

一般化 Ho-Lee モデルに基づく ゲーム・オプション債の価格評価 —確率ゲームによるアプローチ—

落合 夏海, 大西 匡光

離散時間の金利の期間構造モデルとして一般化 Ho-Lee モデルを採用し、ゲーム・オプション債の無裁定価格評価を考える。問題を、リスク中立確率測度下の 2 項格子上の確率ゲームとして定式化し、その無裁定価格、発行者と保有者の早期行使戦略を導出する。また、債券価格のボラティリティ、等のパラメータの変化に関する感度分析を行い、さらに、金利変動に起因する債券価格変動のリスクを評価するために、デュレーション、キー・レート・デュレーション、等を求め、通常のクーポン債、コーラブル債、ブッタブル債との比較を行う。

キーワード：ゲーム・オプション債、一般化 Ho-Lee モデル、停止ゲーム、確率ゲーム

1. はじめに

債券とは、国、企業、等が資金調達のための目的のために発行する証券の一種で、通常のクーポン債は、その満期までの一定の期間のクーポン（利子）払いと満期における元本の償還を保証するものである。それに対して、発行者（書き手、売り手）に、一定の代価（コール価格）のもとで、満期以前の早期の償還の権利を許すものをコーラブル債、逆に、保有者（買い手）に、一定の代価（プット価格）のもとで、満期以前の早期の償還を要求する権利を許すものをブッタブル債と言う。コーラブル債、ブッタブル債は、それぞれ発行者、保有者に通常のクーポン債を原資産とするコール・オプション、プット・オプションを付与したものと考えることができる。

本稿では、保有者と発行者の双方に、それぞれコール・オプションとプット・オプションを付与した、いわゆるゲーム・オプション債の無裁定価格評価を考える。

離散時間の金利の期間構造モデルとして一般化 Ho-Lee モデルを採用し、問題をリスク中立確率測度下の 2 項格子上の確率ゲームとして定式化すれば、ゲーム・オプション債の無裁定価格は全体ゲームの値として求められ、債券の発行者と保有者の合理的な早期行使戦略と早期行使領域はゲームの鞍点均衡戦略として導出される。

また、債券価格のボラティリティ、等のパラメータの変化に関する感度分析を行い、さらに、金利変動に起因する債券価格変動のリスクを評価するために、デュレーション、キー・レート・デュレーション、等を求め、通常のクーポン債、コーラブル債、ブッタブル債との比較を行う。

2. 一般化 Ho-Lee モデル

一般化 Ho-Lee モデルは、無裁定条件を満たす離散時間の金利の期間構造モデルであり、債券価格の確率的変動を、再結合する 2 項格子構造を用いて表現する [1]。時刻 n 、状態 i に対応する 2 項格子上のノードを (n, i) （ただし、 $0 \leq n \leq N$, $0 \leq i \leq n$, N は計画期間とする）、また、ノード (n, i) における T 期間の割引債価格を、 $P(n, i; T)$ と表記する。モデルにおける金利変動の不確実性の大きさは、 $\delta(n, i; T)$ で表され、

$$\delta(n, i; T) = \frac{P(n+1, i+1; T)}{P(n+1, i; T)} \quad (1)$$

により定義される。(1) 式は つぎの時刻での債券価格の比率であり、つまり、 T 期間の 2 項木の変動幅を表す。一般化 Ho-Lee モデルにおける、この不確実性の源泉である $\delta(n, i; T)$ を、2 項ボラティリティと呼ぶ。一般化 Ho-Lee モデルは、最初の無裁定期間構造モデルである Ho-Lee モデルの拡張である [2, 3]。Ho-Lee モデルでは、2 項ボラティリティは時刻と状態から独立な定数を仮定していた。一方、一般化 Ho-Lee モデルでは、各ノードごとに異なる 2 項ボラティリティを

用いてよい。ノード (n, i) での 1 期間 2 項ボラティリティは,

$$\delta(n, i; 1) = \exp\left(-2\sigma(n) \min(R(n, i; 1), R) \Delta t^{3/2}\right) \quad (2)$$

で与えられる。ここで, $R(n, i; 1)$ はノード (n, i) での 1 期間金利, R は閾値金利, Δt は 1 期間の区間を表し, $\sigma(n)$ は, 金利ボラティリティの期間構造を表す関数で,

$$\sigma(n) = (\sigma_0 - \sigma_\infty + \alpha_0 n) \exp(-\alpha_\infty n) + \alpha_1 n + \sigma_\infty \quad (3)$$

