「運・鈍・感」で綴る若手研究者へのメッセージ

藤重　悟

研究者としての人生を決定づける「三ん」（運・鈍・感）を軸に，研究活動の心得についてお話しし，自分の「ライフワーク」である劣モジュラ関数の研究を振り返って，若手研究者へのメッセージとしたい．

キーワード：運・鈍・感，研究の心得，ライフワーク，自己評価，巡り会い

1. はじめに

本小文は，2 年半ほど前（2012 年 6 月）に筑波大学で開催された SOTA での講演 [1] を基に書いている．同講演のプレゼンで使ったスライドは数理解析研究所の私のページで公開しているが，それだけからは話した内容が十分には伝わらないので，何か書き物にしておきたいと思っていた．そんなところで，機関誌への執筆依頼があり，若い人たちに向けたメッセージでよければということで快くお引き受けした次第である．しかしながら，この新年特集号の趣旨に十分こたえる内容になったかどうか自信がない．ともかく，本小文から少しでも若者たちに私の思いが届き，将来へ向けて彼らを力づけ，有益な示唆を与えることができれば幸いである．

2. 運・鈍・感

さて，いわゆる「三“ん”」として，よく言われるのは，「運・鈍・根」あるいは「運・根・鈍」であるが，お話ししたいのは，「運・鈍・感」である（ここで，とくに「感」が大事である）．この言葉は，私が京都大学（工学部数理工学科）の学生であったときに，私の出身の岩国高等学校の大先輩である末川博先生が，京都の岩国高校 OB 会のコンパに出て来られて，何度も伺った言葉である．（なお，末川先生は，1933 年の京大事件（滝川事件）によって京都帝国大学教授の職を辞した著名な民法学者で，岩波六法全書の発案・編集者としても有名であるが，戦後，立命館大学で長らく学長・総長を務め，立命館大学名誉総長になられた．）

ふじしげ　さとる
京都大学数理解析研究所（特任教授）
〒 606–8502 京都府京都市左京区北白川追分町

2.1 運

「運」とは，文字どおり，運の良さであり，“人”や“もの”との巡り会いである．人は往々にして「運の良さ」に気づかず，「運」を逃してしまうことがある．「運」を逃さないために，後で述べる「感」が極めて大事である．

2.2 鈍

「鈍」とは，ものごとに敏感に反応せず，動じず，こだわりを持って辛抱強く取り組む様を意味する．研究テーマや研究成果について，「外部評価」を気にせずに，「自己評価」をきちんとすることが大事である．「外部評価」の最たるものが「賞」であるが，取れなくても気にせず，自分で決めた研究テーマを信じて，地道な努力を積み重ねることが肝心である．ただし，賞は，研究者として「生きるため」には極めて有効な（便利な（？）） ものであり，取れなくても全く気にする必要はないが，取れるなら取っておくのが良い．（とくに，若いうちには．） また，良い「外部評価」は，「自己評価」の正しさを再認識させてくれ勇気づけてくれるものでもあるので，前向きに取り込めば良い．

2.3 感

「感」とは，心が動かされること，また，それに気づくことである（これが大切）．「心を動かす何か」を大切にしたものが種となり，後に芽を吹き花開き実を結ぶのである．「これは？」，「何かがありそう」，「ちゃんと理解したい」等々，. . . の心の動きを「感」として認識することが大切である．

2.4 運・鈍・感の相互作用

「鈍」と「感」は補完関係にある．「鈍」（こだわり）が大事であるが，何かを「感」じたときには，一気に転じる勇気も大事である．その分岐点は，「運」のフェーズにある．したがって，「運」と「感」は同時発生的で

ある．

近年のITの進歩により，「運・鈍・感」の重要性が増している．ネットの検索エンジンによって，最新の研究成果をアーカイヴやホームページで見つけることが容易になってきたし，注目する研究成果に関連する研究成果の検索が有効なことも多い．それによって，「これは（？）」と「感」じられる論文に巡り会える「運」（チャンス）も高くなる．しかし，最新の研究情報を追うことに時間を取られ，さらに，研究の方向が定まらずに発散してしまう恐れも出てくるので，「鈍」の重要性も増してきている．

