レヴィー過程上の最適停止問題とその応用

山崎　和俊

レヴィー過程上の最適停止問題に関して，理論と応用を解説する．最適停止問題はアメリカ型オプションの価格評価に代表されるように様々な応用があり，また smooth/continuous fit 原理など解法のための様々な理論が存在する．ブラウン運動などの連続過程上でのモデルが大半であるものの，今日ではジャンプを含むレヴィー過程への拡張も盛んになってきている．本稿では，ジャンプが常に下向きであるスペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程の無期限最適停止問題に焦点を当て，最新の研究結果を紹介する．

キーワード：最適停止，レヴィー過程，尺度関数

1. はじめに

行動を起こすタイミングによって利得またはコストが左右される状況は様々存在する．最適停止問題は，このような環境下での利得の最大化またはコストの最小化を目的として最適なタイミングの解析を行う．（応用）確率論の分野では，主に確率過程を用いて不確実性を表現し，その生成するフィルトレーション（情報の列）の停止時刻の中で最適なものを選び出す問題を考える．古典的な逐次仮説検証 (sequential hypothesis testing)/変化点検出 (change point detection) から，ファイナンスにおけるアメリカ型オプションの価格評価まで，その応用は様々である．

本稿では連続時間・無限期間の最適停止問題に焦点を当て，その中でも不確実性がレヴィー過程で生成されるモデルについて解説する．連続時間最適停止問題ではブラウン運動などの連続過程によるモデルが主流であるものの，近年は Wiener-Hopf/周遊 (excursion) 理論の発展（[1, 2] を参照）とともに，ジャンプを伴うレヴィー過程への拡張が可能になってきている．例えば，無限期間アメリカ型オプションでは Mordecki [3] らによって，原資産が幾何レヴィー過程に従う場合について，最適解が Wiener-Hopf factor を用いて表現出来ることが示されている．また，ジャンプが常に下向き（スペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程）の場合には尺度関数 (scale function) を用いて，様々な理論的・応用的結果が得られている．

本稿では，主に [4] と [5] で扱われているスペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程の最適停止問題に焦点を当て，最新の最適停止理論について解説する．

やまざき　かずとし
関西大学システム理工学部数学科
〒 564–8680 大阪府吹田市山手町 3–3–35

2. 最適停止問題

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上にマルコフ過程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を定義する．また，条件付確率 $\mathbb{P}_x$ 上では $X_0 = x \in \mathbb{R}$ であり，$\mathbb{E}_x$ をその期待値とする（特に，$\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_0$, $\mathbb{E} \equiv \mathbb{E}_0$ とする）．さらに，確率過程 X によって生成されるフィルトレーションを $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ とし，$\mathcal{S}$ を $\mathbb{F}$-停止時刻の集合とする．

割引率を $q > 0$ とし，関数 $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はともに局所的に有界な可測関数と仮定する．ここで，すべての停止時刻 $\tau \in \mathcal{S}$ について，期待利得

$$u(x,\tau) := \mathbb{E}_x \Bigg[e^{-q\tau} g(X_\tau) 1_{\{\tau < \infty\}} + \int_0^\tau e^{-qt} f(X_t) \mathrm{d}t \Bigg],$$

を定義する．最適停止問題はこの期待利得の最大化，つまり

$$u(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{S}} u(x,\tau), \tag{2.1}$$

の計算を目的とする．ここで $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を（最適）価値関数と呼び，$u(x, \tau^*) = u(x)$ となる停止時刻 $\tau^* \in \mathcal{S}$ が存在する場合，τ^* を最適停止時刻と呼ぶ．

最も代表的な例として，無限期間アメリカ型プットオプションの現在価値は原資産価格を $\exp X_t$ かつ行使価格を K としたときの価値関数であり，つまり $g(x) = (K - \exp(x))^+$ $f \equiv 0$ としてモデル化される．