によって与えられる。(3) 式におけるパラメータ σ_0 , σ_∞ , α_0 , α_1 , α_∞ は, モデル価格が市場で観測されるスワップション価格, 等と整合的になるように推定される値である。

続いて, ノード (n, i) での残存期間 T の 2 項ボラティリティは,

$$\delta(n, i; T) = \delta(n, i; 1) \delta(n+1, i; T-1) \times \left(\frac{1 + \delta(n+1, i+1; T-1)}{1 + \delta(n+1, i; T-1)} \right) \quad (4)$$

で与えられる。(4) 式は, モデルにおける無裁定条件を表し, 初期時刻でのイールド・カーブに対して, モデルから求まる金利の期間構造が, 現在の金利の期間構造と正確に整合するための条件を与える。

(2) 式から (4) 式によって 2 項ボラティリティが与えられると, ノード (n, i) での 1 期間割引債価格は,

$$P(n, i; 1) = \frac{P(0, 0; n+1)}{P(0, 0; n)} \times \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \delta(k-1, 0; n-k)}{1 + \delta(k-1, 0; n-k+1)} \right) \times \prod_{j=0}^{i-1} \delta(n-1, j; 1) \quad (5)$$

として与えられ, また, ノード (n, i) での T 期間割引債価格は,

$$P(n, i; T) = \frac{P(0, 0; n+T)}{P(0, 0; n)} \times \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + \delta(k-1, 0; n-k)}{1 + \delta(k-1, 0; n-k+T)} \right) \times \prod_{j=0}^{i-1} \delta(n-1, j; T) \quad (6)$$

として与えられる。ここで, (5), (6) 式の右辺において, 第 1 項は, 初期時刻のイールド・カーブから求め

られる所与の部分, 第 2 項は, 時刻に関する 2 項ボラティリティの積, 第 3 項は, 状態に関する 2 項ボラティリティの積を表す。上の (2) 式から (6) 式を再帰的に解くことによって, 2 項格子の全てのノード上での金利の期間構造を導出することができる。

3. 停止ゲーム

3.1 ゲーム・オプション債

一般に, コーラブル債とは, 債券の発行者に対して, 満期前に予め定められた価格 (コール価格) で債券を買い戻す権利を与えるものである。もし発行者がその権利を行使すれば, 債券の保有者からコール価格でその債券を買い戻すことができる。この場合, 債券の発行者はコール・オプションの買い手, 保有者はコール・オプションの売り手となり, 債券の保有者は発行者側の要求に応じる義務を持つ。一方, プットブル債とは, 債券の保有者に対して, 債券の発行者に予め定められた価格 (プット価格) で満期前の早期の買い戻しを要求する権利を与えるものである。もし債券の保有者が権利を行使すれば, 発行者側はプット価格でその債券を買い戻さなければならない。この場合, 債券の保有者はプット・オプションの買い手, 発行者は売り手となるので, 発行者は保有者の要求に応じる義務を持つ。

本稿では, 債券の保有者と発行者の両者に対して, 早期行使に関する条項が付与される債券を考える。本稿では, これを, ゲーム・オプション債と呼ぶことにする。

当該債券に関わる時刻列を

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \quad (7)$$

とおく。ここで, t_0 は債券の初期時刻, $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ は債券のクーポン払い時刻, t_N は債券の満期時刻とする。債券の保有者と発行者は, それぞれクーポン払い時刻 t_n ($n \in \{n^*, n^*+1, \dots, N-1\}$) で権利行使できると仮定する。ただし, t_{n^*} は予め定められた最初の権利行使可能時刻である。一般に, 初期時刻から最初の権利行使可能時刻までの期間 $t_{n^*} - t_0$ はプロテクション期間と呼ばれる。もし, 債券の発行者と保有者のどちらか一方, もしくは両者が, ある権利行使可能時刻 t_n で権利を行使すれば, 債券の保有者はつぎのクーポン払い時刻 t_{n+1} に発行者から対応する利得を受け取る。表記の簡単化のため, 以降では, 時刻 t_n を, その時刻インデックス n によって表すことにする。

さらに行使価格として, 債券の発行者がノード (n, i)

