金融・実物資産市場における最適取引戦略

田中　敬一

ファイナンスの話題から 1 次元拡散過程の最適停止問題の基本的な解法について論じる．初到達時刻に深く関連する関数を用いた変数変換により，ある関数のグラフから継続領域・停止領域の識別が視覚的に可能となり，議論が見通しよくなる．また，一定条件下で，価値関数の有界性や最適停止時刻の存在・構成が保証されているので有用である．具体例として，リアルオプション，アメリカ型オプション，保有証券の最適売却戦略の問題を議論する．

キーワード：オプション取引，リアルオプション，最適停止，超過関数，凹関数，初到達時刻

1.　はじめに

将来の価格変動が不確実な状況下で資産・証券等の売買取引を行うには合理的な意思決定方法が求められる．「どのタイミングで株式を売れば（あるいは買えば）よいのか」という問題は万人の関心事であろう．この種の問題は対象となる資産の価格変動をモデル化したうえで最適停止問題として定式化される．本稿は，その資産価格の変動モデルは所与としたうえで，無限期間の最適停止問題の解法と応用例について論じる．

ファイナンスに関連する最適停止問題の多くの場合では，閾値型の停止時刻と価値関数の関数形を推定したうえで，自由境界問題として解いた（正当な手続きかどうかは問題次第）うえで，それらが実際に最適であることを示すことが常套手段である．本稿では，[1] の結果に基づき，資産価格が 1 次元拡散過程に従う場合には，問題の形式にかかわらず，閾値戦略や関数形を推定することなく価値関数と最適停止時刻を演繹的に導出することが可能であること，さらに，その verification theorem を確認することはさほど困難ではなく，むしろ，グラフの上で視覚的に捉えやすい問題であること，をいくつかの応用例によって紹介する．そのポイントは，視覚的に捉えにくい超過関数を視覚的に捉えやすい凹関数に置き換えることである．1 次元に限定されるのは，主に関数の単調性・凹性および（1 点もしくは 2 点への）初到達時刻の議論の容易さに依拠するが，一つの特定の資産について考察するには 1 次元で十分であろう．

たなか　けいいち
首都大学東京　社会科学研究科経営学専攻
〒 192–0397 東京都八王子市南大沢 1–1

2.　最適停止問題と自由境界問題

本節では，次節の計算根拠となる [1] の結果を簡単に提示・解説する．

2.1　1 次元拡散過程

確率過程 X はフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ 上の 1 次元ブラウン運動 B により変動する 1 次元拡散過程で，確率微分方程式

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in I$$

に従い，区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上に値を取るとする．$X_0 = x$ を条件とする確率，期待値をそれぞれ P^x, E^x で表す．$\mathscr{S}$ は $\mathbb{R}_+$ 値の $\mathbb{F}$ 適合停止時刻 (stopping time) の集合とする．$\tau_a \in \mathscr{S}$ は X の $a \in \mathbb{R}$ への初到達時刻 $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ を表す．

X の無限生成作用素 (infinitesimal generator)$\mathscr{A}$ と X の尺度関数 (scale function)s は

$$\mathscr{A}u(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \mu(x)\frac{du}{dx}(x),$$

$$s(x) = \int_c^x \exp\left(-\int_c^y \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\right)dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

で与えられる（c は任意の実数）．尺度関数 s は常微分方程式 $\mathscr{A}u = 0$ を満たし，さらに等式

$$P^x(\tau_r < \tau_l) = \frac{s(x) - s(l)}{s(r) - s(l)}, \qquad l < x < r,$$

$$P^x(\tau_l < \tau_r) = \frac{s(r) - s(x)}{s(r) - s(l)}, \qquad l < x < r, \qquad (1)$$

が成立する．

$\beta \geq 0$ のとき，常微分方程式 $\mathscr{A}u = \beta u$ の解は二つの線形独立な正値関数 ψ，φ によって生成される．ただし，ψ は増加関数，φ は減少関数とする．これら ψ, φ は初到達時刻の計算に深く関連する．例えば，c を

