最小全域木問題のコスト分配に対する公理的アプローチ

楠木　祥文

本稿では，最小コスト全域木問題に対するコスト分配ルールについて解説する．本稿で扱う最小コスト全域木問題とは，複数のエージェントと一つのソースが存在し，各エージェントがソースへの供給路を構築しようとする状況である．供給路はエージェント／ソースを頂点とするグラフでモデル化され，頂点間の枝にはコストが割り当てられている．各エージェントは自身が支払うコストを小さくするために，協力して最小コスト全域木を構築し，エージェント間でコストを分担する．そのコスト分配に対する様々な方法（分配ルール）を紹介し，それらの性質を比較する．さらに，分配ルールの公理的特徴付けについても述べる．

キーワード：最小コスト全域木問題，分配ルール，既約形，協力ゲーム，公理的特徴付け

1. はじめに

本稿で議論する最小コスト全域木問題（以下，最小木問題と略記する）で扱うのは，複数のエージェントとソースが存在し，各エージェントがソースへの供給路を構築しようとする状況である．供給路はエージェント／ソースを頂点とするグラフでモデル化され，頂点間の枝にはコストが割り当てられている．路を構築するためには，それに含まれる枝のコストを支払う必要がある．また，枝の容量等は考慮せず，異なるエージェントが同じ枝を共有できると仮定する．この状況に対して，各エージェントは，自身が支払うコストを可能な限り小さくすることを目標にしている．そのためには，すべてのエージェントは協力して，最小コスト全域木（以下，最小木と略記する）を構築することが合理的である．本稿では，最小木のコストをエージェント間でどのように分配するかを議論していく．

最小木問題に対するコスト分配に関する早期の研究として，Claus と Kleitman [1] はいくつかの分配ルールを調査し，批判的に分析した．この研究を受けて，Bird [2] は最小木問題から協力ゲーム（提携形ゲーム）を定義し，最小木問題のコスト分配と協力ゲーム理論の解概念を関連付けた．これを最小木ゲームと呼ぶ．Bird は，最小木において各エージェントが直接自身に接続されているソース方向の枝のコストを負担する分配ルール（Bird ルール）が，最小木ゲームのコアに含まれることを示した．また，Bird はそのルールを特徴付けるために，最小木問題の既約形を導入した [2]．Aarts [3] は，既約形の場合，最小木ゲームは凹であること，Bird ルールの凸包がそのコアと一致することを示した．Bird の研究と同時期に，Claus と Granot [4]，Granot と Huberman [5] も最小木問題を協力ゲームとして定義し，そのコアが非空であることを証明した．

最適化問題と関係した協力ゲームとして，Owen の線形生産モデルから派生する線形生産ゲーム [6] がある．Granot [7] は，最小木問題を含む一般化線形生産モデルを提案し，そのゲームのコアが非空であるための条件を示した．線形生産モデルと同様に，一般化線形生産モデルの双対最適解からコア分配を求めることができる．

Feltkamp ら [8] は，最小木問題の分配ルールに対して公理的アプローチを導入し，Bird ルールの公理系を提案した．同時に，Feltkamp ら [9] は，Kruskal アルゴリズムに基づいた分配の集合を提案し，それが既約形のコアと一致することを示し，その集合の公理的特徴付けを行った．提案された分配の一つである ERO (Equal Remaining Obligations) 値の公理的特徴付けも提案している．この ERO 値は最小木問題の標準的な分配ルールと考えられ，folk ルールと呼ばれている．

Branzei ら [10] は，Kruskal アルゴリズムと関連した P(Potters) 値を提案し，その公理的特徴付けを行った．この P 値は folk ルールと一致する．Tijs ら [11] は，Kruskal アルゴリズムに基づいて枝のコストを分配する責任ルール (obligation rule) のクラスを提案し，ERO 値がその特殊ケースとなること，任意の責任ルールがコストとエージェントに関する 2 種類の単調性を満たすことを示した．

くすのき　よしふみ
大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻
〒565–0871 大阪府吹田市山田丘 2–1

他方で，Kar [12] は，最小木ゲームの Shapley 値によって最小木問題の分配を決定する Kar ルールを考え，その公理的特徴付けを行った．Dutta と Kar [13] は，Bird ルールがコストに関する単調性を満たさないことから，それを修正した Dutta–Kar ルールを提案した．