で行使した場合に、保有者に支払うコール価格を $C(n, i)$ とする。一方、債券の保有者がノード (n, i) で行使した場合に、保有者が受け取るプット価格を $P(n, i)$ とする。一般に、 $P(n, i) \leq C(n, i)$ が成り立つ。さらに、債券の保有者と発行者が、ノード (n, i) で同時に行使した場合、保有者が受け取る価格を $\varphi(n, i)$ とする。ただし、

$$\begin{aligned} P(n, i) &\leq \varphi(n, i) \leq C(n, i), \\ n &= n^*, n^* + 1, \dots, N - 1, \\ i &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

を仮定する。

3.2 確率ゲームによるアプローチ

本節では、上記のゲーム・オプション債の価格評価問題を 2 人ゼロ和停止ゲームと捉える。ゲームのプレイヤーは、債券の保有者と発行者であり、それぞれが権利行使のタイミング（停止時刻）を戦略的に選択する。さらに、我々は、この停止ゲームを 2 項格子上の 2 人ゼロ和の確率ゲームもしくは Markov ゲームとして定式化する [4, 5]。

権利行使可能なノード (n, i) ($n \in \{n^*, n^* + 1, \dots, N - 1\}$) において、債券の保有者が取る純粋戦略（行動）を x 、発行者が取る純粋戦略（行動）を y とすると、それらは 2 つの純粋戦略からなる戦略集合 $S := \{\text{権利を行使する (E)}, \text{権利を行使しない (N)}\}$ から選ばれる。ノード (n, i) で純粋戦略の組 (x, y) が選ばれるとき、債券の発行者から保有者へ支払われる利得関数を $A(x, y; n, i)$ とする。もし権利行使可能なノード (n, i) で権利行使された場合、債券の保有者は、2 人のプレイヤーの行動に依存して決まるつぎの利得：

$$A(x, y; n, i) = \begin{cases} C(n, i) + c, & \text{発行者のみが権利行使;} \\ P(n, i) + c, & \text{保有者のみが権利行使;} \\ \varphi(n, i) + c, & \text{両者が同時に権利行使} \end{cases}$$

を、つぎのクーポン払い時刻 $n + 1$ で受け取る。ここで、 c は債券の（固定）クーポンを表す（ノード (n, i) に依存する変動クーポン $c(n, i)$ としても、以降の分析・計算上、何ら差し支えはない）。

もし、ノード (n, i) ($n \in \{n^*, n^* + 1, \dots, N - 1\}$) において、いずれのプレイヤーも権利行使しなければ、ゲームはつぎの時刻 $n + 1$ へと進行する。

以上から、債券の保有者と発行者は、権利行使可能

な各ノード (n, i) において、その利得と状態推移の構造が金利市場の状態と 2 人のプレイヤーの戦略（行動）に依存する、2 人ゼロ和のステージ・ゲームに直面すると考えられる。このとき、債券の保有者は利得を最大化、債券の発行者は利得を最小化するように行動を選択し、それらの行動選択の規則が、それぞれのプレイヤーの停止戦略（権利行使戦略）を構成する。

さて、一般に、利得行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$) で定義される 2 人ゼロ和ゲーム（行列ゲーム）が与えられるとき、ゲームの値を、

$$val[A] := \min_{q \in \Delta^n} \max_{p \in \Delta^m} p^\top A q = \max_{p \in \Delta^m} \min_{q \in \Delta^n} p^\top A q \quad (9)$$

によって定義する。上式の 2 番目の等号は、von Neumann のミニ・マックス定理による。ここで、 p は行プレイヤーの混合戦略を表す m 次元ベクトル、 q は列プレイヤーの混合戦略を表す n 次元ベクトルとし、 Δ^m, Δ^n は、それぞれのプレイヤーの全ての混合戦略の集合である。

このとき、ノード (n, i) におけるゲーム・オプション債の値を $V(n, i)$ とすると、この確率ゲームの解は、動的計画法の最適性の原理にしたがって、以下の最適性方程式を、時間に関してバックワードに解くことにより求めることができる。