任意の実数として

$$\psi(x)=\begin{cases}E^x\left[e^{-\beta\tau_c}\right], & x\le c\\ 1/E^c\left[e^{-\beta\tau_x}\right], & x>c\end{cases},$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1/E^c\left[e^{-\beta\tau_x}\right], & x\le c\\ E^x\left[e^{-\beta\tau_c}\right], & x>c\end{cases}\tag{2}$$

と表される．これにより，y への初到達時刻 τ_y のラプラス変換は

$$E^x\left[e^{-\beta\tau_y}\right]=\begin{cases}\psi(x)/\psi(y), & x\le y\\ \varphi(x)/\varphi(y), & x>y\end{cases}$$

となる．ψ，φ の取り方は正定数倍の自由度はあるが，それによって以下の議論は変わらない．特に，$\beta=0$ の場合は $(\psi,\varphi)=(s,1)$ としてもよい．

$\beta\ge 0$ で，確率過程 X が幾何ブラウン運動

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dW_t,\quad X_0=x\tag{3}$$

の場合には，

$$\begin{aligned}&\psi(x)=x^{\gamma_+},\quad \varphi(x)=x^{\gamma_-},\\ &\gamma_+=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\beta}{\sigma^2}}\quad(\ge 1),\\ &\gamma_-=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\beta}{\sigma^2}}\quad(\le 0)\end{aligned}$$

となる．

2.2 凹関数と超過関数

従来の凹関数の定義を拡張して，関数 f の値を重みとした加重平均による「f に関する凹性」の定義を与える．

定義 1. 単調増加関数 $f:I\to\mathbb{R}$ と関数 $u:I\to\mathbb{R}$ について，任意の部分閉区間 $[l,r]\subset I$ とすべての $x\in[l,r]$ に対して不等式

$$u(x)\ge u(l)\frac{f(r)-f(x)}{f(r)-f(l)}+u(r)\frac{f(x)-f(l)}{f(r)-f(l)}$$

が成立するとき，関数 u は f に関して凹 (f-concave) であると言う．

$f(x)=x$ の場合は，通常の凹性と同じである．通常の凹関数は連続であるが，それを拡張した次の補題が成立する．

補題 1. ([1]Prop. 2.4)
実数値関数 u は f に関して凹であり，かつ，f が I 上連続であれば，u は I 上連続である．

次の β 超過関数は，最適停止問題の価値関数の特徴付けに深く関連する．

定義 2. β は非負定数とする．関数 $u:I\to\mathbb{R}$ について，すべての $\tau\in\mathscr{S}$ と $x\in I$ に対して不等式

$$u(x)\ge E^x\left[e^{-\beta\tau}u\left(X_\tau\right)\right]$$

が成立するとき，u は X の β 超過関数 (β-excessive function) であると言う（$\beta=0$ の場合は単に X の超過関数[1]と言う）．

任意の関数 f について，$\{\tau=+\infty\}$ 上では，$f(X_\tau(\omega))=0$ と見なすので，X の β 超過関数は非負の値を取る．さらに，(1) から，任意の超過関数は尺度関数 s に関して凹である（後述の補題 2 は逆が成立することを示唆している）．

2.3 最適停止問題

最適停止問題

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{S}}E^x\left[e^{-\beta\tau}h\left(X_\tau\right)\right],\quad x\in(a,b)$$

を考える．ここで利得関数 $h:I\to\mathbb{R}$ は任意のコンパクト部分集合上で有界であると仮定する．

定理 1. [3] 利得関数 h が下半連続 (lower semi-continuous) であれば，最適停止問題の価値関数 V は，X の β 超過関数であり，かつ，h の優関数 (majorant)[2]となる関数のうち最小の関数である．

以下では，$\beta>0$，区間 $I\subset\mathbb{R}$ は開区間 $I=(a,b)$（ただし $-\infty\le a<b\le+\infty$）であり，端点 a, b は自然な端点 (natural boundaries, $P^x(\tau_a<\infty)=P^x(\tau_b<\infty)=0$) と仮定する．このとき，(2) より

$$\psi(a+)=\varphi(b-)=0,\quad \psi(b-)=\varphi(a+)=+\infty,$$
$$0<\psi(x),\varphi(x)<\infty,\ \forall x\in(a,b)$$

