待ち行列への点過程アプローチ: 入門編

三好　直人

待ち行列などの確率モデルに対する“点過程アプローチ”では,「客はポアソン過程にしたがって到着する」というような特定の確率過程を仮定することなしに解析を進めます. そのため, 特定の確率分布や確率過程に依存しない, モデルが持つ基本的な性質を得ることができます. 本稿では, この分野の勉強・研究をこれから始める人, あるいは始めたばかりの人を対象に, 点過程アプローチの基本について解説します. 今後, マルコフ性などを仮定したモデルを解析するとしても, ここで述べることくらいは知っておいて損はないと思います.

キーワード：マーク付き点過程, 定常性, パルム確率, リトルの公式, 率保存則, PASTA

1. はじめに

本稿では, 待ち行列などの確率モデルに対する“点過程の理論”に基づく解析アプローチを紹介します. このアプローチでは, 待ち行列モデルにおける客の到着や退出など, 何らかの出来事の起こる時刻の列を数直線上のランダムな点列とみなします. こう書くと, 当たり前のことを言っているように聞こえるかもしれません. 実際, 待ち行列モデルの解析でよく用いられるポアソン (Poisson) 過程やマルコフ (Markov) 到着過程などは点過程の例です. では, 点過程アプローチでは何が違うのでしょうか? それは, 解析にあたって, ポアソン過程やマルコフ到着過程などの特定の確率過程を初めから仮定する訳ではないという点です. それどころか, 点と点の間隔の独立性やマルコフ性といった条件も仮定せず, ただ点過程が“定常性”という性質を持っていることだけを仮定して解析を進めます. こうして, 特定の確率分布や確率過程に依存しない, モデルが持つ基本的かつ普遍的な性質を導くことができるのです.

待ち行列に限らず, 確率モデルの解析ではマルコフ性はとても強力であり, これを仮定しないで意味のある結果は得られないのではないかと思うかもしれません. 実際, 解析を進めながら必要な条件を加えていった結果, 初めからマルコフ性を仮定したときと同じものしか得られない場合もあります. しかし, その場合でも, なぜその条件が必要なのか, 条件を緩めると何が起こるのかなどを論じることができるのです.

みよし　なおと
東京工業大学　大学院情報理工学研究科
〒 152–8552 目黒区大岡山 2–12–1–W8–52

点過程アプローチでは, モデルが定義されている確率空間を直接扱うことになるため, 初めは少し抵抗があるかもしれません. しかし, 本稿で紹介する定常点過程に対する“パルム (Palm) 理論”は決して難しいものではありません. 本稿を通して, 点過程アプローチとその背後にある理論の面白さ・美しさを少しでも感じてもらえれば幸いです.

2. マーク付き点過程

以下, $\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathbb{Z}$ を整数の集合とします.

2.1 点過程

次の 2 つの条件を満たす数直線 $\mathbb{R}$ 上の点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を考えます.

$$\cdots < T_{-1} < T_0 \le 0 < T_1 < T_2 < \cdots \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} T_n = \pm\infty \quad \text{（複号同順）} \qquad (2)$$

添え字の付け方は, 正の方向に 1, 2, 3, ..., 負の方向には, $T_0 = 0$ の可能性も含めて 0, −1, −2, ... という約束です. (1) 式は数直線上の同じ位置に複数の点がないことを表し, このとき点列は**単純**であるといいます. 一方, (2) 式は有界な区間に入る点の数が有限であることを表し, このとき点列は**局所有限**であるといいます. 点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の要素のうち, $\mathbb{R}$ 上の区間 B に入っている点の数を $N(B)$ と表すことにします. すなわち,

$$N(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(T_n)$$

です. ここで, $\mathbf{1}_B(t)$ は $t \in B$ であれば 1, $t \notin B$ であれば 0 を値にとる指示関数です. この N を任意に与

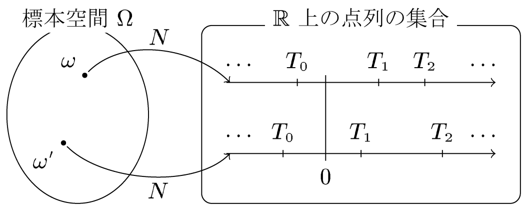

図 1　ℝ 上の点過程

えられた区間に対して非負整数値を返す関数（計数測度といいます）と見ると，N と $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は 1 対 1 に対応し，そのため（記号の乱用ですが）$N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と書きます．点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が単純であれば，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $N(\{t\})$ の値は 0 または 1 であり，局所有限であれば，任意の有界な区間 B に対して $N(B)$ の値は有限です．