3. 研究の心得

研究は，普遍的，本質的で，有用な「知の発見」を目指すことである．ここで，「知」とは，ファクト（真なること，真実）である．したがって，「知」は，存在するものであり，最近しばしば出会う「知の創造」というような言い方には違和感を覚える．

この年（67歳）になっても，知らないこと，わからないことの多さに圧倒される日々である．しかし，知の発見は，だれにでもチャンスがある！　私はいまだに研究を諦めずに続けているが，とくに若い人たちには，夢を持って，運・鈍・感を大切に，研究をがんばってもらいたい．

3.1 「使う○○」，「使える○○」，「使わない○○」

もう20年くらい前になるが，とある集会で，「使う数学」，「使える数学」，「使わない数学」のお話をしたことがある．数学には，実際に使われてその有用性が認識されているもの (Applied Mathematics) があり，また，いま現在は使われていないが，その有用性が認識され，すぐにでも使えるもの (Applicable Mathematics) があり，さらに，現在はどのように使えるかもわからないが美しい体系の数学（言い方が悪いかもしれないが（当面）「使わない数学」（「使えない数学」ではないことに注意））がある．美しい体系の数学は必ず将来において「使える数学」になるという確信を持って純粋数学の研究は発展してきているが，実学としてのORにとって「使う数学」，「使える数学」が重要であることは勿論であり，また，三つ目の「使わない数学」もしばしば新しいものの見方や考え方を示唆してくれるという意味で我々にとっても重要である．

我々のORについても同じことが言えるが，しばしば百年以上も経ってから有用性が明らかになるような数学と違って，実学に直に結び付くORでは，「使うOR」，「使えるOR」を目指して研究をすることになる．学会活動としては，「使えるOR」を「使うOR」とするような理論と現場の協働を推進することが大切である．現会長の下でそのようなプロジェクトが進められようとしているが，成功させたいものである．

3.2 研究の厳しさ

「研究」は「真剣勝負」である．ある意味で特許の競争とも似ていて，先を越されたら，それまでいかに努力していてその「知」の近くまで到達していたとしても，それは研究成果としては他者のものであり，自分自身にとっては無に帰してしまう厳しい世界である．自分の経験でも，ある成果が得られて論文として仕上げて，いざ投稿というときに海外から研究レポートが届いて，それが同じ結果を得たものであることを知って，投稿を断念したことがある．（70年代から80年代の当時は，成果を得たら研究レポートとして印刷し，読んでほしい世界中の研究者に郵送するという情報発信の形が取られていた．）

C. Berge（ベルジュ）によって1961年に提起された，いわゆる「（弱）パーフェクトグラフ予想」があって，D. R. Fulkerson （ファルカーソン） はBergeの予想が成り立たないと確信して反証明を試みていたために壁にぶち当たっていた．ところが，若き天才のL. Lovász（ロヴァース）によってBerge予想が肯定的に解決されたと，1971年の春にBergeから知らされたとき，その日のうちに自らもその証明ができたということである [2]．肯定的証明をするための十分な知の蓄積を有していたが，偉大なFulkersonであっても，成り立たないという自らの確信を揺らげさせるような，ひょっとしたらBerge予想が正しいのではないかと「感」じさせるような，「運」がなかったのである．Fulkersonの落胆の大きさは如何ほどであったか，計り知れない．その後，Fulkersonは，1975年に日本で開催のIFORSを機会に来日しているが，IFORSでセッション座長をしていた物静かな姿が今も強い印象として残っている．その翌年の訃報に，世界の研究者がその突然の死を惜しんだ．研究の真の厳しさを教えられた次第である．

ネット社会になった現在，研究の先陣争いはさらに厳しさを増している．今では，アーカイヴへのアップやワークショップなどでの口頭発表など，研究成果は様々な公表の仕方で情報発信される．そのような情報発信ではしばしば，公表の成果や証明に落ちがあったりして随時更新されたりするようなことがあって，成果を誰に帰すべきかの先陣争いをややこしくしている．

自分の経験でも，新しい成果として研究レポートを公表したところ，その一部について，あるワークショップの講演でアナウンスした事実であるとの指摘を受けて，論文の修正をしたこともある．