が成り立つ．関数 F を

$$F(x)=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\tag{4}$$

とする．例えば X が幾何ブラウン運動 (3) で $\mu=\beta=r>0$ の場合は $F(x)=x^{1+2r/\sigma^2}$ である．

この F を利用して，定理 1 の β 超過関数を F に関する凹性に置き換えることができる．定義 1 の F に関する凹性は閉区間上で考えるので，特定の閉区間 $[l,r]$ の両端への初到達時刻 $\tau=\tau_l\wedge\tau_r$ を使って定義 2 の

[1] 非負関数の中では，超過関数は優調和関数 (superharmonic function) と同じである．[2] では優調和関数を用いて本稿の $\beta=0$ に相当するケースを本稿と同様の趣旨で解説している．
[2] I 上の関数 u について，$u(x)\ge h(x)$, $\forall x\in I$ が成立するとき，関数 u は h の優関数である，と言う．

β 超過関数が満たすべき性質を変形すると，次の補題 2(i) が得られる．その際に F の定義 (4) を用いる．

補題 2. ([1]Prop. 5.9, 5.10)
(i) I 上の非負関数 u について，u が X の β 超過関数であることと u/φ が F に関して凹であることは同値である．
(ii) 最適停止問題の価値関数 V が $I=(a,b)$ 上で有界であることと，定数 l_a, l_b

$$l_a = \limsup_{x\downarrow a} \frac{\max(h(x),0)}{\varphi(x)}, \tag{5}$$

$$l_b = \limsup_{x\uparrow b} \frac{\max(h(x),0)}{\psi(x)} \tag{6}$$

がいずれも有限であることは同値である．

$\beta=0$ の場合には，$\psi=s$，$\varphi=1$ に対応するので，前述の通り，u が X の尺度関数 s に関して凹であることと u が X の超過関数であることは同値である．

(i) の結果を大胆に解釈すれば，目的関数内の割引因子 $e^{-\beta\tau}$ を乗ずるかわりに，利得関数・目的関数等の関数をすべて φ で除することに置き換えることが可能となる．その結果が，次の命題である．価値関数 V の特徴付けと具体的な構成方法がわかる．特に (ii) が重要である．

命題 1. ([1]Prop. 5.11, 5.12, 5.13)
l_a, l_b はいずれも有限と仮定する．
(i) 価値関数 V は，以下の 2 条件を満たす非負関数 u のうち最小の関数である．
(a) u/φ は F に関して凹である．
(b) u は利得関数 h の優関数である．
(ii) 関数 $W:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は関数 $H:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$H(y)=\begin{cases} \frac{h\left(F^{-1}(y)\right)}{\varphi\left(F^{-1}(y)\right)}, & y>0 \\ l_a, & y=0 \end{cases} \tag{7}$$

の最小非負凹優関数とする．また，同様に，関数 $\tilde{W}:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ は関数 $\tilde{H}:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$

$$\tilde{H}(y)=\begin{cases} \frac{h\left(G^{-1}(y)\right)}{\psi\left(G^{-1}(y)\right)}, & y<0 \\ l_b, & y=0 \end{cases}$$

の最小非負凹優関数とする．ここで $G(x)=-1/F(x)$ である．このとき，価値関数 V は

$$V(x)=\varphi(x)W(F(x))=\psi(x)\tilde{W}(G(x)) \tag{8}$$

で与えられる．
さらに，$W(0)=l_a, \tilde{W}(0)=l_b$ である．
(iii) 価値関数は連続である．

(i) により，価値関数は，利得関数の最小凹優関数（F に関する凹）として特徴づけられる．さらに，変数変換によって，(ii) の通り，価値関数を明示的に構成できる．もし関数 H（もしくは $\tilde{H}$）のグラフで凹凸がわかれば，関数 W（もしくは $\tilde{W}$）を容易に把握できるので，価値関数の導出も容易であろう．