3. レヴィー過程

本稿では，前節のマルコフ過程 X がレヴィー過程の場合の最適停止問題 (2.1) に焦点を当てる．そのため，

本節ではレヴィー過程についての解説を行う．

レヴィー過程 $X=\{X_t : t\geq 0\}$ は確率 1 で cádlág な軌跡を持ち，時刻 s から t までの増分 $X_t - X_s$ が X_{t-s} の分布と等しく，さらに $\{X_u : u \leq s\}$ と独立となる確率過程である．ブラウン運動，（複合）ポワソン過程や安定過程などの古典的なものを始め，ファイナンス等の分野で用いられる CGMY 過程，variance gamma 過程，normal inverse Gaussian 過程まで，このような性質を持つ確率過程は多岐にわたる．

レヴィー過程の一つの特徴づけとしてラプラス指数 (Laplace exponent) が通常用いられる．すべての純虚数 $\beta = is$ についてラプラス指数

$$\psi(\beta) := \mathbb{E}\left[e^{\beta X_1}\right]$$

を定義する．ここで，Lévy–Khintchine の公式を用いると

$$\psi(\beta) = c\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\beta z} - 1 - \beta z 1_{\{0<|z|<1\}})\,\Pi(\mathrm{d}z) \qquad (3.1)$$

と分解することができる．ここで用いられる (c, σ, Π) は Lévy triplet と呼ばれ，$c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$，レヴィー測度 Π は $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上の $\sigma-$ finite な測度であり，

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (1\wedge z^2)\Pi(\mathrm{d}z) < \infty$$

を満たす．レヴィー過程は確率 1 で有界変動または無限変動の軌跡を持つ：有界変動な軌跡を持つ必要十分条件は $\sigma = 0$ でかつ

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (1 \wedge |z|)\,\Pi(\mathrm{d}z) < \infty, \qquad (3.2)$$

である．また，(3.2) を満たすとき，

$$\mu := c + \int_{(-1,1)\setminus\{0\}} z\,\Pi(\mathrm{d}z)$$

と定義すると

$$\psi(\beta) = \mu\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\beta z} - 1)\,\Pi(\mathrm{d}z),$$

と記述できる．特に，単調な軌跡を持つレヴィー過程を subordinator と呼ぶ．

3.1 スペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程と尺度関数 (scale function)

レヴィー過程の中でジャンプが常に下向きでかつsubordinator でないものをスペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程と呼ぶ．つまり，Π は $(-\infty, 0)$ で台を持つ．

次に，ある固定された $q \geq 0$ について q-尺度関数

$$W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty),$$

を以下のように定義する．まず，$(-\infty, 0)$ では一様にゼロ値を取り，$[0, \infty)$ では連続で単調増加し，ラプラス変換

$$\int_0^\infty e^{-sx} W^{(q)}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\psi(s) - q}, \quad s > \Phi(q),$$

で定義される．ここで，スペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程の場合，(3.1) で表されるラプラス指数 ψ の表現はすべての正の実数 $s > 0$ について拡張することができることに注意する．また，

$$\Phi(q) := \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}, \qquad (3.3)$$

であり，ラプラス指数は $\psi(0) = 0, [0, \infty)$ で凸，$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$ を満たすため，$\Phi(q) \in [0, \infty)$ は常に定義できる．特に $q > 0$ または $\psi'(0+) < 0$ の場合には $\Phi(q) > 0$ となる．

尺度関数 $W^{(q)}(x)$ を用い，$x \in \mathbb{R}$ について以下の関数を定義する：

$$\begin{aligned}\overline{W}^{(q)}(x) &:= \textstyle\int_0^x W^{(q)}(y)\mathrm{d}y,\\ Z^{(q)}(x) &:= 1 + q\overline{W}^{(q)}(x),\\ \overline{Z}^{(q)}(x) &:= \textstyle\int_0^x Z^{(q)}(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

ここで，$W^{(q)}$ は $(-\infty, 0)$ 上でゼロ値を取るため，

$$Z^{(q)}(x) = 1, \quad \overline{Z}^{(q)}(x) = x, \quad x \leq 0,$$

である．

尺度関数は様々な期待値の計算に用いられる．ここでは，最も基本的な用法として，到達時刻に関しての結果を紹介する．まず，閾値 $b \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned}\tau_b^- &:= \inf\{t \geq 0 : X_t \leq b\},\\ \tau_b^+ &:= \inf\{t \geq 0 : X_t \geq b\},\end{aligned} \qquad (3.4)$$