近年，最小木問題のコスト分配ルールの公理化に関する研究について，Bergantiños ら [14〜18] が精力的に活動している．Bergantiños と Vidal-Puga [15] は，既約形の Shapley 値によって定義される φ ルールを提案した．φ ルールは folk ルールと一致する．彼らは φ ルールの公理系を提案した．さらに，様々な性質について，φ ルールと，Bird，Kar，Dutta–Kar ルールを比較し，φ ルールの優位性を示した．Bergantiños と Vidal-Puga [17]，Lorenzo と Lorenzo-Freire [19] は，特殊な加法性を用いて，それぞれ φ ルールと責任ルールの公理系を提案した．Bergantiños と Kar [14] は，エージェントとコストの単調性を用いた責任ルールの公理系を提案している．Bergantiños と Vidal-Puga [18] は，新たな分配ルールのクラスを提案し，それが，エージェントとコストの単調性を満たすルール集合と一致することを示した．

folk ルールは φ ルールによる定義からわかるように既約形のみに依存する．Bogomolnaia と Moulin [20] はこの性質を批判し，folk ルールが持つ区分的線形性を基盤とした分配ルールのクラスを研究した．そのクラスで，コストに関する厳密な単調性を満たすルールを実現させた．

本稿では，上述の最小木問題に対する公理的アプローチを解説する．第 2 節では，最小木問題を導入し，その既約形を定義する．第 3 節では，協力ゲームを導入し，最小木問題から最小木ゲームを定義する．第 4 節では，種々の分配ルールを導入する．それらのルールが基本的な性質を満たすかも議論する．第 5 節では，folk ルールと，その一般化である責任ルールの公理系を紹介する．最後にまとめを述べる．

2. 最小コスト全域木問題

最小木問題を定義する．$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ を有限集合とし，その要素をエージェントと呼ぶ．0 をソースと呼び，$N_0 = N \cup \{0\}$ を定義する．N_0 が与えられると，その要素の対の全体集合 $[N_0]^2 = \{\{i, j\} \mid i, j \in N_0\}$ が定義できる．対 $(N_0, [N_0]^2)$ は完全無向グラフとなり，N_0 と $[N_0]^2$ の各要素を，それぞれ頂点と枝と呼ぶ．

路とは $P = \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{p-1}, i_p\}\}$ と表現できる非空の枝集合であり，かつ，その頂点要素の集合 $i_1, i_2, \ldots, i_p \in N_0$ は互いに異なる．特に，$k = i_1$，$l = i_p$ のとき，P は k から l への路という．互いに異なる三つ以上の $i_1, i_2, \ldots, i_p \in N_0$ に対して，$Q = \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{p-1}, i_p\}, \{i_p, i_1\}\}$ と表現できる枝集合を閉路と呼ぶ．$E \subseteq [N_0]^2$ を枝集合とする．グラフは対 (N_0, E) で与えられるが，N_0 が明らかな場合は，E をグラフと呼ぶ．頂点 $i, j \in N_0$ が E において連結しているとは，$i = j$, または，i から j への路となる E の部分集合が存在することをいう．$S \subseteq N_0$ の任意の 2 点 $i, j \in S$ が E において連結しているとき，S は E において連結しているという．E における連結の関係は N_0 上の同値関係となる．その各同値類を E の連結成分と呼ぶ．E の連結成分全体は N_0 の分割となる．閉路を持たない枝集合を森と呼ぶ．N_0 が連結となる森を（全域）木と呼ぶ．

$[N_0]^2$ の基数を m とする．非負実数ベクトル $c \in \mathbf{R}_+^{[N_0]^2}$ を N_0 に対するコストベクトルと呼ぶ．各枝 $e \in [N_0]^2$ に対して，c_e を e のコストと呼ぶ．N_0 に対するコストベクトル全体を $\mathcal{C}^{N_0}$ で表す．枝集合 $E \subseteq [N_0]^2$ のコストは，$c(E) = \sum_{e \in E} c_e$ で定義される．最小木とは，そのコストが最小となる木のことである．

最小木問題はエージェント／ソース集合 N_0 とコストベクトル $c \in \mathcal{C}^{N_0}$ のみで定まるので，(N_0, c) を最小木問題と呼ぶ．また，簡単のため，c のみを最小木問題と呼ぶ場合がある．問題 (N_0, c) の最小木のコストを $\mathrm{OPT}(N_0, c)$ と表記する．また，(N_0, c) の最小木の全体集合を $\mathcal{T}(N_0, c)$ と表記する．

最小木問題 (N_0, c) に対する分配とは，$\sum_{i \in N} x_i = \mathrm{OPT}(N_0, c)$ を満たすベクトル $x \in \mathrm{R}^N$ である．上記の性質を有効性 (efficiency) と呼ぶ．分配ルールとは，各問題 (N_0, c) に対して，その問題に対する分配 x を割り当てる関数である．本稿では様々な分配ルールを議論する．