(7)，(8) の H, V の関数形は次のように考えると導出できる．変数変換による関数 $\overline{V}(y)=V(x)/\varphi(x)$, $y=F(x)$ を考える[3]. 価値関数 V が満たす命題 1(i) の 2 条件のうち (a) は「$\overline{V}$ は（通常の）凹関数である」に相当し，(b) は「$\overline{V}$ は $(h/\varphi)\circ F^{-1}(=H)$ の優関数である」と同じである．したがって，再び命題 1(i) と補題 2(i) の結果を用いると，$\overline{V}$ は，ブラウン運動に関する別の最適停止問題

$$\overline{V}(y)=\sup_{\tau\in\mathscr{S}} E^y\left[H(B_\tau)\right]$$

の価値関数である．期待値内に割引因子が現れないことに注意しよう．ここで，ブラウン運動 B_t の尺度関数は $s(y)=y$ であるため，通常の凹性と s に関する凹性が同じであることを用いている．この $\overline{V}(y)$ が定理 1 の結果により正しく $W(y)$ となる．すなわち

$$W(F(x))=\overline{V}(F(x))=\frac{V(x)}{\varphi(x)}$$

であるので，(8) を得る．

2.4 最適停止時刻と自由境界問題

命題 1 により価値関数を導出できたとすれば，次の作業は最適停止時刻の構成である．自然な候補 τ^* は，停止領域を $\Gamma=\{x\in I: V(x)=h(x)\}$ として，その Γ への初到達時刻

$$\tau^*=\inf\{t\geq 0: X_t\in\Gamma\}$$

である．さらには，V の構成方法と F の単調性から，停止領域 Γ は，$W(y)=H(y)$ となる y の F による逆像

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{x\in I: V(x)=h(x)\} \\ &= F^{-1}\left(\{y\in F(I): W(y)=H(y)\}\right)\end{aligned}$$

と一致する．すなわち，最適停止問題は自由境界問題に帰着されるが，その境界は W と H のグラフが分離する境界の y の値の F による逆像として認識できる（後述の図 1〜3 参照）．

τ^* が実際に最適停止時刻であるための十分条件は，

[3] 尺度変換 (change of scale, [2]Sec. 11) に相当するが，微分は用いない．

以下の verification theorem に相当する命題 2 により与えられる．これらの十分条件の適用可能性は十分に高い．

命題 2. ([1]Prop. 5.13, 5.14)
利得関数 h が連続と仮定する．
(i) $l_a = l_b = 0$ であるならば，停止時刻 τ^* は最適停止問題の最適停止時刻である．
(ii) l_a，l_b 共に有限であり，かつ，いずれかは正であると仮定する．継続領域を $C = (a,b) \setminus \Gamma$ とする．このとき，τ^* が最適停止時刻であるための必要十分条件は以下の 2 条件件が成立することである．

(ii-a) $l_a > 0$ であれば，
$(a,r) \subset C$ となる $r \in (a,b)$ は存在しない．
(ii-b) $l_b > 0$ であれば，
$(l,b) \subset C$ となる $l \in (a,b)$ は存在しない．

以上の結果は，X が取りうる値の区間が開区間でありその両端が自然な場合であるが，区間が半閉区間で端点が吸収 (absorbing) の場合であっても，若干の修正のうえ同様の結論が成立する ([1] Sec. 5.1). バリア型オプションを扱う際には端点が吸収状態となる ([1] Sec. 6).

3. 金融・実物資産市場における取引の最適停止問題

本節で無限満期のファイナンス関連取引における最適停止問題をいくつか取り上げ，関数 H, W を図示する．これらの図から価値関数と閾値戦略の性質がわかる．

無限満期における具体的な計算においては，強マルコフ過程 X のレゾルベントオペレーター (resolvent operator)[4]

$$(R_\beta f)(x) = E^x \left[\int_0^\infty e^{-\beta u} f(X_u) du \right] \tag{9}$$

が役立つので，その性質を補題として掲げておく．

補題 3. (i) 任意の停止時刻 $\tau \in \mathscr{S}$ に対して，等式

$$E^x \left[\int_\tau^\infty e^{-\beta u} f(X_u) du \right] = E^x \left[e^{-\beta\tau} (R_\beta f)(X_\tau) \right]$$

