i^2 の係数は $b_{ii} < 0$ であることから，u_i は s_i に関して凹関数であることがわかる．さらに u_i は s に関して連続であり，均衡の存在がいえる．

4. 純粋戦略均衡を持つゲームのクラス

定理 3.3 を用いれば，広いクラスの無限ゲームに均衡の存在を示すことができるが，実際には，価格や生産量は離散的な値を取る．戦略を実数ではなく，整数に限定したときに純粋戦略均衡が存在する条件はどのようなものになるのか？　この 4 節以降は，戦略集合が整数区間であるようなゲーム，すなわちある整数 $\underline{s}_i, \overline{s}_i$ に対して $S_i = \{\underline{s}_i, \underline{s}_i + 1, \ldots, \overline{s}_i\}$ であるようなゲームを考察する．

純粋戦略で均衡が存在するゲームには，優モジュラゲームとポテンシャルゲームと呼ばれる 2 つのクラスがある．この 4 節では，簡単にこれを紹介しよう．

プレイヤー i の利得関数 u_i が他者の戦略に対して差分増加であるとは，任意の $s_i > s'_i$ となる $s_i, s'_i \in S_i$ と任意の $s_{-i} > s'_{-i}$ となる $s_{-i}, s'_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s'_{-i}) - u_i(s'_i, s'_{-i}) \tag{2}$$

が成り立つことをいう．

そして，任意のプレイヤー i の利得関数 u_i が差分増加であるならば，ゲームは優モジュラゲームであると呼ばれる[1]．タルスキの不動点定理と呼ばれる定理により，優モジュラゲームには常に均衡が存在することが示される（[4] などを参照）．優モジュラゲームは，寡占企業の価格競争などに応用される．

また，ある関数 $f : S \to \mathbb{R}$ が存在して，任意のプレイヤー i に対して，任意の $s_{-i} \in S_{-i}$ における任意の 2 つの戦略 $s_i, s'_i \in S_i$ の差分が f の差分として表せるとき，すなわち

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i}) = f(s_i, s_{-i}) - f(s'_i, s_{-i})$$

であるとき，ゲームはポテンシャルゲームであると呼ばれ，f はポテンシャル関数と呼ばれる．ポテンシャルゲームは，混雑ゲームや複占ゲームなどに応用があり，次回 6 月号で河瀬氏と牧野氏が，ポテンシャルゲームをネットワークデザインに応用する記事 [5] を執筆予定である．

5. 離散不動点定理によるアプローチ

5.1 離散不動点定理

無限ゲームにおける均衡の存在は不動点定理で示せることから，有限集合上の不動点定理があれば，有限ゲームでの均衡の存在が議論できそうである．しかし有限集合ではタルスキの不動点定理を除き，不動点定理はあまり知られていなかった．

[1] 一般的な優モジュラゲームの定義は，さらに戦略の集合が束であり，利得関数が自己の戦略に対して優モジュラ性を持つという条件が必要であるが，今回のように S_i が整数区間であれば，これは常に満たされる．

飯村は [6] において $\mathbb{Z}^n$ 上の不動点の存在条件を示す離散不動点定理を発表した．この結果には少し誤りがあり，田村，室田との共同研究によって修正され [7] が発表されることになる．楊は研究を発展させ，定理の条件は弱く洗練された形になる [8]．離散不動点定理を，有限ゲームの均衡の存在に応用する試みはすでに [6] に見られるが，最近では [9] が双行列ゲームや n 人ゲームの均衡存在に対する離散不動点定理の応用など研究している．以降では，飯村と筆者が取り組んでいる，離散不動点定理の 1 つの形を用いて有限ゲームの均衡の存在を示す結果について紹介する．

5.2　単体分割と最適反応方向関数

4 節以降では，戦略集合は整数区間 $S_i = \{\underline{s}_i, \underline{s}_i + 1, \ldots, \overline{s}_i\}$ としていたことに注意する．ここで $\mathrm{conv}\, S \in \mathbb{R}^n$ を S の凸包とし，$\bar{S}_i = \{\underline{s}_i, \underline{s}_i + 1, \ldots, \overline{s}_i - 1\}$，$\bar{S} = \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n$ と表す．また $x^1, \ldots, x^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ を頂点とする n 次元単体を $\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1})$ で表す．ここで単体の集合族 $\mathcal{T}$ が (i)$\cup_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma = \mathrm{conv}\, S$, (ii)$\mathcal{T}$ の 2 つの単体の共通部分は，空かその 2 つの単体の共通面，(iii) すべての $\sigma(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathcal{T}$ の頂点 $x^1, \ldots, x^{n+1}$ は，ある整数点 $s \in \bar{S}$ を最小点とする超単位立方体 $\{0,1\}^n + s$ の頂点，という 3 つの条件を満たすとき，$\mathcal{T}$ を $\mathrm{conv}\, S$ の格子単体分割と呼ぶ．