最適性方程式。

$$\begin{aligned} V(n, i) &= F, \\ n &= N, i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V(n, i) &= \rho(n, i; 1) \\ &\times \left\{ val \begin{bmatrix} \varphi(n, i) & P(n, i) \\ C(n, i) & \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}) | (n, i)] \end{bmatrix} + c \right\}, \\ n &= N - 1, N - 2, \dots, n^*, i = 0, 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V(n, i) &= \rho(n, i; 1) \{ \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1}) | (n, i)] + c \}, \\ n &= n^* - 1, n^* - 2, \dots, 0, i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 F は債券の元本、 $\rho(n, i; 1)$ はノード (n, i) での 1 期間割引因子であり、これは一般化 Ho-Lee モデルにもとづく 1 期間割引債価格である。また、 $\mathbb{Q}$ はモデルにおけるリスク中立確率測度、 $\mathbb{E}^Q[\cdot | (n, i)]$ は、 $\mathbb{Q}$ の下でノード (n, i) を条件とする期待値演算子、 I_{n+1} は、つぎの時刻 $n + 1$ でのランダムな金利の状態を表す。

権利行使可能なノード (n, i) では、2 人のプレイヤー

の行動選択の問題は、(11) 式内に現れる 2 人ゼロ和ゲーム（行列ゲーム）：

$$\begin{bmatrix} \varphi(n, i) & P(n, i) \\ C(n, i) & \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1})|(n, i)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

を解く問題に帰着される。ここで、債券の保有者は利得最大化を行うので行プレイヤー、債券の発行者は利得最小化を行うので列プレイヤーとする。

以上から、ゲーム・オプション債の価格評価のための停止ゲームは、満期時刻 $n = N$ から初期時刻 $n = 0$ まで、時刻 n に関してバックワードに、最適性方程式 (10)–(12) に現れる行列ステージ・ゲーム (13) を効率的に解くことができれば、全体ゲームを解くことができ、最終的には初期時刻でのゲーム・オプション債の無裁定価格と、債券の保有者と発行者の最適行使戦略を同時に導くことができる。

つぎに、2 項格子の権利行使可能な各ノード上でのステージ・ゲームにおける均衡戦略プロファイルを示す。一般に、2 人ゼロ和ゲームの鞍点均衡（ミニ・マックス均衡）は、純粋戦略を含む混合戦略の中に存在することが知られている。しかし、以下の定理は、この確率ゲームでは、常に純粋戦略のなかに、その鞍点均衡があることを示している。

定理. 権利行使可能なノード (n, i) ($n \in \{n^*, n^* + 1, \dots, N-1\}$) において、 $P(n, i) < C(n, i)$ を仮定する。このとき、このノードでプレイされる行列ステージ・ゲームは、純粋戦略の中に鞍点を持つ、すなわち、

$$\max_{x \in S} \min_{y \in S} \mathcal{A}(x, y; n, i) = \min_{y \in S} \max_{x \in S} \mathcal{A}(x, y; n, i).$$

ただし、純粋戦略 x, y は、それぞれ債券の保有者と発行者の純粋戦略である。さらに、この行列ステージ・ゲームにおける均衡戦略プロファイル (x, y) は以下で与えられる：

$$\begin{cases} (E, N), \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1})|(n, i)] \leq P(n, i) < C(n, i); \\ (N, N), P(n, i) < \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1})|(n, i)] < C(n, i); \\ (N, E), P(n, i) < C(n, i) \leq \mathbb{E}^Q[V(n+1, I_{n+1})|(n, i)]. \end{cases}$$

ここで、 E と N は、それぞれ権利行使する (Exercise)、権利行使しない (Not Exercise) という純粋戦略を表す。□

上の定理では、 $P(n, i) < C(n, i)$ を仮定したが、 $P(n, i) = C(n, i)$ の場合は、両プレイヤーが同時に行使することが最適となり得る。したがって、この場

合には、均衡戦略プロファイルが $(x, y) = (E, E)$ となる可能性がある。いずれにせよ、これらの結果から、解くべき確率ゲームでは、純粋戦略のみを考えておけば十分であることがわかる。

4. 数値例

本節では、上記の議論にもとづきゲーム・オプション債の価格評価を行い、その数値計算例を示す。具体的には、イールド・カーブの並行シフトや金利ボラティリティの変化が、債券価格や両プレイヤーの権利行使領域にどのような影響を与えるかを考察する。さらに、キー・レート・デュレーションという尺度を使って、金利変動に起因する債券の価格変動リスクを分析する。