コストベクトル c に対して，その既約形 $c^\star$ を定義する．既約形はコスト分配ルールにおいて重要な役割を果たす．$c^\star \in \mathcal{C}^{N_0}$ は，$T \in \mathcal{T}(N_0, c)$ を最小木として，$c^\star_e = \max_{e' \in P^T_e} c_{e'}$, $e \in [N_0]^2$ と与えられる．ここで，$P^T_{\{i,j\}}$ は，T の部分集合となる i から j への唯一の路である．この定義は最小木 T に依存しないことが知られている [3, 21]．また，$c = c^\star$ となるコストベクトルを既約コストベクトルと呼ぶ．N_0 に対する既約コストベクトル全体集合を $\mathcal{IC}^{N_0}$ で表す．最小木問題 (N_0, c) についても，$(N_0, c^\star)$ をその既約形と呼び，それ自身が既約形となる問題を既約最小木問題と呼ぶ．図 1 に最小木問題の例とその既約形を示す．左

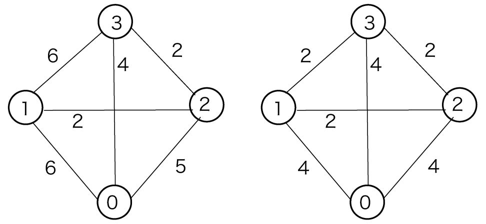

図 1 最小木問題と既約形

図の問題では，エージェントは $N=\{1,2,3\}$，コストは $(c_{01},c_{02},c_{03},c_{12},c_{13},c_{23})=(6,5,4,2,6,2)$ となっている．最小木は $\{\{0,3\},\{3,2\},\{2,1\}\}$，最小コストは 8 である．右図はその既約形である．

3. 協力ゲーム

Bird [2] は最小木問題に対するコスト分配方法を協力ゲーム理論を用いて議論するために，最小木問題に対して譲渡可能効用を持つ提携形ゲームと関連付けた．本稿では，譲渡可能効用を持つ提携形ゲームを簡単にゲームと呼ぶ．

ゲームは (N,v) で定義される．$N=\{1,2,\ldots,n\}$ は有限集合である．各要素 $i\in N$ はエージェントまたはプレイヤーと呼ばれ，N の非空な各部分集合 S は提携と呼ばれる．特に N は全体提携と呼ばれる．$v:2^N\to\mathbf{R}$, $v(\emptyset)=0$ は特性関数と呼ばれる．$v(S)$ は提携 S の利得やコストと解釈される．本稿ではゲームを最小木問題と関連付けるので，$v(S)$ はコストとする．エージェント集合が明らかな場合，特性関数 v のみをゲームと呼ぶ．各 $\emptyset\neq S,T\subseteq N$ について，$v(S\cup T)+v(S\cap T)\leq v(S)+v(T)$ を満たすゲームを，凹ゲームと呼ぶ．

ゲームの解とは，各ゲーム (N,v) に対して，n 次元実数ベクトルを割り当てる関数である．一点 $x\in\mathbf{R}^N$ のみを割り当てる解を一点解，集合 $X\subseteq\mathbf{R}^N$ を割り当てる解を集合解と呼ぶ．

代表的な一点解として，Shapley 値がある．Shapley 値の定義を与えるために，限界貢献度ベクトルを導入する．π を N に対する順列とする．$i=1,2,\ldots,n$ に対して $\pi(i)$ は i 番目のエージェントを表す．順列の全体集合を Π^N で表す．π の順列で，エージェント $i\in N$ より前のエージェントの集合を $\pi^i=\{j\in N\mid\pi^{-1}(j)\leq\pi^{-1}(i)\}$ で表す．π に関する (N,v) の限界貢献度ベクトルは $m_i^\pi(N,v)=v(\pi^i)-v(\pi^i\setminus\{i\})$ と定義される．限界貢献度ベクトルも (N,v) の解となる．(N,v) の Shapley 値 $\mathrm{Sh}(N,v)$ は，その限界貢献度ベクトルの平均で与えられる．

$$\mathrm{Sh}(N,v)=\frac{1}{|\Pi^N|}\sum_{\pi\in\Pi^N}m^\pi(N,v)\tag{1}$$

Shapley 値の性質として，凹ゲームの場合，その拡張がエージェント単調分配スキーム (population monotonic allocation scheme) となることが知られている．エージェント単調分配スキームとは，次の条件を満たすベクトル $x=(x_i^S)_{\emptyset\neq S\subseteq N,i\in S}$ である．