を定義する．このとき，任意の $b > 0$ と $x \leq b$ について

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_b^+} 1_{\{\tau_b^+ < \tau_0^-\}}\right] &= \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)},\\ \mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-} 1_{\{\tau_b^+ > \tau_0^-\}}\right] &= Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(b)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)},\end{aligned}$$

と記述できる．また，後者の極限を取ることで

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\tau_0^-}\right]=Z^{(q)}(x)-\frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

となることもわかる．

任意の $\lambda\geq 0$ について，測度変換

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{\lambda}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}=\exp(\lambda X_t-\psi(\lambda)t),\quad t\geq 0, \tag{3.6}$$

を定義する（[2] の 213 ページを参照）．確率測度 $\mathbb{P}^{\lambda}$ 上での X の尺度関数を $W_{\lambda}^{(q)}$ と $Z_{\lambda}^{(q)}$ とする．このとき，[2] の Lemma 8.4 より，

$$W_{\lambda}^{(q-\psi(\lambda))}(x)=e^{-\lambda x}W^{(q)}(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{3.7}$$

となる．また

$$W_{\Phi(q)}(x):=W_{\Phi(q)}^{(0)}(x)=e^{-\Phi(q)x}W^{(q)}(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

は増加関数であり，

$$\lim_{x\to\infty}W_{\Phi(q)}(x)=\psi'(\Phi(q))^{-1}$$

を満たす．

尺度関数のゼロ地点での連続性と $(0,\infty)$ 上での滑らかさは X の変動によって異なる．まず，前者に関しては，

$$W^{(q)}(0)=\begin{cases}0, & X\text{ が無限変動の場合,}\\ \dfrac{1}{\mu}, & X\text{ が有界変動の場合,}\end{cases}$$

$$W^{(q)\prime}(0+)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma^2}, & \sigma>0\text{ のとき,}\\ \infty, & \sigma=0,\Pi(-\infty,0)=\infty\text{ のとき,}\\ \dfrac{q+\Pi(-\infty,0)}{\mu^2}, & \sigma=0,\Pi(-\infty,0)<\infty\text{ のとき,}\end{cases}$$

を満たす．また，後者に関しては，Chan et al. [6] 等の研究によって様々な性質がわかっており，例えば X が無限変動またはレヴィー測度が原子を持たない場合，尺度関数は微分可能性を満たす．

最後に，尺度関数は対数凹関数である．つまり，$W^{(q)\prime}(x+)$ と $W^{(q)\prime}(x-)$ を尺度関数のそれぞれ右微分と左微分としたとき，

$$\frac{W^{(q)\prime}(y+)}{W^{(q)}(y)}\leq\frac{W^{(q)\prime}(x+)}{W^{(q)}(x)},\quad y>x>0$$

であり，またすべての $x>0$ について $W^{(q)\prime}(x-)\geq W^{(q)\prime}(x+)$ である．

4. 閾値戦略

無期限最適停止問題では，多くの場合 (3.4) で定義される閾値戦略に焦点を当て，さらに continuous/smooth fit 原理などを用いて閾値を適当に選ぶことで，候補となる解を得る．本節では閾値戦略 τ_A^- に関しての解析を行った [4] の結果を紹介する．

すべての $A\in\mathbb{R}$ について，閾値戦略 τ_A^- の得る期待利益を

$$u_A(x):=u(x,\tau_A^-),\quad x\in\mathbb{R},$$

と表す．ここで，特に $x\leq A$ のときは $u_A(x)=g(x)$ となる．

関数 $u_A(x)$ は $x>A$ の場合に，レヴィー測度と尺度関数を用いて解析的に表現することができる．関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $x,A\in\mathbb{R}$ について

$$\Psi_f(A):=\int_0^{\infty}e^{-\Phi(q)y}f(y+A)\mathrm{d}y,$$

$$\Theta_f(x;A):=\int_A^{x}W^{(q)}(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