パラメータ設定として、債券の満期を 10 年、プロテクション期間を 5 年、債券の元本を 1、クーポン・レートを 6%、1 期間区間を 0.25（四半期）とし、クーポン払いは四半期ごとを仮定する。このとき、プレイヤーは、プロテクション期間後のクーポン払い時刻で、オプションを行使するかどうかの選択を行う。イールド・カーブは 5% で一定、金利ボラティリティも 5% で一定とし、コール価格は 1.03、プット価格は 1 で与える。

まず、イールド・カーブの並行シフトと、金利ボラティリティの変化による、債券価格への影響を見ていく。比較を行うため、ゲーム・オプション債に加えて、通常のクーポン債、コーラブル債、ブッタブル債の 4 種の債券を考える。図 1 から図 4 は、4 種の債券に対し、イールド・カーブを 4.5% から 5.5% へ 0.1% ずつ並行シフトさせ、金利ボラティリティを 2% から 22% まで 2% ずつ変化させた結果を示している。4 つの図では、金利が上昇すると、どの債券価格もともに下落するが、これは、割引因子が大きくなるためである。これとは反対に、ボラティリティの変化は、4 種の債券に対してそれぞれ異なる影響を与える。図 1 から、通常のクーポン債はボラティリティ変化の影響を受けない。しかし、ボラティリティが増加するとき、図 2 から、コーラブル債価格は下落し、その一方、図 3 から、ブッタブル債価格は上昇する。さらに、コーラブル債とブッタブル債の両方の特性をもつゲーム・オプション債については、図 4 から、ボラティリティの増加はゲーム・オプション債価格を若干低下させることがわかる。

この債券価格への影響をさらに考察するため、つぎに、金利パラメータを変化させたとき、プレイヤーの行使領域がどのように変化するかを見ていく。表 1 から表 3 は、それぞれイールド・カーブを 4%、5%、6% と

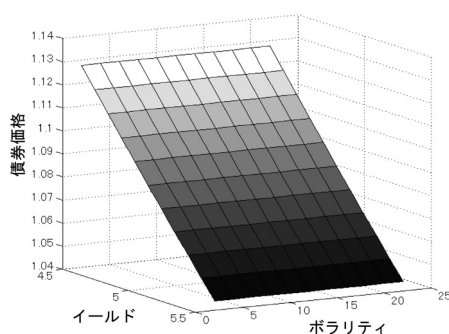


図 1 クーポン債価格

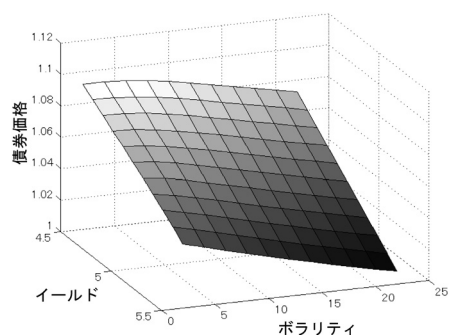


図2 コーラブル債価格

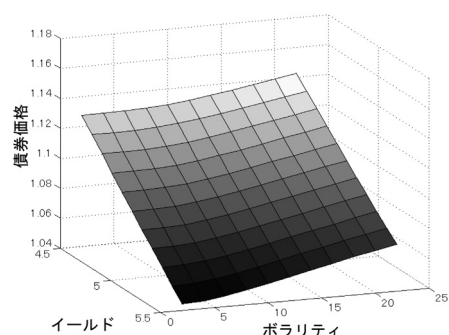


図3 プッターブル債価格

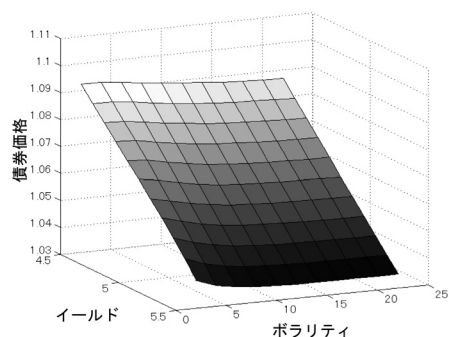


図4 ゲーム・オプション債価格

表1 イールド・カーブ 4% の行使領域

[illegible]

表2 イールド・カーブ 5% の行使領域

[illegible]

表3 イールド・カーブ 6% の行使領域

[illegible]