そのように，重要な先行研究を見落とす危険性が大きくなってきたように思うが，その意味でも，しっかりした学術専門誌に投稿して，良質の査読者のコメントをもらうことは有益であるし，ちゃんと学術専門誌等で最終的な成果を確定させる努力も大切である．

3.3 ライフワークと生きるための研究

研究は，自分で面白いと思い惚れ込んだテーマを見つけ（運・感），その解決に向けて辛抱強く集中すること（鈍）が重要である．このようなテーマはしばしば「ライフワーク」となるような手強い課題であり，それだけに取り組んでいると何も成果がなく年を重ねる恐れがある．したがって，適当な職に就き家族を養えるような収入を得られるようになるためには，仕方がないことであるが，「生きるための研究」も重要である．

何も，「ライフワーク」と「生きるための研究」を意識して使い分ける必要はなくて，「ライフワーク」に取り組んでいると，それに派生していろいろな小さな課題が見つかるのである．それらを重要でないと自分で決めつけないで，解決し研究成果として世に問うことが大切である．自分では大したことないと思った結果が思わぬ評価（反響）を受け，自己評価を再考することもあるのである．さらに大事なのは，そのような小さな成果の積み重ねが，「ライフワーク」の解決に向けた力となり，しばしばブレイクスルーへと繋がるのである．

3.4 良き「師」（案内人，助言者）

研究テーマをどのように選ぶべきかについて助言するのは難しい．何を研究するか，で研究の勝負の大半は決まると言っても良いのである．「生きるための研究」ではとくにそうである．

学生のときには，通常は，指導教員から研究テーマあるいは研究のネタになる論文を与えられて，研究を始めることになる．この段階は，「習う・学ぶ」ことに集中し，論文の読み方，研究の仕方，さらには進んで論文の書き方を習うのである．この手順を踏んで，研究のセンスが磨かれ，自分の研究テーマを見つけるフェーズに入る．修論の完成前後が，この時期に当たる人が多いであろう．

私自身は，1975 年 4 月に東京大学の計数工学科で伊理正夫先生の下で助手として働き始めてから，ライフワークとしての研究テーマに巡り会えたので，焦る必要はない．博士課程を終えてからでも遅くない．ここで重要なのは，良き「師」（案内人，助言者）との巡り会い（運）である．近くにいて，何か聞きたいことがあればすぐに聞けて，適切な助言をもらえて研究を正しい方向へ導いてもらえる「師」の存在は大きい．私は，伊理正夫先生に巡り会えたことを大変幸運に思っている．（なお，私の場合，京大数理工学科の制御理論講座（椹木義一教授）に所属し，確率的制御と推定のテーマであったが，論文の読み方，研究の仕方，論文の書き方については，片山徹先生（当時助教授）の指導を受けて研究者として独り立ちできる状態にあったことも，大きい.）

現在のネット社会にあっては，良き「師」（案内人，助言者）は，必ずしも物理的に近くにいる必要はなくて，ネットを介して世界の研究者と容易に情報交換可能であり，議論が可能である．メールだけではなく，オンラインでディスプレイを介して意見交換が可能になってはいるが，必要に応じて，実際に顔を合せて議論することが有効であることは間違いない．最近では，そのための研究資金が比較的受けやすい状況にあることはありがたいことである．

3.5 研究テーマと研究の進め方

「ライフワーク」でも「生きるための研究」でも基本的に共通することであるが，研究テーマ（課題）との向き合い方，研究テーマが見つかったときにどのように研究を進めるべきか，についてお話ししよう．

3.5.1 ぶちあたった「壁」はどうすべきか？

課題に取り組んで研究を始めても，先に進めなくなって悩むのが常である．経験では，20 回くらい壁にぶちあたってやっと（小さな）成果が得られるようなものである．研究者は基本的に楽天家でないと生きていけない．壁にぶちあたって絶望していては，命がいくつあっても足りないのである．頑張って考えていれば何とかなるという気持ちが大切である．後の話にも関係するが，実際，何とかなるものである．このとき，適切な助言や議論をしてもらえる人が近くにいることが「運・感」の観点から大事である．