このような点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$（または計数測度 N）がランダムに（与えられた標本空間上の関数として）定まるとき，$N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を ℝ 上の**点過程**といいます（図 1 参照）．与えられた標本空間を Ω とすると，N や T_n $(n\in\mathbb{Z})$ は Ω の要素 ω によって定まるので，$N(\omega,B)$ や $T_n(\omega)$ と書くべきかもしれませんが，特に必要がない限り ω を省略するのが普通です．

2.2　マーク付き点過程

点過程 $N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が，待ち行列にやってくる客の到着時刻の列を表すものとすると，客はサービス時間やサービスの優先順位など，何らかの付属情報を持っています．そこで，こうした付属情報をマークと呼ばれる確率変数によって表し，点過程の点と組にした確率過程を考えます．このような確率過程を**マーク付き点過程**といいます．例えば，マークの列を $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とすると，マーク付き点過程は $N_Z=\{(T_n,Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と表されます．どんなモデルを考えるかによってマークがとる値の集合（マーク空間）は変わりますが，これを K と表すと，ℝ 上の区間 B と K 上の区間 C に対して，$N_Z(B,C)$ によって，区間 B にある点のうちマークの値が C に入っているものの数を表します（$\mathbb{R}\times K$ 上の計数測度）．

3.　定常点過程とシフト作用素

3.1　定常性

確率過程が**定常**であるとは，時間が推移しても確率法則が変わらないということです．例えば，実数値をとる確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が確率 P について定常であるとは，任意の自然数 k，実数 s_1，$s_2,\ldots,s_k$，t，ℝ 上の区間 C_1，$C_2,\ldots,C_k$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big(X(s_1)\in C_1,\ldots,X(s_k)\in C_k\big)\\&=\mathsf{P}\big(X(s_1+t)\in C_1,\ldots,X(s_k+t)\in C_k\big)\end{aligned}$$

が成り立つということです．マーク付き点過程 N_Z の場合は，任意の自然数 k，ℝ 上の区間 B_1，$B_2,\ldots,B_k$，マーク空間上の区間 C_1，$C_2,\ldots,C_k$，非負整数 ℓ_1，$\ell_2,\ldots,\ell_k$，実数 t に対して，

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big(N_Z(B_1,C_1)=\ell_1,\ldots,N_Z(B_k,C_k)=\ell_k\big)\\&=\mathsf{P}\big(N_Z(B_1+t,C_1)=\ell_1,\\&\qquad\ldots,N_Z(B_k+t,C_k)=\ell_k\big)\end{aligned}\tag{3}$$

が成り立てば，N_Z は確率 P について定常です．ここで，ℝ 上の区間 B と実数 t に対して $B+t=\{s+t\mid s\in B\}$ です．(3) 式は，k 個の区間 B_1，$B_2,\ldots,B_k$ をすべて同じだけずらしても，マークの値が C_1，$C_2,\ldots,C_k$ に入っている点の数の確率分布は変わらないことを表しています．マークのない点過程の場合も，(3) 式の C_1，$C_2,\ldots,C_k$ をすべてマーク空間自身とすることによって，定常性を表すことができます．

3.2　シフト作用素

定常な確率過程を考えるとき，時間軸 ℝ 上の時間の推移を標本空間 Ω 上の標本の変化に対応させると便利なことがあります．その対応付けをするのが**シフト作用素群** $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ であり，これは次の 2 つの条件によって定義されます．

(i) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，シフト作用素 θ_t は Ω から Ω への全単射．

(ii) 任意の s，t に対して $\theta_s\circ\theta_t=\theta_{s+t}$，かつ θ_0 は恒等関数．

ここで "∘" は関数の合成を表し，$\omega\in\Omega$ に対して $\theta_s\circ\theta_t(\omega)=\theta_s(\theta_t(\omega))$ です．上の (ii) より $\theta_{-t}\circ\theta_t$ が恒等関数なので，θ_{-t} は θ_t の逆関数です．

さて，確率過程の時間による推移を標本の変化に対応付けるために，確率過程をシフト作用素群に連動させます．確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ がシフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に**連動**するとは，任意の $\omega\in\Omega$，$s,t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$X(\theta_t(\omega),s)=X(\omega,s+t)$$