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in S}x_i^S=v(S),\ \text{for}\ \emptyset\neq S\subseteq N\\&x_i^S\geq x_i^T\ i\in S,\ \text{for}\ \emptyset\neq S\subseteq T\subseteq N\end{aligned}\tag{2}$$

命題 1 ([22])**.** (N,v) が凹ゲームならば，拡張された Shapley 値 $(\mathrm{Sh}(S,v|_S))_{\emptyset\neq S\subseteq N}$ はエージェント単調分配スキームである．ここで，各 $\emptyset\neq S\subseteq N$ について $v|_S$ は，$v|_S(T)=v(T)$, $T\subseteq S$ で与えられる．

代表的な集合解としてコア[1]がある．

$$C(N,v)=\left\{x\in\mathbf{R}^N\;\middle|\;\begin{array}{l}x(S)\leq v(S),S\subset N\\x(N)=v(N)\end{array}\right\}\tag{3}$$

ここで，$x(S)=\sum_{i\in S}x_i$ である．コアと Shapley 値の関係として，以下の命題がある．

命題 2 ([23])**.** 凹ゲーム (N,v) に対して，$\mathrm{Sh}(N,v)\in C(N,v)$ が成り立つ．

最小木問題を反映したゲームを定義する．エージェントの部分集合 $S\subset N$ が与えられたとき，コストベクトルの S_0 への制限 $c|_{S_0}=(c_e)_{e\in[S_0]^2}$ を定義する．$(S_0,c|_{S_0})$ を S で誘導された (N_0,c) の部分問題と呼ぶ．特性関数 v_c を次のように与えることにより，最小木ゲーム (N,v_c) を定義する．各 $\emptyset\neq S\subseteq N$ に対して $v_c(S)=\mathrm{OPT}(S_0,c|_{S_0})$ とする．

問題が既約の場合，最小木ゲームは凹となる．

命題 3 ([3, 16, 21])**.** $c\in\mathcal{IC}^{N_0}$ を既約コストベクトルとする．v_c は凹である．

4. 分配ルール

本節では種々の分配ルールを導入する．導入する分配ルールが，以下の六つの基本的な性質を満足するか

[1] 提携値が利得を表す場合は，定義の不等式が逆になる．

についても議論する．

定義 1． f を分配ルールとする．

- Core Selection (CS)：各問題 (N_0, c) に対して，$f(N_0, c) \in C(N_0, v_c)$ が成立する．
- Cost Monotonicity (CM)：二つの問題 (N_0, c) と (N_0, c') に対して，ある $i \in N_0$ と $j \in N_0$ で $c_{\{i,j\}} < c'_{\{i,j\}}$，それ以外で $c_e = c'_e, e \neq \{i, j\}$ ならば，$f_i(N_0, c) \leq f_i(N_0, c')$ となる．
- Continuity (CON)：各 N について，$f(N_0, c)$ はコストベクトル $c \in \mathcal{C}^{N_0}$ に関して連続である．
- Positivity (POS)：各問題 (N_0, c) に対して，$f(N_0, c) \geq 0$ が成立する．
- Equal Treatment Equality (ETE)：二つの問題 (N_0, c) と (N_0, c') と $i, j \in N$ に対して，すべての $k \in N_0$ について $c_{\{i,k\}} = c'_{\{j,k\}}$ ならば，$f_i(N_0, c) = f_j(N_0, c')$ となる．
- Polynomial Complexity (PC)：各問題 (N_0, c) に対して，$f(N_0, c)$ は，n に関する多項式時間で計算できる．

4.1 Bird ルール

Bird [2] は，最小木から簡単に求められる分配ルール（Bird ルール）を提案し，それが CS を満たすことを示した．$T \in \mathcal{T}(N_0, c)$ を最小木とする．$\rho^T(i)$ を 0 から i への路で i の直前の頂点とする．T に関する Bird ルールは $B_i^T(N_0, c) = c_{\{\rho^T(i), i\}}$ と定義される．$B^T(N_0, c)$ はコア $C(N_0, v_c)$ の要素であることが知られている [2, 5]．

問題に対して最小木が複数ある場合，上の Bird ルールによる分配を与えるためには，最小木を一つ選択する必要がある．この自由度を回避する一つの方法として，複数の最小木に関するルールの凸結合をとることが考えられる．次のルールは Dutta と Kar によって与えられた [13]．本稿ではこれを Bird ルールと呼ぶ．

$$B(N_0, c) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} B^{T^\pi(N_0, c)}(N_0, c) \qquad (4)$$