3.5.2 すぐに諦めるな！

壁にぶちあたっても，共同研究者がいて，複数で研究課題に取り組んでいるときは，そのグループ内で議論を交わして，新たな視点に飛躍する「運・感」のチャンスもあって，やりやすいのであるが，一人で大事に取り組んでいる課題については，相当な信頼関係を結んだ研究者でないと，立ち入った議論をお願いすることができないのは辛いところである．場合によっては，

共同研究を提案して一緒に始めることになることもしばしばある．

ともかく，壁にぶちあたって，数ヶ月集中して考えてうまくいかないときには，一度引いて，眺め直そう！先へ進めない閉じた思考の回路から脱出する必要がある．また，気分転換も良い効果をもたらすことがある．

取り組んでいる課題の解決のために有力と思われるが知識が不足する分野の勉強をし，基本に戻って，足腰を鍛え直すことも良い．そのような勉強を進めて，周辺の最近の成果に目を通しているうちに，それらの中に現在抱える課題の解決へのヒントが得られることもある．

3.5.3 研究テーマ，アプローチの再考

前にも述べたが，研究に関しては，「外部評価」（とくに賞など）を気にしてはいけない．大切なのは，「自己評価」である．

- やりたいこと，解きたいことにチャレンジしているか？
- やりやすいこと，解きやすいことで満足していないか？
- 身勝手な「自己満足」に陥っていないか？

研究は，宝探し（知の発見）である．どんなに優秀な研究者であっても，宝のないところをいくら掘っても，宝物は出てこない．どこを掘るかで，大半の勝負は決まる．

「明るい場所」と「暗い場所」のよく知られた笑い話がある．（言いたいことは少し違っていたように思うが，東工大の松井知己さんが，昨年の春季研究発表会の特別講演でも，同様の話をされていた.）夜に街灯の下で何か探しものをしている人を見かけて，「どうしましたか？」と尋ねると，「落し物をしたので探しています」と言われて，「この辺りに落としたのですか？」とさらに尋ねると，「ここではなさそうですが，ここが明るいので，ここを探しています」というお話である．研究についても，ややもすると本来目指すべき難しい問題（暗い場所）を置いておいて，目指すべき問題から離れたやさしい問題（明るい場所）に取り組むことで自己満足する危険性がある．

しかしながら，「生きるため」には，やさしい問題（明るい場所）に取り組んで小さな成果でも積み上げていく必要がある．さらには，そのような成果の積み上げの過程で「ライフワーク」の問題へのブレイクスルーのきっかけを掴む可能性もある．その意味で，「生きるための研究」であることを認識したうえでの，明るい場所での「生きるための研究」も大いに追求することをお勧めしたい．

さらに，掘るべき場所にいても，スコップしか持っていなければ宝物のある深さまで掘ることができないかもしれない．ブルドーザーや大型の掘削機にはかなわない．そのためにも，当該分野の基礎的な勉強をきちんとしかも幅広くして，研究力を高めておくことが大事である．また，年をとっても研究力が足らないと思ったら勉強する必要がある．

4. 劣モジュラ関数の研究

自分自身の周辺の話題になってしまうが，劣モジュラ関数の研究についてお話ししよう．ここで省略した事柄や文献も多いが，それらについて関心のある人は文献 [3]（理論をちゃんと勉強したい人は [4, 5] など）も参照されたい．

非空有限集合 E の各部分集合 $X \subseteq E$ に対して，実数（あるいは限定して，有理数，整数）値 $f(X)$ を割り当てる集合関数 f は，任意の部分集合 $X, Y \subseteq E$ に対して，

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \qquad (1)$$

を満たすとき，劣モジュラ関数 (submodular function) と呼ばれる．（集合関数だけでなく，もう少し一般的な劣モジュラ関数も考えられている.）

「劣モジュラ」という用語は，私がこの関数の研究に参入した 1976 年の時点で，これに対応する日本語の用語が見つからず，既に用語として確立されていた，モジュラ束 (modular lattice) などのモジュラと劣加法的 (subadditive) より，「劣モジュラ」を使い始めた．式 (1) の不等号を逆向きにして（「大小関係」を全く逆にして）定義される関数を優モジュラ関数と呼ぶ．両者は，数学的には全く変わりのない概念である．漢字の「劣」を気にする向きもあるが，自分自身は最初から気にしたことはなく，これは慣れの問題であろう．