が成り立つということです．また，点過程 $N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動するとは，任意の $\omega\in\Omega$，$t\in\mathbb{R}$，ℝ 上の区間 B に対して，

$$N(\theta_t(\omega),B)=N(\omega,B+t)$$

が成り立つということです（図 2 参照）．

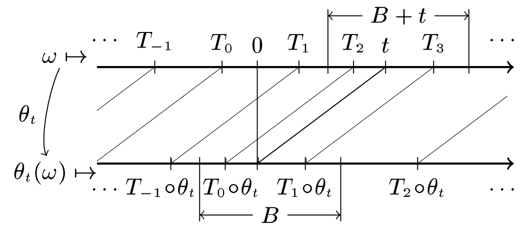

図 2　$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動する点過程 $(N\circ\theta_t(B)=N(B+t))$

ここで，注意点が 2 つあります．まず，前節で「特に必要がない限り ω を省略する」と書きましたが，これをシフト作用素を作用させた標本にも適用します．すなわち，合成関数の記号を用いると $T_n(\theta_t(\omega))=T_n\circ\theta_t(\omega)$ なので，ここで ω を省略して $T_n\circ\theta_t$ と書きます．$X\circ\theta_t$，$N\circ\theta_t$，$N_Z\circ\theta_t$ などについても同様です．もう 1 つは，点の位置がシフト作用素によって移されると，添え字が付け変わるという点です．(1) 式で添え字の付け方を定めていますので，0 と t の間にある点の数だけ添え字がシフトします．具体的には，

$$T_n\circ\theta_t=\begin{cases}T_{n+N((0,t])}-t, & (t>0)\\ T_{n-N((t,0])}-t, & (t<0)\end{cases} \tag{4}$$

となります（図 2 参照）．

マーク付き点過程 $N_Z=\{(T_n,Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ についても同様に，任意の $t\in\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の区間 B，マーク空間上の区間 C に対して，

$$N_Z\circ\theta_t(B,C)=N_Z(B+t,C)$$

が成り立つとき，N_Z は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動するといいます．

これで時間の推移を標本の変化に対応付けることができました．このとき，確率過程の定常性は，シフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対する確率 P の不変性によって表すことができます．事象 A に対して，$\theta_t^{-1}A=\{\omega\in\Omega\mid\theta_t(\omega)\in A\}$ とします（図 3 参照）．任意の $t\in\mathbb{R}$ と事象 A に対して $\mathsf{P}(\theta_t^{-1}A)=\mathsf{P}(A)$ が成り立つとき，確率 P は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して**不変**，または $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は P に対して**保測**であるといいます．そして，次の定理が成り立ちます．

定理 3.1

確率 P がシフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変であれば，$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動する確率過程は P について定常である．逆に，ある確率過程が P について定常であれば，その確率過程が連動し，かつ P に対して保測な $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を構成できる．

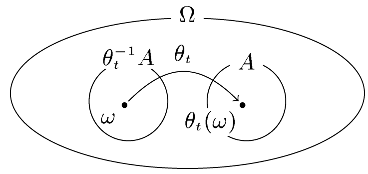

図 3　事象のシフト

例えば，$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動する確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して，事象 A を

$$A=\{X(s_1)\in C_1,\ldots,X(s_k)\in C_k\}$$

とすると，$\theta_t^{-1}A$ については，

$$\begin{aligned}\theta_t^{-1}A&=\{X\circ\theta_t(s_1)\in C_1,\ldots,X\circ\theta_t(s_k)\in C_k\}\\&=\{X(s_1+t)\in C_1,\ldots,X(s_k+t)\in C_k\}\end{aligned}$$

が成り立つので，確率 P が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変であれば，$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は P について定常です．

定理 3.1 は，同じ時間軸上で複数の確率過程を考えるときに，それらの定常性を調べるのに便利です．ここで，複数の確率過程が同一のシフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動し，この $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が確率 P に対して保測であるとき，これらの確率過程は**同時に定常**であるといいます．

例 3.1. ある施設に客が 1 人ずつ順々に到着し，しばらく滞在したあと，1 人ずつ退出する確率モデルを考えます．点過程 $N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を客の到着時刻の列として，時刻 T_n に到着した客の滞在時間を W_n とします．ここで，マーク付き点過程 $N_W=\{(T_n,W_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は確率 P について定常であり，P に対して保測なシフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動すると仮定します．また，W_n $(n\in\mathbb{Z})$ が確率 1 で有限であることも仮定します．ただし，W_n $(n\in\mathbb{Z})$ は互いに独立である必要はありませんし，$N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ も独立である必要はありません．