ここで，$T^\pi(N_0, c)$ は，Prim アルゴリズム [24] と順列 π で一意に決まる最小木である．Prim アルゴリズムでは，ソース 0 からはじめ，現在の部分木に最小コストの枝で接続できる節点を選択し，部分木を膨らませていく．最小コストで接続できる節点が複数ある場合，順列 π で若い番号の節点が選択される．

上述したとおり Bird ルール B は CS を満たす．定義から，明らかに Bird ルールは POS と ETE を満たす．Bird ルールが PC を満たすかは知られていない[2]．

命題 4（[2, 5, 16]）**．** Bird ルール B は CS，ETE，POS を満たす．

Bird ルールによる分配は最小木に依存するため，枝のコストに関して不連続に変化する．さらに，コスト単調性 CM を満たさないため，あるエージェントは自身が関係する枝のコストを上げることによって，そのエージェントが負担するコストを減らすことができる場合がある．

4.2 Kar ルール

Shapley 値は協力ゲームの理論における標準的な解（分配ルール）であり，最小木問題が協力ゲームと関連付けられることから，Shapley 値を用いた分配ルールを考えることは自然である．

$$K(N_0, c) = \mathrm{Sh}(N_0, v_c) \qquad (5)$$

この分配ルールは Kar [12] によって提案されたため，Kar ルールと呼ばれる．さらに，Kar はこのルールの公理的特徴付けも提案している [12]．

Kar ルールは CM を満たし，また，Shapley 値に基づくため CON と ETE を満たす．

命題 5（[16]）**．** Kar ルール K は CM，CON，ETE を満たす．

しかし，Shapley 値がそうであるように，一般に，Kar ルールは POS と CS を満たさない．特に，POS を満たさないので，問題によっては，Kar ルールによる分配によって利益を得るエージェントが存在する．

4.3 folk ルール

folk ルールは複数の研究者によって様々な視点から定義・提案されている [9, 10, 16, 20]．ここでは，Bergantiños と Vidal-Puga [16] による既約形を用いた定義を紹介する．folk ルール F は既約最小木ゲームの Shapley 値によって定義される．

$$F(N_0, c) = \mathrm{Sh}(N_0, v_{c^\star}) \qquad (6)$$

folk ルールが CS を満たすことは，命題 3 より $(N_0, v_{c^\star})$ が凹ゲームであること，$C(N_0, v_{c^\star}) \subseteq C(N_0, v_c)$，命題 2 より凹ゲームのとき Shapley 値はコアに含まれることからわかる．コストベクトルからその既約形への変換の性質と，Kar ルール（Shapley

[2] Bogomolnaia らは最小木に関する Bird ルールに一様の重みを与えて平均を取ったルールが PC を満たすことを示している [20].

値）の性質から，folk ルールが CM，CON，ETE も満たすこともわかる．次節で述べる責任ルールは，folk ルールの一般化であるが，責任ルールの定義から，folk ルールが POS と PC を満たすことがわかる．

命題 6（[9, 16, 20]）**.** folk ルール F は CS，CM，CON，POS，ETE，PC を満たす．

つまり，folk ルールは上述のすべての性質を満たす．さらに，このルールは，後で述べるエージェントとコストベクトルに関する二つの単調性と，コストベクトルに関する特殊な線形性を持つ．これらの理由により，folk ルールは最小木問題に対する標準的な分配ルールと考えられる．

4.4 責任ルール

Tijs ら [11] は分配ルールのクラスとして責任ルール (obligation rule) を提案した．責任ルールでは，Kruskal アルゴリズム [24] によって最小木が構築される過程で，エージェントのコスト負担が決定される．アルゴリズムでは最小木の枝が逐次的に選択されるが，あらかじめ決められたプロトコルに従って，選択された枝に対する各エージェントの責任度が決まり，負担するコストが計算される．

責任ルールの定義を述べる．はじめに，責任関数 (obligation function) を与える．単体を $\Delta(N) = \{x \in \mathbf{R}^N_+ \mid x(N) = 1\}$ で表し，$S \subseteq N$ に対する部分単体 $\Delta(S) = \{x \in \Delta(N) \mid x(S) = 1\}$ で表す．責任関数は，$S \subset T \subseteq N$ と $i \in S$ に対して，$o_i(S) \leq o_i(T)$ を満たす $o(S) \in \Delta(S), \emptyset \neq S \subseteq N$ である．$o_i(S)$ は，アルゴリズムの過程で集合 S が連結した時点での $i \in S$ の残余責任度であると考えられる．