変化させたときの、ゲーム・オプション債の行使領域を示している。この表は、最も左が初期時刻、最も右が満期時刻、上側が金利の高い状態を表す。また、行使領域に関して、上側の囲まれた領域が債券の保有者の行使領域、下側の領域が債券の発行者の行使領域を表す。表 1~3 から、下側の債券の発行者の行使領域は、金利が下落するにつれて拡大することがわかる。これは、金利が下落すれば、債券の発行者はより低い金利で借り換えを行うことへのインセンティブが増し、その結果、期限前償還が行われるためと考えられる。反対に、金利が上昇するにつれて、上側の債券の保有者の行使領域は拡大する。これは、金利上昇局面では、債券の保有者は、他の投資機会でより高い利回りを得たいというインセンティブから、債券の発行者に早期償還を要求するためと考えられる。

表 4 ボラティリティ 5%の行使領域

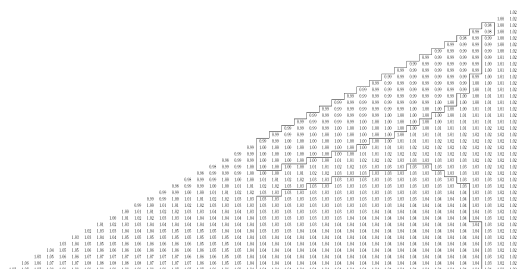


表 5 ボラティリティ 10% の行使領域

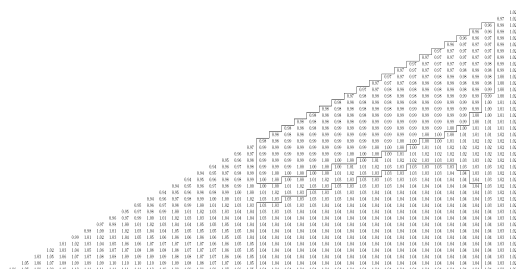


表 6 4 種の債券に対するキー・レート・デュレーション

	キ ー ・ レ ー ト							実 行
	0.25	1	2	3	5	7	10	デュレーション
ク ー ボ ン 債	0.011	0.049	0.100	0.233	0.428	0.697	6.162	7.679
コ ー ラ ブ ル 債	0.011	0.050	0.101	0.236	2.964	0.872	1.532	5.768
プ ッ タ ブ ル 債	0.011	0.049	0.100	0.233	0.493	0.739	5.736	7.361
ゲ ー ム ・ オ プ シ ョ ン 債	0.011	0.050	0.101	0.236	3.031	0.913	1.101	5.445

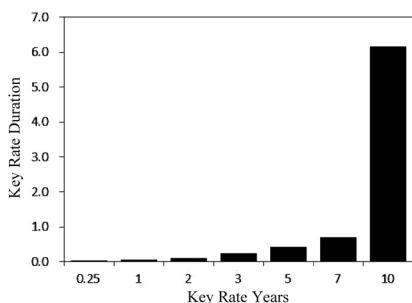


図 5 クーポン債

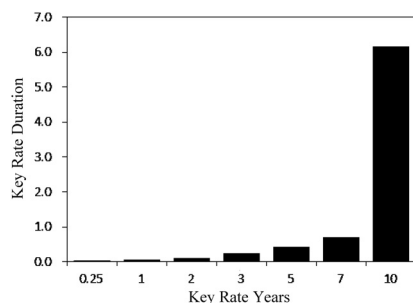


図 7 プッタブル債

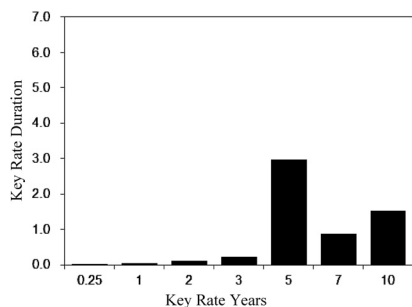


図 6 コーラブル債

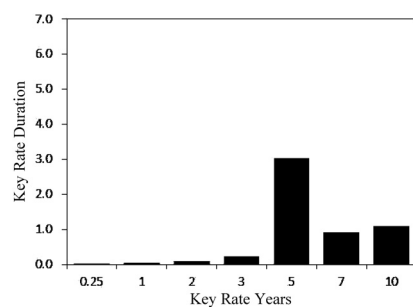


図 8 ゲーム・オプション債

続いて、ボラティリティの変化が、ゲーム・オプション債の行使領域にどのように影響を与えるかを見ていく。表 4 と表 5 は、それぞれ金利ボラティリティが 5% と 10% のときの、ゲーム・オプション債の行使領域を示している。2つの表から、債券の発行者と保有者