と定義し，また

$$\begin{aligned}\rho_{g,A}^{(q)} &:= \textstyle\int_{(-\infty,0)}\Pi(\mathrm{d}u)\int_0^{|u|}e^{-\Phi(q)z}\\ &\qquad\times(g(z+A+u)-g(A))\mathrm{d}z,\\ \varphi_{g,A}^{(q)}(x) &:= \textstyle\int_{(-\infty,0)}\Pi(\mathrm{d}u)\int_0^{|u|\wedge(x-A)}\\ &\qquad\times W^{(q)}(x-z-A)\\ &\qquad\times(g(z+A+u)-g(A))\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

とする．

これらの関数が存在しかつ有限の場合，$x>A$ について，

$$u_A(x)=\Gamma_1(x;A)+\Gamma_2(x;A)+\Gamma_3(x;A), \tag{4.1}$$

と表される．ただし，

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x;A)&:=g(A)\\ &\quad\times\left[Z^{(q)}(x-A)-\frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x-A)\right],\\ \Gamma_2(x;A)&:=W^{(q)}(x-A)\rho_{g,A}^{(q)}-\varphi_{g,A}^{(q)}(x),\\ \Gamma_3(x;A)&:=W^{(q)}(x-A)\Psi_f(A)-\Theta_f(x;A),\end{aligned}$$

である．

Egami and Yamazaki [4] では閾値 A で微分することによって，$\partial u_A(x)/\partial A$ がゼロになるための条件について解析を行っている．具体的には，$A\in\mathbb{R}$ について

$$\Lambda(A):=-\frac{q}{\Phi(q)}g(A)-\frac{\sigma^2}{2}g'(A)+\rho_{g,A}^{(q)}+\Psi_f(A), \tag{4.2}$$

と定義したとき，$x > A$ について，$u_A(x)$ の A に関する一階微分は

$$\frac{\partial}{\partial A} u_A(x) = -e^{\Phi(q)(x-A)} W'_{\Phi(q)}(x-A)\Lambda(A),$$

となる．ここで，$-e^{\Phi(q)(x-A)} W'_{\Phi(q)}(x-A) < 0$ になることに注意すると，閾値が有限の場合は

$$\Lambda(A) = 0 \tag{4.3}$$

が，A が最適閾値になるための必要条件であることが分かる．

さらに [4] では，X が有界変動を持つときには条件 (4.3) が continuous fit 条件

$$u_A(A+) := \lim_{x \downarrow A} u_A(x) = g(A)$$

に等しく，$\sigma > 0$ の場合に smooth fit 条件

$$u'_A(A+) := \lim_{x \downarrow A} u'_A(x) = g'(A)$$

と等しいことが示されている．つまり，最適性の証明にさらに必要となる関数の滑らかさが，同時に満たされることになる．

5. 応用例

前節で述べられた条件 (4.3) は最適性の必要条件であり，十分条件ではない．一般的には，解の最適性の証明には関数 g と f の具体的な形が必要になる．本節では最適性が証明できる例として [5] の結果を紹介する．

まず，停止時の利得関数は

$$g(x) = K - bx - \sum_{i=1}^{N} c_i e^{a_i x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

の形で表されると仮定する．ここで，$K \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, かつ $c_i, a_i > 0$, $1 \leq i \leq N$, $N \geq 0$ とする．また，一般性を失うことなく，すべての $i \neq j$ について $a_i \neq a_j$ と仮定する．

関数 f に関しては連続で増加関数とし，$\max(-f(x), 0)$ は $x \downarrow -\infty$ になるにつれてその増加はせいぜい多項式的であり，また $x \in \mathbb{R}$ について $\int_0^\infty e^{-\Phi(q)y} \max(f(y+x), 0)\mathrm{d}y < \infty$ とする．このとき，Ψ_f は存在し有限であり，(4.1) についても同様のことが言える．