4.1 1970 年代前半まで

劣モジュラ性は，例えばマトロイドの階数関数として現れ，したがって，グラフや行列の階数関数としていろいろな離散最適化に関わってくる．その歴史は古く，H. Whitney らによるマトロイド理論や G. Choquet の Capacity 理論など，1930–50 年代に遡る．1960 年前後に，W. T. Tutte によってマトロイド理論の精緻化がなされ，1960 年代半ばには，J. Edmonds や D. R. Fulkerson らによりマトロイド構造に関わる最大最小定理が示されるなどして，マトロイド研究が展開され，1970 年の Edmonds の論文 [6] によってさら

にポリマトロイドへと一般化されて，劣モジュラ関数の理論が一つの頂点に達した．（なお，ほぼ同時期に，L. S. Shapley によって示された凸ゲームのコアに関する成果 [7] がある．凸ゲームを定める特性関数は優モジュラ関数であって，コアは基多面体の概念と一致し，Edmonds と Shapley の先陣争いに関する微妙な話もある.）

一方，1967 年に岸・梶谷によって示されたグラフの基本分割は，甘利によって提起された回路網の位相幾何学的自由度の決定問題を解決する糸口を与え，さらに，伊理，Bruno–Weinberg，冨澤信明，H. Narayanan によって，行列からマトロイドの基本分割へと発展されて，1974 年に一つの頂点に達していた．さらに，その時期には伊理・冨澤による電気回路網諸問題への統一的アプローチによって未解決問題が解決され，私が伊理先生の研究室で助手として働き始めた 1975 年には，マトロイドの理論と応用に関する最新の成果に触れることができ，知的な刺激に溢れていた．

1970 年代に入っての計算機科学におけるアルゴリズム研究の進展と相まって，マトロイド最適化のアルゴリズム研究も進められていた．伊理研究室に入った当初すでに，独立割当問題の解法に関する伊理・冨澤の JORSJ 論文 [8] が仕上がっており，E. L. Lawler の本 [9] の原稿のコピーを読むこともできた．（なお，伊理・冨澤の JORSJ 論文の掲載が 1976 年になったのは，当学会の諸事情で遅れたものである.）

4.2　1970 年代後半から

私がマトロイド最適化の研究に本格的に取り組み始めたのは，1976 年からである．独立割当問題に対する伊理・冨澤の主・双対解法に対して，主解法を示したのが 1977 年 3 月の JORSJ に掲載された．補助グラフ上の負閉路による最適解の特徴づけに関する証明は，西武新宿線の通勤電車の吊革につかまって揺れながら気づいたが，今でも面白い証明法だと思っている．この論文に関しては，伊理先生に議論していただいていたので，共著論文として原稿をまとめ，添削をお願いしたところ，多くの修正の手を入れていただいて戻って来た原稿を前にして，伊理先生からご自身の著者名を削除するように言われた．それは，私のことを思ってなされた配慮だと思うのであるが，私には非常な驚きであり，伊理先生の研究に対する強い自信の現れであろうと感じ入った．（取るに足らない成果の論文に関わりたくなくて共著者にならない教員がいるという話を最近でも聞いたことがあるが.）このことがあって，JORSJ2 編目の独立連接に関する論文も単著としてまとめ，その後，共著論文を書く機会が少なくなって，伊理先生との共著論文がこれまでに 2 編しかないことを残念に思っている．

一方，伊理先生は，独立割当問題に対する伊理・冨澤の JORSJ 論文で，マトロイド最適化の一つの頂点に達したとの認識であったが，ネットワーク最適化におけるマッチングからフローへの一般化に対応する独立割当問題の一般化がどのような形で可能であるのかについて問題意識を持っておられた．しかしながら，1976 年の段階で日本では，ポリマトロイドに関する Edmonds の成果は認識されていなかった．私が初めて「ポリマトロイド」に接したのは，C. McDiarmid の論文 [10] を 1976 年の夏に計数工学科の図書室で見つけたときである．計数工学科にこの学術専門誌があり，たまたまこの論文を目にしたのは幸運であった．