責任関数 o が与えられると，N_0 の各分割 θ に対して責任写像 (obligation map) $\hat{o}(\theta) = \sum_{S \in \theta, S \not\ni 0} o(S)$ が定義される．$\theta(i)$ を i を含む θ の成分とする．ここで，任意の $i \in N$ に対して，$0 \in \theta(i)$ とすると，$\hat{o}_i(\theta) = 0$ となることに注意する．

与えられた責任関数 o に対して，責任ルールを定義する．まず，Kruskal アルゴリズムによって得られた最小木の枝を，アルゴリズムで選択された順に $e_1, e_2, \ldots, e_n$ と並べる．$c_{e_1} \leq c_{e_2} \leq \cdots \leq c_{e_n}$ となる．グラフ $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ の連結成分による N_0 の分割を θ^{k+1} とする．責任ルール $\phi^{\hat{o}}(N_0, c)$ は以下のように求まる．

$$\phi^{\hat{o}}(N_0, c) = \sum_{k=1}^{m} c_{e_k} (\hat{o}(\theta^k) - \hat{o}(\theta^{k+1})) \tag{7}$$

この値は枝の選択 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ に依存しない [11].

任意の責任関数 o に対する責任ルール $\phi^{\hat{o}}$ は既約形のコアに含まれる [9] ので，CS を満たす．また，その定義から，$\phi^{\hat{o}}$ は CM，CON，POS，PC を満たすことがわかる．

命題 7（[9, 19]）**.** 責任ルール $\phi^{\hat{o}}$ は CS，CM，CON，POS，PC を満たす．

一般の責任ルールは ETE を満たさないが，次の責任関数から生成される ERO (Equal Remaining Obligation) ルールは ETE を満たす．

$$o^*_i(S) = \begin{cases} 1/|S| & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases} \tag{8}$$

さらに，Bergantiños と Kar [14] は，ERO ルールは ETE を満たす唯一の責任ルールであること，また，それは folk ルールと一致することを示した．

ここで分配ルールに対する新たな性質を導入する．

定義 2. f を分配ルールとする．

- Piece-wise Linearity (PL)：二つの問題 (N_0, c), (N_0, c') に対して，枝の順列 σ が存在して，$c_{\sigma(1)} \leq c_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq c_{\sigma(m)}$ かつ $c'_{\sigma(1)} \leq c'_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq c'_{\sigma(m)}$ と共通に昇順に並べることができるならば，二つの非負の実数 $a, a' \geq 0$ に対して $f(N_0, ac + a'c') = af(N_0, c) + a'f(N_0, c')$ となる．
- Strong Cost Monotonicity (SCM)：二つの問題 (N_0, c) と (N_0, c') に対して，$c \leq c'$ ならば $f(N_0, c) \leq f(N_0, c')$ である．
- Population Monotonicity (PM)：各問題 (N_0, c) に対して，$(f(S_0, c|_{S_0}))_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ は (N, v_c) におけるエージェント単調分配スキームである．

責任ルールは，その定義から，PL を満たすことがわかる．また，Tijs ら [11] は責任ルールが SCM と PM を満たすことを示した．

命題 8（[10, 11]）**.** 任意の責任ルールは PL，SCM，PM を満たす．

責任ルールの特徴的な性質として，以下の Reductionism が挙げられる．

定義 3. f を分配ルールとする．二つの問題 (N_0, c), (N_0, c') に対して，$c^\star = (c')^\star$ ならば $f(N_0, c) = f(N_0, c')$ であるとき，f は Reductionism (RED) を

満たすという．ここで，$c^\star$ と $(c')^\star$ はそれぞれ c と c' の既約形である．

SCM と分配の有効性より RED を導くことができるので，すべての責任ルールは RED を満たす．

5. 分配ルールの公理的特徴付け

本節では folk ルールとその一般化である責任ルールの公理的特徴付けについて紹介する．folk ルールの公理系は，Feltkamp ら [9]，Branzei ら [10]，Bergantiños と Vidal-Puga [16, 17] によって提案されている．責任ルールの公理系は，Lorenzo と Lorenzo-Freire [19]，Bergantiños と Kar [14]，Bergantiños ら [25] によって提案されている．

分配ルールの形式に大きく影響する公理として，PL と RED があるが，責任ルールは PL と，RED を強めた公理である SCM を満たす．さらに，分配ルールが責任関数の部分集合に関する単調性を持つためには PM が十分となる．これらは責任ルールの公理系となる．

定理 1 ([14])**．** f を分配ルールとする．f が PL，SCM，PM を満たすとき，かつそのときに限り，責任関数 o が存在して，$f = \phi^{\hat{o}}$ となる．