格子単体分割には様々なものが考えられるが，以下に示す K_1 単体分割（Freudenthal 単体分割ともいう）は，もっとも標準的な単体分割である．

定義 5.1 (c.f. [10])**.**　$s \in \bar{S}$ と N の置換 $\pi : N \to N$ に対して，$\hat{\sigma}(s, \pi)$ を，以下で与えられる $s^0, \ldots, s^n$ を頂点とする単体 $\sigma(s^0, \ldots, s^n)$ とする．

$$s^0 = s, \quad s^i = s + \textstyle\sum_{k=1}^{i} e^{\pi(k)} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

このとき，すべての $s \in S^0$ とすべての置換 $\pi : N \to N$ に対する $\hat{\sigma}(s, \pi)$ の集合を，$\mathrm{conv}\, S$ の K_1 単体分割と呼ぶ．

例 5.1（単体分割）**.**　ここで表 3 のゲーム 3（$N = \{1, 2\}$，$S_1 = S_2 = \{1, 2, 3\}$）を考えよう．図 2 は，このゲームの K_1 単体分割を示したものである．例えば $s = (1, 1)$ とし，π を $\pi(1) = 2$，$\pi(2) = 1$ とすると $\hat{\sigma}(s, \pi)$ は $(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 2)$ を頂点とした単体（斜線で記した三角形）になる．すべての $s \in \bar{S}$ とすべての π を与えることで，$\mathrm{conv}\, S$ は 8 つの三角形に分割されることがわかる．

表 3　ゲーム 3

s1 \ s2	1	2	3
1	(0,2)	(1,1)	(2,0)
2	(1,1)	(1,1)	(1,1)
3	(2,0)	(1,1)	(0,2)

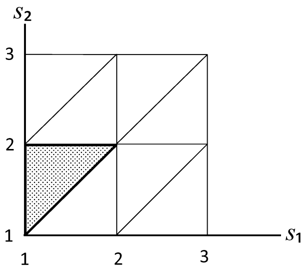

図 2　ゲーム 3 の K_1 単体分割

5.3　方向保存性

離散不動点定理では，単体分割を用いて関数に方向保存性という性質を定義し，方向保存性を満たす関数は不動点を持つことを示す．方向保存性は，有界閉凸集合上の関数の不動点定理における関数の連続性に相当しているといえなくもない．

方向保存性にはいくつかの定義があり，[8] では「単体局所総和方向保存性」という弱い条件による強い不動点定理が示されている．ここでは最適反応関数ではなく，最適反応「方向」関数と呼ばれる関数を定義し，さらに，その最適反応方向関数上の方向保存性を定義して，「不動点」ではなくその「ゼロ点」を議論するという方法をとる．これにより，後の凹ゲームへの応用を容易にするとともに，離散的な特徴だけで方向保存性を記述することができる．

関数 $b_i : S \to \{-1, 0, 1\}$ が，最適反応方向関数であるとは，

$$b_i(s) = \begin{cases} 0 & u_i(s) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}), \\ +1 & u_i(s) \neq \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}), \text{and} \\ & \quad \exists s_i' > s_i, \\ & \quad u_i(s_i', s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}), \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を満たすことをいう．任意の $i \in N$ について $b_i(s^*) = 0$ であることと，s^* が均衡であることは同値である．

定義 5.2.　プレイヤー i の最適反応方向関数 b_i が，$\mathrm{conv}\, S$ の格子単体分割 $\mathcal{T}$ に対して方向保存であると

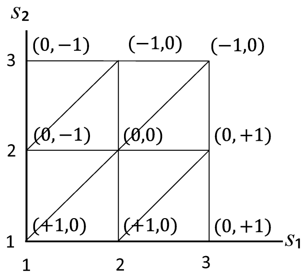

図 3　ゲーム 3 の各プレイヤーの最適反応方向関数

は，$\mathcal{T}$ に含まれる任意の単体 σ の中の任意の 2 つの頂点 s と s' において，

$$b_i(s)b_i(s') \geq 0$$

が満たされることである．

例 5.2（最適反応方向関数と方向保存性）．図 3 には，表 3 のゲーム 3 の各プレイヤーの最適反応方向関数の値が，各 $s \in S$ に対して，$(b_1(s), b_2(s))$ として記入してある．