マトロイドからポリマトロイドのドアを開けば，独立連接のモデルを独立フローのモデル [11] に拡張し，理論とアルゴリズムの研究を展開するのはそんなに難しいことではなかったが，新しいことをするには新しい道具立て（概念）が必要になり，一般化で分解能が上がる分，マトロイドでは見えなかったポリマトロイドの面白さに惹かれていった．1976 年の秋から冬にかけてのことである．

独立フローの研究を通してポリマトロイドが，冨澤–Narayanan のマトロイドの基本分割を正しく認識するために極めて有用な概念であることに気づき，その後，自然にポリマトロイドの基本分割や辞書式最適基，さらには劣モジュラ制約付き資源配分問題へと研究が展開した．

ポリマトロイドの階数関数には単調性が仮定されるが，組合せ的構造に不変な基多面体の平行移動（階数関数へのモジュラ関数の足し込み）で単調性が壊される．そこで，単調性を課さない「劣モジュラ・システム」という概念を提示し，1978 年の東大工学部紀要に，劣モジュラ多面体，基多面体，双対優モジュラ多面体やそれらの変換に関するメモを残した．その機会があったのは幸運であった．1980 年から冨澤さんが「超空間論」の一連の研究を展開され始めたときに，私も同じようなことを考えていたことを話し，このメモのお陰で，納得していただけた．やはり，ちょっとしたことでも書き物にしておくことが大事である．

4.3　1980 年前後から

1979 年に A. Recski（レチキ）さんが伊理研究室に滞在していて，いろいろ議論できたのはありがたかった．劣モジュラ関数最小化について質問され，最大独

立フロー・最小カット定理に基づき，劣モジュラ関数最小化の特徴づけである最大最小定理を書いて示したことがある．ちょうどその頃ハンガリーでは，Lovász の（今で言う）Lovász 拡張による特徴づけや A. Frank による劣モジュラ／優モジュラ関数の離散分離定理が考えられていたのではないかと思われる．

その頃，冨澤さんと劣モジュラ関数は凸か凹かで議論し，冨澤さんは凹関数，私は凸関数だという話をしていたが，私は凸解析とのアナロジーで話を展開して，Fenchel 型の最大最小定理に至り，それが Edmonds の交わり定理や Frank の離散分離定理と同値であることを見て，納得した．とくに，Edmonds の交わり定理が，凸解析における Hahn–Banach の分離定理の形を変えた離散版であることは面白いと思った．

独立フロー問題の解法で示したポリマトロイド上の変換技法は，その後，U. Zimmermann による劣モジュラ・フロー問題の解法，Lawler–Martel による最大ポリマトロイド・フローの解法，等々に生かされていく．劣モジュラ・フローは，Edmonds–Giles (1977) によって，交差集合族上の劣モジュラ関数（交差劣モジュラ関数）という通常の劣モジュラ関数を一般化した関数を使ってフロー問題が（一見して）非常に一般的に記述されていたが，独立フロー問題を真に一般化するものなのかどうかわかっていなかった．一方，Zimmermann の成果は独立フローの解法の技法がほとんどそのまま使えることを示していた．そこで，劣モジュラ・フロー問題の本質に迫るべく，交差劣モジュラ関数を多面体的観点から調べ始めて，交差劣モジュラ関数は，形式的に劣モジュラ多面体や基多面体の不等式系を書いて多面体を定義すると，劣モジュラ多面体に対応するものは違う種類のものを定義するが，基多面体に対応するものは（非空なら）同じ基多面体を定義する（したがって，通常の劣モジュラ関数で表現可能である）ことに気づいた．これによって，さらに，劣モジュラ・フロー問題，ポリマトロイド・フロー問題，独立フロー問題が，本質的には同値なモデル（ネオ・フロー問題と呼んだ）であることが明らかになり，それ以後の研究の流れをすっきりさせた．