が成立する．
(ii) 確率変数 U がパラメータ λ の指数分布 $Exp(\lambda)$ に従い，かつ，X と独立であるとき，任意の停止時刻 $\tau \in \mathscr{S}$ に対して，等式

$$\begin{aligned} &E^x \left[e^{-\beta(\tau \wedge U)} f(X_{\tau \wedge U}) \right] \\ &\quad = E^x \left[e^{-(\beta+\lambda)\tau} (f - \phi)(X_\tau) \right] + \phi(x) \end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$\phi(x) = \lambda (R_{\beta+\lambda} f)(x) = E^x \left[e^{-\beta U} f(X_U) \right]$$

である．
(iii) X が幾何ブラウン運動 (3) に従い，f が線形関数 $f(x) = a + bx$ の場合は，$\beta > \mu$ であれば

$$(R_\beta f)(x) = \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta - \mu} x$$

である．

(i) は拡散過程の強マルコフ性を用い，また，(ii) は $1 = 1_{\{\tau < U\}} + 1_{\{\tau \geq U\}}$ と事象を分解することにより証明できる．

3.1 リアルオプション

将来の任意の時点でコスト I をプロジェクトに投下することにより，投資開始後連続的に δX_t の収益を受け取る機会がある．ここで，X_t は幾何ブラウン運動 (3) に従うと仮定する．時間選好率 $\beta\,(> \mu)$ を持つ経営者の課題は

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathscr{S}} E^x \left[\int_\tau^\infty e^{-\beta u} \delta X_u du - e^{-\beta\tau} I \right]$$

を最大にする最適投資開始時刻 τ^* を求めることである．主に実物投資を想定しているのでリアルオプションの問題と呼ばれる [4]. 例えば，原油の採掘の場合では，油田を発見した時刻が現時点で，X_t が原油価格，δ は毎時の瞬間的な原油採掘量割合，τ は原油採掘プラント（油井）建設時期に相当する．

補題 3 よりこの問題は

$$V(x) = \frac{\delta}{\beta - \mu} \sup_{\tau \in \mathscr{S}} E^x \left[e^{-\beta\tau} (X_\tau - I') \right]$$

と書き換えられる．ここで，$I' = \frac{\beta - \mu}{\delta} I$ である．命題 1 の関数 H の導出に向けて必要な関数等を順次求めていくと

$$\begin{aligned} &h(x) = x - I', \quad \psi(x) = x^{\gamma_+}, \quad \varphi(x) = x^{\gamma_-}, \\ &\gamma_\pm = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}, \\ &F(x) = x^\theta, \quad \theta = \gamma_+ - \gamma_-, \\ &(a,b) = (0, +\infty), \quad l_a = 0, \quad l_b = 0, \end{aligned}$$

[4] 通常，レゾルベント R_β は $\mathscr{A} - \beta I$ の逆作用素として定義されるが，ここでは (9) を定義とする．

$$H(y)=\begin{cases}\frac{h\left(F^{-1}(y)\right)}{\varphi\left(F^{-1}(y)\right)}, & y>0\\ l_a, & y=0\end{cases}$$
$$=y^{-\gamma_-/\theta}(y^{1/\theta}-I')$$

となる．H の 2 階微分を求めることにより，$y<y_0=(I'\beta/(\beta-\mu))^\theta$ で H は凸で，$y_0<y$ で H は凹となることがわかる．したがって，H の最小非負凹優関数 W は，原点から H への接線を引くことで

$$W(y)=\begin{cases}\dfrac{H(y^*)}{y^*}y, & 0\le y\le y^*\\ H(y), & y>y^*\end{cases}$$

が得られる（図 1 参照）．ここで，y^* は $H(y^*)/y^*=H'(y^*)$ を満たす

$$y^*=\left(\frac{\gamma_+}{\gamma_+-1}I'\right)^\theta \quad (>y_0)$$

である．したがって命題 1(ii) により，価値関数は

$$V(x)=\frac{\delta}{\beta-\mu}\varphi(x)W(F(x))$$
$$=\begin{cases}\left(\dfrac{\delta}{\beta-\mu}x^*-I\right)\left(\dfrac{x}{x^*}\right)^{\gamma_+}, & 0<x\le x^*\\ \dfrac{\delta}{\beta-\mu}x-I, & x>x^*\end{cases}$$