また，X のレヴィー測度については

$$\int_{(-\infty,1]} e^{\epsilon|u|} \Pi(\mathrm{d}u) < \infty$$

となる $\epsilon > 0$ が存在すると仮定する．特にこの場合

$$\mathbb{E}X_1 = \psi'(0+) \in (-\infty, \infty) \tag{5.2}$$

が満たされる．

補題 5.1. 関数 f と g とレヴィー測度 Π が上記の条件を満たすとする．また $a > 0$ について

$$\varpi_q(a) := \begin{cases} \dfrac{q - \psi(a)}{\Phi(q) - a}, & a \neq \Phi(q) \\ \psi'(\Phi(q)) = \lim_{a \to \Phi(q)} \dfrac{q - \psi(a)}{\Phi(q) - a}, & a = \Phi(q) \end{cases}$$

と定義する．

このとき，すべての $A \in \mathbb{R}$ について (4.2) は

$$\Lambda(A) = -\frac{q}{\Phi(q)}K + b\left(\frac{q}{\Phi(q)^2} + \frac{qA - \psi'(0+)}{\Phi(q)}\right) + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{a_i A} \varpi_q(a_i) + \Psi_f(A)$$

と表される．

上記の補題において，ψ の凸性からすべての $a > 0$ について $\varpi_q(a) > 0$ である．このため $\Lambda(A)$ は連続でかつ増加関数であることがわかる．そのため，$\lim_{A \downarrow -\infty} \Lambda(A) < 0 < \lim_{A \uparrow \infty} \Lambda(A)$ のときには，$\Lambda(A^*) = 0$ となる一意の解 $A^* \in \mathbb{R}$ が存在する．一方で，$\lim_{A \to -\infty} \Lambda(A) \geq 0$ のときには $A^* = -\infty$ と定義し，$\lim_{A \to \infty} \Lambda(A) \leq 0$ のときには $A^* = \infty$ とする．また，関数 g が定数の場合を除き，$A^* < \infty$ であることが確認できる．

このように定義された $A^* \in [-\infty, \infty]$ を用いて，価値関数の候補 $u_{A^*}(x)$ が得られる．ここで，$u_{A^*}(x)$ は関数 g の表現 (5.1) より簡略的に記述することができる．

まず，g の線形項については，[7] の Proposition 2 と (5.2) より，

$$\mathbb{E}_x[e^{-q\tau_0^-} X_{\tau_0^-}] = \overline{Z}^{(q)}(x) - \psi'(0+)\frac{Z^{(q)}(x) - 1}{q} - \frac{q - \psi'(0+)\Phi(q)}{\Phi(q)^2} W^{(q)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

と書ける．さらに (3.5) を用い，任意の $x, A \in \mathbb{R}$ について

$$\mathbb{E}_x[e^{-q\tau_A^-} X_{\tau_A^-}] = \overline{Z}^{(q)}(x-A) + \frac{\psi'(0+)}{q} + \left(A - \frac{\psi'(0+)}{q}\right) Z^{(q)}(x-A) - \frac{q - \psi'(0+)\Phi(q) + qA\Phi(q)}{\Phi(q)^2} W^{(q)}(x-A)$$

と記述される．

次に g の指数項に関しては，(3.5) と測度変換 (3.6) を両用することで測度変換後の尺度関数 (3.7) を使って簡潔に記述できる（[2], Exercise 8.7(ii) を参照）．まとめると，

$$
\begin{aligned}
&u_A(x)\\
&=K\left(Z^{(q)}(x-A)-\frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x-A)\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}c_ie^{a_ix}\Big(Z_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(x-A)\\
&\quad-\varpi_q(a_i)W_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(x-A)\Big)\\
&\quad-b\left[\overline{Z}^{(q)}(x-A)+\left(A-\frac{\psi'(0+)}{q}\right)Z^{(q)}(x-A)\right.\\
&\quad+\frac{\psi'(0+)}{q}\\
&\quad\left.-\frac{q-\psi'(0+)\Phi(q)+qA\Phi(q)}{\Phi(q)^2}W^{(q)}(x-A)\right]\\
&\quad+W^{(q)}(x-A)\Psi_f(A)-\Theta_f(x;A)
\end{aligned}
$$