の行使領域は、金利ボラティリティが増加するにつれて、ともに拡大することがわかる。したがって、ボラティリティの増加は、1 つめの影響として、債券の発行者による早期行使を促す。このとき、債券の保有者はより多くの期限前償還リスクを負うことになる。その結

表7 コール価格変化に対するゲーム・オプション債のキー・レート・デュレーション

コール価格	キー・レート							実行 デュレーション
	0.25	1	2	3	5	7	10	
1.02	0.012	0.051	0.102	0.238	3.322	0.996	0.533	5.253
1.03	0.011	0.050	0.101	0.236	3.031	0.913	1.101	5.445
1.04	0.011	0.050	0.101	0.235	2.694	0.889	1.894	5.875
1.05	0.011	0.050	0.100	0.235	2.299	0.859	2.921	6.476

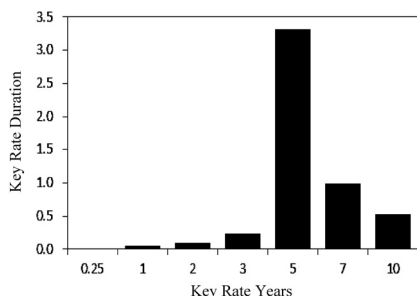


図9 コール価格 1.02

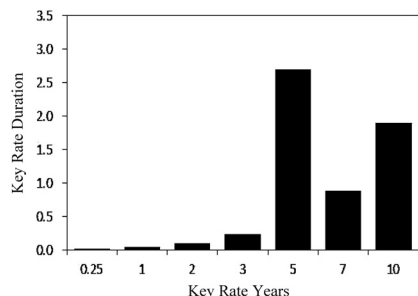


図11 コール価格 1.04

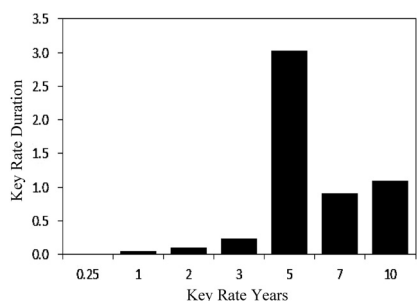


図10 コール価格 1.03

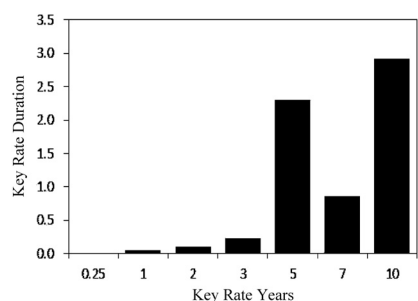


図12 コール価格 1.05

果、ボラティリティが増加するとき、コール・オプションの特性を有するコーラブル債は、先の図2のように、債券価格は下落し、利回りは上昇する。2つめの影響として、ボラティリティの増加は、債券の保有者の早期行使も引き起こす。このとき、債券の保有者にとってプット・オプション条項は価値を持つので、そのオプションに対しより多くのプレミアムを支払わなければならない。これより、プット・オプションの特性を有するプッタブル債は、ボラティリティが増加するとき、先の図3のように、債券価格は上昇し、利回りは低下する。さらに、ゲーム・オプション債では、ボラティリティが増加するとき、これら2つの影響が互いに相殺しあう。その結果、ゲーム・オプション債価格は若干低下し、先の図4のようになると考えられる。

ここからは、Ho [6] による、キー・レート・デュレーションを使って、イールド・カーブの各年限ごとの微小変化に対する債券の価格変動リスクを見ていく。ある

債券の初期時刻から満期時刻までの範囲のうち、イールド・カーブの変化について、特に着目したい年限の利回りを、キー・レートと呼ぶ。キー・レート・デュレーションは、それぞれのキー・レートをシフトさせたときの、債券の価格感応度を測定する。本稿では、3カ月、1、2、3、5、7、10年の7つのキー・レートを考える。それぞれのキー・レート・デュレーションの和は、デュレーションに一致する。この尺度は、デュレーションが捉えることのできる、イールド・カーブの並行シフトによる影響に加えて、イールド・カーブの傾きや曲率の変化による債券価格への影響も考慮することができる。