となる．さらに，命題 2(i) により閾値

$$x^*=(y^*)^{1/\theta}=\frac{\beta-\mu}{\delta}\frac{\gamma_+}{\gamma_+-1}I$$

への初到達時刻 $\tau^*=\inf\{t>0; X_t\ge x^*\}$ が最適停止時刻である．すなわち，価格 X_t が十分に上昇したときにプロジェクトを開始することが最善である．

接点 $(y^*,H(y^*))$ における W の連続性・微分可能性が，価値関数 V の value-matching condition と smooth-pasting condition に対応していることがわかる．

3.2 アメリカ型オプション

満期以前の将来の任意の時点で価格 K で株式を購入できる権利の取引をアメリカ型コールオプションと言う．原資産となる株式の価格を X_t とする．満期が無限の場合には，そのオプションの評価は

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{S}}E^x\left[e^{-r\tau}\max\left(X_\tau-K,0\right)\right]$$

で与えられる．3.1 節リアルオプションの問題とは利得関数がわずかに異なるが，H の負値部分のみを変更しているので，最小非負凹優関数 W は 3.1 節のそれ

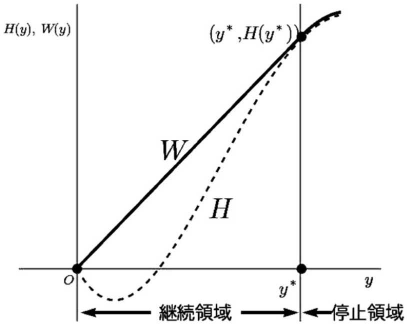

図 1　リアルオプションの場合の H と W

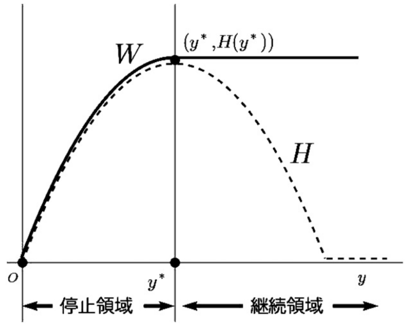

図 2　アメリカ型プットオプションの場合

と同じである．したがって，リアルオプションにおける最適停止問題と同じ停止時刻が最適である．

一方，売る権利であるアメリカ型プットオプション

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{S}}E^x\left[e^{-r\tau}\max\left(K-X_\tau,0\right)\right]$$

では，コールオプションと利得関数が異なり（減少関数），関数 H と W は図 2 の形状となる．十分に株価が低下したところが停止領域である．境界 y^* では，value-matching condition も smooth-pasting condition も成立している．

しかしながら，キャップ付きアメリカ型コールオプション

$$V(x)=\sup_{\tau\in\mathscr{S}}E^x\left[e^{-r\tau}\max\left(\min(X_\tau,L)-K,0\right)\right]$$

のように，利得関数の値が正である領域で微分可能でない点が現れると，パラメータの設定によっては図 3 のように smooth-pasting condition が満たされなくなる ([1] Sec. 6.3). 図 3 の点 y^* はキャップ価格 L に対応している．

これら以外の取引についても [1] Sec. 6 では興味深い分析を行っている．

3.3 保有証券の最適売却戦略

配当率 δ の株式価格 X が確率微分方程式 (3) に従

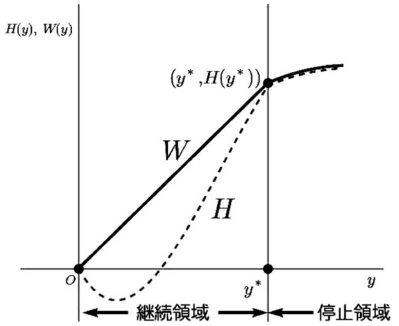

図 3　smooth-pasting condition が満たされない例

うとする．ある投資家がコスト I でその株式を購入し，その購入代金を金利 r で借り入れ，将来時点 τ で株式を売却し資金 I の返済を行うことを考えている．ただし，人員縮小，部門閉鎖や方針転換など特殊要因が生じた場合には，その時点 U ですべてを精算しなければならない状況であるとする．その偶発的な時刻 U は X とは独立な指数分布に従う $(U \sim Exp(\lambda))$ と仮定する．また，時間選好率 β は $\beta > \max(\mu+\delta, r)$ とする．