となる．

さらに，$A^*\in(-\infty,\infty)$ のときには，A^* が (4.3) を満たすことから，

$$
\begin{aligned}
&u_{A^*}(x)\\
&\quad=KZ^{(q)}(x-A^*)\\
&\qquad-b\left[\overline{Z}^{(q)}(x-A^*)+\left(A^*-\frac{\psi'(0+)}{q}\right)\right.\\
&\qquad\left.\times Z^{(q)}(x-A^*)+\frac{\psi'(0+)}{q}\right]\\
&\qquad-\sum_{i=1}^{N}c_ie^{a_ix}Z_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(x-A^*)-\Theta_f(x;A^*)
\end{aligned}
$$

と簡略化できる．また，$A^*=\infty$ のときには $u_{A^*}\equiv g$ となり，$A^*=-\infty$ のときには [2] の Corollary 8.9 を用いて，

$$
\begin{aligned}
u_{A^*}(x)=&\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qt}f(X_t)\mathrm{d}t\right]\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi'(q)e^{-\Phi(q)(y-x)}-W^{(q)}(x-y)\right)\\
&\qquad\times f(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

となる．

尺度関数の滑らかさより，$u_{A^*}(x)$ は $\mathbb{R}\backslash\{A^*\}$ 上で C^1 であり，特に X が無限変動を持つとき C^2 である．

また，$-\infty<A^*<\infty$ の場合，点 A^* においても continuous/smooth fit 条件が満たされることが容易に確かめることができる．具体的には，

1. $Z^{(q)}(0)=Z_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(0)=1$ および $\lim_{x\downarrow A^*}\Theta_f(x;A^*)=0$ から continuous fit $u_{A^*}(A^*+)=g(A^*)$ が成り立つ．
2. 特に，X が無限変動を持つ場合，$W^{(q)}(0)=W_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(0)=0$, $Z^{(q)}(0)=Z_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(0)=1$, $\lim_{x\downarrow A}\Theta_f'(x;A)=0$ より，

$$
\begin{aligned}
&u_{A^*}'(x)\\
&=KqW^{(q)}(x-A^*)-b\Big[Z^{(q)}(x-A^*)\\
&\quad+q\left(A^*-\frac{\psi'(0+)}{q}\right)W^{(q)}(x-A^*)\Big]\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}c_ie^{a_ix}(q-\psi(a_i))W_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(x-A^*)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}a_ic_ie^{a_ix}Z_{a_i}^{(q-\psi(a_i))}(x-A^*)-\Theta_f'(x;A^*)\\
&\quad\xrightarrow{x\downarrow A^*}-b-\sum_{i=1}^{N}a_ic_ie^{a_iA^*}=g'(A^*),
\end{aligned}
$$

となり，smooth fit が成り立つ．

この関数の最適性の証明には，マルチンゲール理論に基づいた verification lemma を用いる．つまり，X の無限小生成作用素を十分に滑らかな関数 h について

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}h(x)=&ch'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2h''(x)\\
&+\int_{(-\infty,0)}[h(x+z)\\
&-h(x)-h'(x)z1_{\{-1<z<0\}}]\Pi(\mathrm{d}z),
\end{aligned}
$$

と定義したときに，

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}-q)u_{A^*}(x)+f(x)\le 0,\quad x\in\mathbb{R}\backslash\{A^*\},\\
&u_{A^*}(x)\ge g(x),\quad x\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

を示す必要がある．この証明と verification lemma の詳細に関しては [5] を参照のこと．

以下，本節の主要結果を述べる．

定理 5.1. 閾値 $A^*\in[-\infty,\infty]$ を上記のように定めるとする．このとき，以下が成り立つ．

1. $-\infty<A^*<\infty$ の場合，停止時刻 $\tau_{A^*}:=\inf\{t\ge 0:X_t\le A^*\}$ は最適停止時刻であり，価値関数は $u(x)=u_{A^*}(x)$, $x\in\mathbb{R}$ となる．
2. $A^*=\infty$ の場合，$\tau^*=0$ が最適停止時刻となり，価値関数は $u(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ となる．
3. $A^*=-\infty$ の場合，$\tau^*=\infty$ が最適停止時刻となり，価値関数は