プレイヤー 1，2 の最適反応方向関数は，方向保存であることが確かめられる．このゲームには均衡 $(2, 2)$ が存在する．

これまでの離散不動点定理の証明と同様の証明により，最適反応方向関数が任意の $i \in N$ について方向保存であれば，任意の $i \in N$ について $b_i(s^*) = 0$ となる $s^* \in S$ が存在することが証明できる．

定理 5.1.　もしある $\mathrm{conv}\, S$ の格子単体分割 $\mathcal{T}$ と，最適反応方向関数の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ が存在して，任意の $i \in N$ に対して，b_i が $\mathcal{T}$ に対して方向保存であるならば，ゲームには均衡が存在する．

6.　凹ゲーム

6.1　凹ゲームと方向保存性

このように最適反応方向関数が方向保存性を持てば，ゲームは均衡を持つが，どのようなゲームの最適反応方向関数が方向保存性を持つかがわからないと，応用には届かない．そこで 3 節で考えた連続変数のゲームと同じ道筋に沿って，利得が自分の戦略に関して凹関数となるゲームを分析する．

ここで $e^i \in \mathbb{R}^n$ を i 番目の単位ベクトルとし，$J \subseteq N$ に対して $e(J) = \sum_{j \in J} e^j$ とする．ここで $s + e^i$ は $(s_i + 1, s_{-i})$ という表記と同じである．$\Delta u_i(s) = u_i(s + e^i) - u_i(s)$ とする．ここで u_i が S_i 上で凹であるとは，すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ とすべての $s_i \in S_i$ において，$\Delta u_i(s) \geq \Delta u_i(s + e^i)$ が成り立つことをいう．ただし $s_i = \overline{s}_i$ の場合は $\Delta u_i(s) = -\infty$ としておく．すべての $i \in N$ に対して，u_i が S_i 上で凹のとき，ゲームは凹であるという．

ゲームが凹であれば最適反応方向関数の値と，差分 Δu_i の符号は「ほぼ」一致する（正確には少しずれるので，それを処理する必要がある）．ここで「K_1 単体分割において最適反応方向関数が方向保存性を持つ」という条件を，Δu_i に関する条件として書き直すことで，以下の定理が成立する．

定理 6.1.　ゲームが凹であり，なおかつ任意の $i \in N$ と $s + e(J) \in S$ を満たすような任意の $s \in S$ と $J \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して

$$\Delta u_i(s)\Delta u_i(s + e(J)) \geq 0 \tag{4}$$

が満たされるならばゲームは均衡を持つ．

定理 3.3 と定理 6.1 を比較すると，利得関数が自分の戦略に関して凹である部分は同じであり，定理 3.3 における S 上での連続性は，定理 6.1 の式 (4) に変わっている．式 (4) は，有限集合 S 上での，利得関数の「ある意味での連続性」に対応する条件といえなくもない．これを明確にするために，定理 6.1 を別の表現で表してみよう．$s \in S$ に対して $B_i(s)$ を

$$B_i(s) = \{s' \in S \mid s' = s + e(J)\ \forall J \subseteq N \setminus \{i\}\} \cap S$$

と定義する．また ϵ_i を

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} \min \{|\Delta u_i(s)| \mid |\Delta u_i(s)| \neq 0,\ s \in S\}.$$

とする．このとき定理 6.1 から次のことがいえる．

命題 6.1.　ゲームが凹であり，なおかつ任意の $i \in N$ と任意の $s \in S$，および $s' \in B_i(s)$ に対して

$$|\Delta u_i(s)| \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |u_i(s') - u_i(s)| \leq \epsilon_i \tag{5}$$

が満たされるならばゲームは均衡を持つ．

式 (5) は，すべての点 $s \in S$ に対して正側の近くのすべての点に対する利得関数の変化 $|u_i(s') - u_i(s)|$ が，小さく（自分の戦略を変化させたときの利得関数の変化（の最小値）の半分で）抑えることができるということを表していて，他者の戦略の変化に対して利得関数値が自分の戦略を変化させたときの利得関数の