表6と図5から図8は、通常のクーポン債、コーラブル債、プッタブル債、ゲーム・オプション債に対し、キー・レートを0.1%シフトさせた場合のキー・レート・デュレーションの結果を示している。

図5と図7より、通常のクーポン債とプッタブル債

のキー・レート・デュレーションの形状は似ており、ともに、満期 10 年で最も高い価格感応度をもつ。その一方で、ともにコール・オプションの特性を有するコーラブル債とゲーム・オプション債では、図 6 と図 8 より、最初の行使可能時刻である 5 年で最も高い価格感応度をもつ。表 6 の実行デュレーションの値を比較すると、オプション条項付債券の方が、通常のクーポン債と比べて、より低い実行デュレーションを与える。特に、コール条項を有するコーラブル債とゲーム・オプション債は、他の債券と比べてより低い実行デュレーションを与える。

最後に、コール価格を変化させたとき、ゲーム・オプション債のキー・レート・デュレーションがどのように変化するかを見ていく。表 7 と図 9 から図 12 は、コール価格を 1.02, 1.03, 1.04, 1.05 と変化させたときの結果を示している。ここで、コール価格 1.02 は、債券の発行者が満期時刻に確率 1 で権利行使するのを禁止する価格である。一般に、コール価格が上昇するとき、債券の発行者が行使する可能性は低くなることが予想される。図 9~12 から、コール価格が上昇するにつれて、最初の行使可能時刻である 5 年のキー・レート・デュレーションは徐々に低下し、その一方、満期である 10 年のそれは徐々に増加することがわかる。したがって、コール価格の上昇に伴い、ゲーム・オプション債のキー・レート・デュレーションの形状は、通常のクーポン債の形状へと徐々に近づいていく。これは、コール価格が上昇すると、債券の発行者による期限前償還が行われにくくなり、コール・オプションが与える影響が小さくなるためと考えられる。結果として、表 7 のように、ゲーム・オプション債の実行デュレーションの値も、徐々に増加していくことがわかる。

5. おわりに

本稿では、いわゆる発行者のデフォルト・リスクがない場合のみを扱ったが、いまや米国政府が発行する債券であってさえデフォルト・リスクを考慮せねばなら

ない。一般化 Ho-Lee モデルは、デフォルト・リスクがないことを前提とした金利の期間構造モデルであったが、最近、デフォルト・リスクの期間構造を考慮したモデルへと拡張されている [7]。発行者のデフォルト・リスクをも考慮した、金利変動リスクと信用リスクとに関わる、ゲーム・オプション債を含む、各種デリバティブの無裁定価格評価については、今後の課題としたい。

謝辞 本稿の執筆の機会を頂いた、芝浦工業大学システム理工学部数理科学科の穴太克則教授に心より感謝致します。

参考文献

- [1] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, "Generalized Ho-Lee model: A multi-factor state-time dependent implied volatility function approach," *The Journal of Fixed Income*, **17**(3), 18–37, 2007.
- [2] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims," *The Journal of Finance*, **41**, 1011–1029, 1986.
- [3] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, *The Oxford Guide to Financial Modeling, Applications for Capital Markets, Corporate Finance, Risk Management, and Financial Institutions*, Oxford University Press, 2004.
- [4] L. S. Shapley, "Stochastic games," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **39**, 1095–1100, 1953.
- [5] J. Filar and K. Vrieze, *Competitive Markov Decision Processes*, Springer, 1997.
- [6] T. S. Y. Ho, "Key rate durations: Measures of interest rate risks," *The Journal of Fixed Income*, **2**(2), 29–44, 1992.
- [7] T. S. Y. Ho and S. B. Lee, "A unified credit and interest rate arbitrage-free contingent claim model," *The Journal of Fixed Income*, **18**(3), 5–17, 2009.
- [8] H. Ben-Ameur, M. Breton, L. Karoui and P. L'Ecuyer, "A dynamic programming approach for pricing options embedded in bonds," *Journal of Economic Dynamics & Control*, **31**, 2212–2233, 2007.
- [9] K. Sato and K. Sawaki, "The valuation of callable financial options with regime switches: A discrete-time model (Financial modeling and analysis)," *RIMS Kokyuroku*, **1818**, 33–46 2012.