ネオ・フロー問題の解法は，古典的なフロー問題の解法の発展の後を追うように発展してきたが，一般化のために新たな技法が必要であった．1978 年の独立フローの成果は，Ford–Fulkerson の最大フローや最小費用フローの段階であったが，辞書式順の最短路探索による Lawler–Martel と Schönsleben の成果が Edmonds–Karp による最大フローの最初の多項式アルゴリズムの精緻化に対応する，等々，つい最近まで世界中で活発にネオ・フロー（劣モジュラ・フロー）の研究が展開されてきている．

その間，ドイツ（ボン大学）の B. Korte 教授の研究所（現離散数学研究所）に 1982 年 10 月から 1 年間滞在できて，世界の優秀な多くの（とくに同年代の）研究者たちと交流できたことは，極めて幸運であった．また，著名な人たちからも、私を伊理先生の“弟子”だと思って声をかけていただけたのは，伊理先生のお陰であった．

ところで，独立フローの扱いのときから，アルゴリズム構成のためには交換容量や飽和容量と呼ばれる量の計算がいわゆるオラクルとして想定されており，それらの量を計算することが一般の劣モジュラ関数最小化の問題と同値であることが世界で広く認識されていた．その意味で，ネオ・フロー問題の多項式時間アルゴリズムの真の構成のために，劣モジュラ関数最小化の多項式時間アルゴリズムの構築が問題となった．

この問題に対して，Grötschel–Lovász–Schrijver によって，1981 年に弱多項式時間アルゴリズムが，1988 年に強多項式時間アルゴリズムが構築されたが，いずれも Khachiyan の楕円体法を使う非組合せ的なアルゴリズムであった．

4.4　1990 年以降

その後，1999 年 7 月に岩田–Fleischer–藤重と A. Schrijver（スクライファ）とによって同時に独立に異なる，劣モジュラ関数最小化の組合せ的な多項式時間アルゴリズムが構成された．（なお，2009 年の J. Orlin のアルゴリズムが理論上現在最速である．）我々のアルゴリズムは岩田さんに負うところが大きい．この成果の発表（投稿）に至るまでには，かなり神経を使い，慎重に仕上げた．（先般の理研の騒動に関わる論文の仕上げ方の緊張感のなさには唖然としたものであるが．）J. ACM に投稿し，受付を確認して，世界の主要な研究者に成果を知らせたところ，そのうちの一人の W. H. Cunningham から，Schrijver から同時に論文が届いたとメールで知らせがあり，大変驚いた．私としては，すでに投稿済みであったので，研究の先陣争いで問題になる心配がないことに安堵した次第である．我々の投稿の前に Schrijver の成果が届いていたら，と思うと背筋が寒くなる思いである．このとき，私の年齢が Fulkerson の亡くなったときの年齢と同じであったのは奇遇であろうか．

劣モジュラ関数最小化は，多くの離散最適化問題の部分問題として現れ，近年の機械学習や人工知能の分

野でも話題となっている．私が 1980 年代の初めに提案した，P. Wolfe（ウルフ）の最小ノルム点アルゴリズムを使った最小化アルゴリズムが今でも実用的には有効であるようである．このアルゴリズムは，線形計画問題の単体法と同じように実用的には速いが，その理論的な計算複雑度はまだはっきりしていない．

さらに，1990 年以降の話題では，室田一雄さんによる「離散凸解析」の展開に触れなければならない．

1993 年 12 月から 1 年間，ボン大学の離散数学研究所に滞在したが，その始めの期間が室田さんの滞在と重なり，そのとき，基の対称な同時交換公理についてかなり熱心に質問された．何か重要な研究課題を抱えている雰囲気であったが，それが「離散凸解析」を暖めていた時期であったと思われる．(「離散凸解析」について詳しくは，室田さんの著書 [12, 13] などを参照されたい．その他にも関連の和書が何冊かある．拙著 [4] の 4 章，7 章も参考になろう.）