投資家が直面する問題は最適停止問題

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathscr{S}} E^x \Big[e^{-\beta(\tau \wedge U)} (X_{\tau \wedge U} - I) + \int_0^{\tau \wedge U} e^{-\beta u} (\delta X_u - rI) du \Big]$$

であるが，これは補題 3 により

$$\begin{aligned} V(x) &= \sup_{\tau \in \mathscr{S}} E^x \left[e^{-(\beta+\lambda)} (g - \phi)(X_\tau) \right] \\ &\quad + (R_\beta f)(x) + \phi(x), \\ f(x) &= \delta x - rI, \quad g(x) = x - I - (R_\beta f)(x), \\ \phi(x) &= \lambda (R_{\beta+\lambda} g)(x) \end{aligned} \tag{10}$$

となる[5]. 利得関数は補題 3(iii) により具体的に求めると

$$g(x) - \phi(x) = \frac{\beta - \mu - \delta}{\beta - \mu + \lambda} x - \frac{\beta - r}{\beta + \lambda} I$$

であるので，3.1 節リアルオプションと同様に価値関数と最適停止時刻を求めることができる．ただし，(10) の右辺の第 1 項は非負であるものの，$(R_\beta f)(x) + \phi(x)$ の項の存在（特に $\phi(x)$）により価値関数の値は負になりうることが通常の最適停止問題と異なる．これは強制的な精算により最適な意思決定の機会を必ずしも保証されていないためである．

ここでは，$\beta > \max(\mu+\delta, r)$ と仮定したが，$\beta \leq \mu+\delta$ や $\beta \leq r$ の場合には，利得関数の形状が異なるので，最適停止時刻も当然異なってくる．配当率 δ が十分に高ければ，高配当を享受するためにいくら高値になっても株式を売らずに，ある程度安値になるまで保有することが最適となろう．借入金利が多少高ければ安値で損失確定の売却を行うが，借入金利が十分に低ければ売却はしないで永遠に（強制的に精算せざるを得ない事態になるまで）保有することが最適となる．さらに，配当率が低く借入金利が高いと保有せずに即座に売却する（そもそも購入しない）ことが最適である．強制的な精算リスクは，基本的な売却戦略に影響はしないもののこれらの売却を早める効果があるであろう．また，$\phi(x)$ の効果により価値関数の値は負になりうる．関心のある読者は手順を踏んで確かめられたい．空売りから入る場合の買戻戦略については [5] が詳細に考察している．

4.　おわりに

本稿ではファイナンスの話題の中でも最適停止問題を扱う基本的な問題を解くための手法を紹介した．

満期が無限の場合には閾値が定数となってある程度解析的に扱えるが，有限満期では閾値が時間の関数となるため解析的な扱いは難しく，一般的には近似式や数値計算に依存している．

幾何ブラウン運動以外にも中心回帰性を持つ確率過程やジャンプを伴う過程も用いることや多段階停止問題はチャレンジングであるが可能である．

参考文献

[1] S. Dayanik and I. Karatzas, “On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions,” *Stochastic Processes and Their Applications*, **107**, 173–212, 2003.

[2] G. Peskir and A. Shiraev, *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhäuser Verlag, 2006.

[3] E. B. Dynkin, “Optimal choice of the stopping moment of a Markov process,” *Doklady Academii Nauk SSSR*, **150**, 238–240, 1963.

[4] A. Dixit and R. Pindyck, *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

[5] T.-K. Chung and K. Tanaka, “Optimal timing for short covering of an illiquid security,” Discussion paper, Tokyo Metropolitan University, 2014.

[5] 変数 x，X の初期値 $X_0 = x$，株式購入単価 I を区別することに注意されたい．