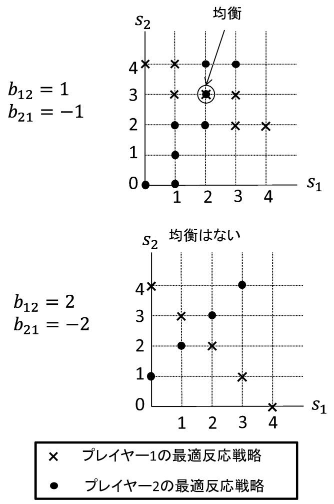

図 4 整数クールノーゲームの最適反応対応

変化（の最小値）と比べて，「それほど大きく変化しない」「ジャンプしない」という意味に解釈できる．

7. 整数クールノー競争への応用

ここで定理 6.1 の応用として，例 3.2 の差別化クールノー競争を考えてみよう．

例 7.1（整数クールノー競争）**.** 例 3.2 においては，生産量も価格も実数を取ると考えたが，実際には整数値を取ると考えてよいだろう．そこで，プレイヤー i の戦略集合を整数区間 $S_i = \{0, 1, \ldots, \overline{s}_i\}$ とする（$\overline{s}_i$ は正の整数とする）．また，価格も整数値を取るものとして逆需要関数 P_i は

$$P_i(s) = a_i + b_{ii}s_i + \left\lfloor \sum_{j \neq i} b_{ij}s_j \right\rfloor$$

で与えられると仮定する．ここで $\lfloor x \rfloor$ は $x \in \mathbb{R}$ 以下の最大の整数であるとし，a_i は正の整数，b_{ii} は負の整数とする．b_{ij} は整数ではなくてもよい．

上記の例において，自分以外の企業の生産量が 1 単位増えても，価格がせいぜい 1 単位しか変化しない程度に b_{ij} を十分小さいと考えよう．この場合には「他者の戦略の変化に対して利得関数値が自分の戦略を変化させたときの利得関数の変化（の最小値）と比べて，それほど大きく変化しない」という条件が満たされる．このことより次の結果を得る．

命題 7.1. もし任意の $i \in N$ において

$$\sum_{j \neq i} |b_{ij}| \leq 1. \tag{6}$$

が満たされれば，上記の例の整数クールノー競争は均衡を持つ．

例 7.2（整数クールノー競争の例）**.** 例 7.1 の整数クールノー競争を考える．ここで $N = \{1, 2\}$，$S_1 = S_2 = \{0, \ldots, 4\}$，$a_1 = 3$，$a_2 = 10$，$c_1 = c_2 = 2$ としよう．

このとき b_{12} と b_{21} の両方が正であれば（代替財），ゲームはポテンシャルゲームになる．また，両方が負であれば（補完財）ゲームは優モジュラゲームになる．したがって両ケースとも均衡が存在する．興味深いのは一方が正で，一方が負の場合である．

$b_{12} = 1$ かつ $b_{21} = -1$ の場合を考えよう．この場合は，(6) の条件が満たされるので均衡を持つ．これに対し，$b_{12} = 2$ かつ $b_{21} = -2$ のときは，条件が満たされず，均衡は存在しない．

図 4 は，両ケースの最適反応対応を表した図である．$b_{12} = 1$ かつ $b_{21} = -1$ の場合は，$s_1 = 2$，$s_2 = 3$ で最適反応対応が交わり均衡を持つことがわかる．$b_{12} = 1$ かつ $b_{21} = -1$ の場合は，最適反応対応が「すれ違って」しまい均衡が存在しない．

謝辞 本稿の執筆にあたり飯村卓也氏から有益なコメントをいただきました．ここに感謝いたします．もちろん誤りがあれば，それはすべて筆者の責任によるものです．

参考文献

[1] 渡辺隆裕，“初歩から学ぶゲーム理論（特集 はじめようゲーム理論），”オペレーションズリサーチ，**60**(6), 2015 (in press).
[2] J. Nash, “Non-cooperative games,” *Annals of Mathematics*, **54**, pp. 286–295, 1951.
[3] A. Mas-Colell, D. M. Whinston and J. R. Green, *Microeconomic theory*, Oxford University Press, 1995.
[4] D. M. Topkis, *Supermodularity and Complementarity*, Princeton University Press, 1998.
[5] 河瀬康志，牧野和久，“無秩序の代償と安定性の代償（特集 はじめようゲーム理論），”オペレーションズリサーチ，**60**(6), 2015 (in press).
[6] T. Iimura, “A discrete fixed point theorem and its applications,” *Journal of Mathematical Economics*, **39**, pp. 725–742, 2003.
[7] T. Iimura, K. Murota and A. Tamura, “Discrete fixed point theorem reconsidered,” *Journal of Mathematical Economics*, **41**, pp. 1030–1036, 2005.
[8] Z. Yang, “Discrete fixed point analysis and its applications,” *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **6**, pp. 351–371, 2009.
[9] 川崎英文，“離散不動点定理と単体分割，”数理解析研究所講究録，**1829**, pp. 139–148, 2013.
[10] Z. Yang, *Computing Equilibria and Fixed Points*, Kluwer Academic Publishers, 1999.