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi'(q)e^{-\Phi(q)(y-x)}-W^{(q)}(x-y)\right)\times f(y)\mathrm{d}y$$

となる．

6. おわりに

本稿ではレヴィー過程上の最適停止問題に関しての近年の研究動向について紹介した．とりわけ，スペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程の場合には尺度関数を用いて効率的な解析が可能である．

本稿で紹介した [4, 5] の他にも様々な研究結果が存在し，例えばロシア型オプションに関しては [8]，信用リスクへの応用に関しては [9, 10] などがある．また，二者のプレイヤーがそれぞれの利得を最適化した際の均衡を求める「最適停止ゲーム」への拡張も同様の手法が有効であり，例えば [11, 12] では均衡上での価値関数と最適戦略の組み合わせ（ナッシュ均衡）が尺度関数を用いて解析的に得られている．

このように急速な発展を遂げる最適停止問題のレヴィー過程モデルであるが，一方で連続確率過程の場合に比べると，現存の理論的結果は非常に限定的であることも事実である．連続確率過程の最適停止理論は到達時刻での位置を確定的に制御できることに依存しており，同様の結果はジャンプを伴う場合には拡張ができない．また，スペクトラリー・ネガティブなレヴィー過程から両向きのジャンプを持つ場合への一般化も難解であり，解析的結果が得られるケースは phase-type レヴィー過程 [13]，meromorphic レヴィー過程 [14] などの Wiener-Hopf factor が有理関数である場合に限られる．このようにレヴィー過程の最適停止問題は，レヴィー過程理論と共に発展してきている一方で，未だ多くの未解決問題が存在し，依然注目すべき分野と言える．

謝辞　本研究は MEXT 科研費 26800092 の助成，稲盛財団研究助成，関西大学若手研究者育成経費の助成を受けたものです．

参考文献

[1] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge University Press, 1998.
[2] A. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Universitext, Springer, 2006.
[3] E. Mordecki, "Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes," *Finance and Stochastics*, **6**, 473–493, 2002.
[4] M. Egami and K. Yamazaki, "On the continuous and smooth fit principle for optimal stopping problems in spectrally negative Lévy models," *Advances in Applied Probability*, **46**, 139–167, 2014.
[5] K. Yamazaki, "Contraction options and optimal multiple-stopping in spectrally negative Lévy models," *Applied Mathematics and Optimization*, (in press).
[6] T. Chan, A. Kyprianou and M. Savov, "Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes," *Probability Theory and Related Fields*, **150**, 691–708, 2011.
[7] F. Avram, Z. Palmowski and M. Pistorius, "On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process," *The Annals of Applied Probability*, **17**, 156–180, 2007.
[8] F. Avram, A. Kyprianou and M. Pistorius, "Exit problems for spectrally negative Lévy processes and applications to (Canadized) Russian options," *The Annals of Applied Probability*, **14**, 215–238, 2004.
[9] T. Leung and K. Yamazaki, "American step-up and step-down credit default swaps under Lévy models," *Quantitative Finance*, **13**, 137–157, 2013.
[10] B. A. Surya and K. Yamazaki, "Optimal capital structure with scale effects under spectrally negative Lévy models," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **17**, 1450013, 2014.
[11] M. Egami, T. Leung and K. Yamazaki, "Default swap games driven by spectrally negative Lévy processes," *Stochastic Processes and their Applications*, **123**, 347–384, 2013.
[12] D. Hernández-Hernández and K. Yamazaki, "Games of singular control and stopping driven by spectrally one-sided Lévy processes," *Stochastic Processes and their Applications*, (in press).
[13] S. Asmussen, F. Avram and M. Pistorius, "Russian and American put options under exponential phase-type Lévy models," *Stochastic Processes and their Applications*, **109**, 79–111, 2004.
[14] A. Kuznetsov, A. Kyprianou and J. C. Pardo, "Meromorphic Lévy processes and their fluctuation identities," *The Annals of Applied Probability*, **22**, 1101–1135, 2012.