室田さんの「離散凸関数」は，かなり一般化した形でも扱われているが，基本的な形は，整数格子上の整数値離散凸関数である．その発想の源流は，Dress–Wenzel (1990) の付値マトロイドにあって，その流れに沿うのが「M 凸関数」(あるいは「$\mathrm{M}^{\natural}$ 凸関数」）と呼ばれている．その関数が 1 次関数的な振舞いをする定義域の極大領域がどれも，格子点上の基多面体（あるいは一般化ポリマトロイド）になっている．その「M 凸関数」(あるいは「$\mathrm{M}^{\natural}$ 凸関数」）の凸共役関数（Legendre 変換）を考えて，「L 凸関数」(あるいは「$\mathrm{L}^{\natural}$ 凸関数」）と呼ばれる整数格子上の離散凸関数が得られる．その後，$\mathrm{L}^{\natural}$ 凸関数は，Favati–Tardella (1990) の考えた劣モジュラ整凸関数と（本質的に）同じであることが認識された．$\mathrm{L}^{\natural}$ 凸関数は，定義域の整数格子の各単位格子上に劣モジュラ集合関数が定められて，全体として凸（連続空間に凸拡張可能）になっているようなものである．したがって，劣モジュラ集合関数とそれに関係する基多面体などの理論や劣モジュラ関数最小化を始めとする効率的アルゴリズムが「離散凸解析」を支える基盤になっている．

離散凸構造は，ネットワーク最適化や画像処理など工学諸問題はもとより，純粋数学にも現れるし，経済均衡，オークション，ゲーム理論など，経済や OR の分野でも実際的な離散最適化の諸問題にしばしば顔を出し，「離散凸解析」の重要性が広く認識され，現在も活発な研究が進められている．

5. おわりに

京都の国際会議場（国立京都国際会館）の入口に，湯川秀樹博士の自筆で「世界は一つ」の石碑がある．最近つくづく平和のありがたさを身にしみて感じるのである．国，民族，宗教，人種などの違いを乗り越えて，世界が一つの平和な共同体として人類の営みがなされる日が早く来ることを，新年にあたり改めて心よりお祈りする．

研究（宝探し）の競争はある意味で平和であり，若い研究者たちには，世界の研究者を相手に大いに切磋琢磨して先陣争いをしてほしい．私はこれまで，私との巡り会いを幸運と思ってくれる人を一人でも多く持ちたいと思って，教育・研究に励んできた．これからも，若い人たちの研究のお役に立てることがあればできる限りの支援をしたいと思っている．皆さんのこれからのさらなる活躍を期待している．

私が現在もなお研究ができているのはまったくの幸運であり，これまでの多くの人たちとの巡り会いに心より感謝している．また，私の知らない（気づかない）ところで今日まで支えていただいた多くの方々に感謝する次第である．

参考文献

[1] 藤重悟,「若手研究者へのメッセージ——離散最適化研究者の回想—」，日本 OR 学会「最適化の理論と応用」研究部会（最適化の理論と応用—未来を担う若手研究者の集い 2012）(SOTA@つくば，筑波大学，2012 年 6 月 30 日)．

[2] L. J. Billera and W. F. Lucas, "Delbert Ray Fulkerson August 14, 1924–January 10, 1976," *Mathematical Programming Study*, **8**, 1–16, 1978.

[3] S. Fujishige, "Personal reminiscence: Combinatorial and discrete optimization problems in which I have been interested," *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*," **29**, 357–384, 2012.

[4] S. Fujishige, *Submodular Functions and Optimization*, 2nd ed. (Annals of Discrete Mathematics **58**), Elsevier, 2005.

[5] 伊理正夫，藤重悟，大山達雄，『グラフ・ネットワーク・マトロイド（講座・数理計画法　第 7 巻）』，産業図書，1986.

[6] J. Edmonds, "Submodular functions, matroids, and certain polyhedra," *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim (eds.), Gordon and Breach, pp. 69–87, 1970.

[7] L. S. Shapley, "Cores of convex games," *International Journal of Game Theory*, **1**, 11–26, 1971.

[8] M. Iri and N. Tomizawa, "An algorithm for finding an optimal 'independent assignment'," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **19**, 32–57, 1976.

[9] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization—Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
[10] C. J. H. McDiarmid, "Rado's theorem for polymatroids," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **78**, 263–281, 1975.
[11] S. Fujishige, "Algorithms for solving the independent-flow problems," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **21**, 189–204, 1978.
[12] 室田一雄,『離散凸解析』, 共立出版, 2001.
[13] K. Murota, "Discrete convex analysis," *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications*, **10**, SIAM, 2003.