この三つの公理が folk ルールの十分条件になることを簡単に述べる．PL から，0-1 コストの最小木問題に対して分配ルールを与えれば，問題全体の分配ルールが定まる．SCM から導出される RED から，0-1 コストの最小木問題に対する分配ルールは，その連結成分による分割のみに依存する．PM から，分配ルールは非負性が保証されない責任関数による責任ルールになる．最後に，PM と SCM から責任関数は非負となる．

Bergantiños と Kar [14] は，定理 1 の PL を弱めた公理系も示した．次の公理を導入する．

定義 4． f を分配ルールとする．二つの最小木問題 (N_0, c) と (N_0, c') に対して，$c_{\{0,i\}} = \max\{c_e \mid e \in [N_0]^2\}$ かつ $c'_{\{0,i\}} = \max\{c'_e \mid e \in [N_0]^2\}$ がすべての $i \in N$ について成り立つならば，任意の非負の $a \geq 0$ について，$f_i(N_0, c + ab^N) - f_i(N_0, c) = f_i(N_0, c' + ab^N) - f_i(N_0, c')$ が各 $i \in N$ で成り立つとき，f は CSEC (Constant Share of Extra Cost) を満たすという．ここで，$b^N \in \mathcal{C}^{N_0}$ は，すべての $i \in N$ について $\{i, 0\}$ 成分の値が 1 であり，その他は 0 であるコストベクトルである．

CSEC は，各エージェントについて，ソースに接続するコストが他のエージェントに接続するコスト以上であり，さらに，ソースと接続するコストが全エージェントで等しい状況ならば，ソースとの接続コストがさらに一定値増加したとき，各エージェントのコストの増加分は問題に依存しないことを要請している．明らかに PL は CSEC を導く．

定理 2 ([14])**．** f を分配ルールとする．f が CSEC，SCM，PM を満たすとき，かつそのときに限り，責任関数 o が存在して，$f = \phi^{\hat{o}}$ となる．

三つの公理が責任ルールの十分条件となることを簡単に述べる．RED から既約問題 $(N_0, c^\star)$ に対する分配のみを考えればよい．既約問題は，PM によりエージェントの少ない既約問題に分解できるか，または，CSEC の前提条件を満たす．CSEC の前提条件を満たせば，PM を適用できる既約問題と，責任関数 $o(N)$ を定める問題 (N_0, b^N)[3] に分解できる．このように PM と CSEC を適用していくと，結局，責任関数を定める問題のみに分解され，分配ルールは責任ルールとなる．ここで，責任関数の非負性と単調性は，SCM と PM から保証される．

この公理系に ETE を加えると，folk ルールの公理系になる．このとき，ETE があるので，分配の非負性を考慮する必要がなく，SCM を RED に弱めることができる．さらに，ETE のために，責任関数の単調性を考慮する必要がなくなり，PM を次の Separability に弱めることができる．

定義 5． f を分配ルールとする．各最小木問題 (N_0, c) と N の分割 $\{S, T\}$ に対して，$\mathrm{OPT}(N_0, c) = \mathrm{OPT}(S_0, c|_{S_0}) + \mathrm{OPT}(T_0, c|_{T_0})$ が成り立つならば，

$$f_i(N_0, c) = \begin{cases} f_i(S_0, c|_{S_0}) & i \in S \\ f_i(T_0, c|_{T_0}) & i \in T \end{cases} \tag{9}$$

となるとき，f は SEP (Separability) を満たすという．

SEP は，共通部分を持たない二つのグループ S と $N \setminus S$ が協力してネットワークを構築したとき，その全体のコストが協力しなかった場合と変化しなければ，コスト分配も変化しないことを要請する．明らかに PM から SEP が導出できる．

定理 3 ([15])**．** f を分配ルールとする．f が CSEC，RED，SEP，ETE を満たすとき，かつそのときに限

[3] $o(N) = f(N_0, b^N)$ とする．

り，$f = F$ となる．

6. おわりに

本稿では，最小木問題のコスト分配に対する公理的アプローチを解説した．様々な分配ルールを紹介したが，その中で folk ルールは，多くの望ましい性質を満たし，さらに，区分的線形性 (PL)，強コスト単調性 (SCM)，エージェント単調性 (PM) および平等性 (ETE) という妥当な公理によって特徴付けられるため，最小木問題に対する標準的な分配ルールであるといえる．しかし，folk ルールは，既約主義 (RED) を満たすため，問題によっては合理的ではない分配を与える [20]．

folk ルールでは最小木問題を既約形に帰着させてから分配を求めている．既約形の場合，分配ルールの性質の議論が非常に容易になる．他の最適化問題に対するコスト分配に対しても，この既約形によるアプローチを適用できるかは今後の課題として挙げられる．

謝辞　本稿の執筆にあたり，有意義な議論をしていただいた，大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻の谷野哲三教授に感謝の意を表す．

参考文献

[1] A. Claus, D. J. Kleitman, “Cost allocation for a spanning tree,” *Networks*, **3**, pp. 289–304, 1973.
[2] C. G. Bird, “On cost allocation for a spanning tree: A game theoretic approach,” *Networks*, **6**, pp. 335–350, 1976.
[3] H. Aarts and T. Driessen, “The irreducible core of a minimum cost spanning tree game,” *Mathematical Methods of Operations Research*, **38**, pp. 163–174, 1993.
[4] A. Claus and D. Granot, “Game theory application to cost allocation for a spanning tree,” Working Paper No. 402, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, 1976.
[5] D. Granot and G. Huberman, “Minimum cost spanning tree games,” *Mathematical Programming*, **21**, pp. 1–18, 1981.
[6] G. Owen, “On the core of linear production games,” *Mathematical Programming*, **9**, pp. 358–370, 1975.
[7] D. Granot, “A generalized linear production model: A unifying model,” *Mathematical Programming*, **34**, pp. 212–222, 1986.
[8] V. Feltkamp, S. Tijs and S. Muto, “Bird’s tree allocations revisited,” Discussion Paper, Tilburg University, Center for Economic Research, 1994.
[9] V. Feltkamp, S. Tijs and S. Muto, “On the irreducible core and the equal remaining obligations rule of minimum cost spanning extension problems,” Discussion Paper, Tilburg University, Center for Economic Research, 1994.
[10] R. Branzei, S. Moretti, H. Norde and S. Tijs, “The P-value for cost sharing in minimum cost spanning tree situations,” *Theory and Decision*, **56**, pp. 47–61, 2004.
[11] S. Tijs, R. Branzei, S. Moretti and H. Norde, “Obligation rules for minimum cost spanning tree situations and their monotonicity properties,” *European Journal of Operational Research*, **175**, pp. 121–134, 2006.
[12] A. Kar, “Axiomatization of the shapley value on minimum cost spanning tree games,” *Games and Economic Behavior*, **38**, pp. 265–277, 2002.
[13] B. Dutta and A. Kar, “Cost monotonicity, consistency and minimum cost spanning tree games,” *Games and Economic Behavior*, **48**, pp. 223–248, 2004.
[14] G. Bergantiños and A. Kar, “On obligation rules for minimum cost spanning tree problems,” *Games and Economic Behavior*, **69**, pp. 224–237, 2010.
[15] G. Bergantiños and J. J. Vidal-Puga, “A fair rule in minimum cost spanning tree problems,” *Journal of Economic Theory*, **137**, pp. 326–352, 2007.
[16] G. Bergantiños and J. J. Vidal-Puga, “The optimistic TU game in minimum cost spanning tree problems,” *International Journal of Game Theory*, **36**, pp. 223–239, 2007.
[17] G. Bergantiños and J. J. Vidal-Puga, “Additivity in minimum cost spanning tree problems,” *Journal of Mathematical Economics*, **45**, pp. 38–42, 2009.
[18] G. Bergantiños and J. J. Vidal-Puga, “Characterization of monotonic rules in minimum cost spanning tree problems,” *International Journal of Game Theory*, 2014. DOI: 10.1007/s00182-014-0456-4
[19] L. Lorenzo and S. Lorenzo-Freire, “A characterization of Kruskal sharing rules for minimum cost spanning tree problems,” *International Journal of Game Theory*, **38**, pp. 107–126, 2009.
[20] A. Bogomolnaia and H. Moulin, “Sharing a minimal cost spanning tree: Beyond the folk solution,” *Games and Economic Behavior*, **69**, pp. 238–248, 2010.
[21] S. Tijs, S. Moretti, R. Branzei and H. Norde, “The bird core for minimum cost spanning tree problems revisited: Monotonicity and additivity aspects,” *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **563**, pp. 305–322, 2006.
[22] Y. Sprumont, “Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility,” *Games and Economic Behavior*, **2**, pp. 378–394, 1990.
[23] L. S. Shapley, “Cores of convex games,” *International Journal of Game Theory*, **1**, pp. 11–26, 1971.
[24] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 5th ed., Springer-Verlag, 2012.
[25] G. Bergantiños, L. Lorenzo and S. Lorenzo-Freire, “A generalization of obligation rules for minimum cost spanning tree problems,” *European Journal of Operational Research*, **211**, pp. 122–129, 2011.