$N'=\{T_n+W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を施設からの客の退出時刻の列とします．客は到着順に出て行くとは限らず，$n<m$ だからと言って $T_n+W_n<T_m+W_m$ とは限りません．このとき，$N_W=\{(T_n,W_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動することから，

$$\begin{aligned}N'(B+t)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{B+t}(T_n+W_n)\\&=\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\mathbf{1}_B(T_{n'}+W_{n'})\circ\theta_t=N'\circ\theta_t(B)\end{aligned}$$

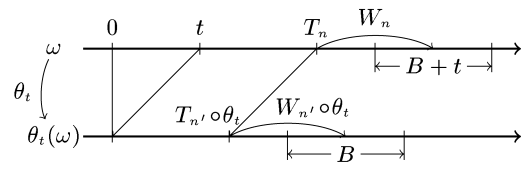

図 4　退出過程の連動性（$n' = n - N((0,t])$）

が成り立ち，N' も $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動することがわかります（図 4 参照）．すなわち，退出時刻を表す点過程は N_W と同時に定常です．

次に，$L(t)$ を時刻 $t \in \mathbb{R}$ に施設内にいる客の数とします．時刻 T_n に到着した客が時刻 t に施設内にいるということは，$T_n \le t < T_n + W_n$ ということなので，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$L(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_n, T_n+W_n)}(t) \tag{5}$$

と表せます．よって，

$$\begin{aligned} L(s+t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_n,\, T_n+W_n)}(s+t) \\ &= \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_{n'},\, T_{n'}+W_{n'})\circ\theta_t}(s) = L\circ\theta_t(s) \end{aligned}$$

が成り立ち，$\{L(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ も $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動することがわかります．すなわち，施設内にいる客の数を表す確率過程も N_W と同時に定常です．

3.3　定常点過程の強度

定常点過程において，単位時間当たりに現れる点の数の期待値を**強度**といいます．すなわち，定常点過程 $N = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の強度は $\lambda = \mathsf{E}(N((0,1]))$ と定義されます．ここで，E は 確率 P についての期待値です．定常性より，任意の区間 B に対して $\mathsf{E}(N(B)) = \lambda|B|$ が成り立ちます．ここで，$|B|$ は区間 B の長さです．つまり，区間 B に入っている点の数の期待値は B の長さだけで決まり，その位置には依存しません．したがって，$\lambda < \infty$ であれば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\mathsf{P}(N(\{t\}) > 0) \le \mathsf{E}(N(\{t\})) = 0$ であり，よって $\mathsf{P}(T_0 = 0) = 0$ であることもわかります．

例 3.2. 例 3.1 と同じモデルを考えます．ただし，客の到着時刻を表す点過程 $N = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は正かつ有限の強度 λ を持ち，施設内にいる客の数の期待値 $\mathsf{E}(L(0))$ も有限であると仮定します．施設内にいる客の数は，客の到着と退出によってだけ変化するので，

$$L(1) = L(0) + N((0,1]) - N'((0,1])$$

が成り立ちます．よって，この両辺の期待値をとると，$\{L(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の定常性より $\mathsf{E}(L(1)) = \mathsf{E}(L(0))$ であることから，

$$\lambda' = \mathsf{E}(N'((0,1])) = \mathsf{E}(N((0,1])) = \lambda$$

が得られます．すなわち，退出過程の強度と到着過程の強度が等しいことがわかります．

4.　パルム確率

4.1　マーク列は確率 P について定常ではない?!

シフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動する定常なマーク付き点過程 $N_Z = \{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ から，マーク列だけを取り出して考えます．見ての通り，マーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は整数を添え字に持つ確率変数列です．このような確率変数列の定常性は，添え字のシフトに対して確率法則が変わらないことによって定義されます．すなわち，任意の自然数 k と n_1，$n_2, \dots, n_k$，$m \in \mathbb{Z}$ に対して，$(Z_{n_1}, \dots, Z_{n_k})$ と $(Z_{n_1+m}, \dots, Z_{n_k+m})$ の確率分布が等しければ $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は定常です．

さて，時間の推移を標本の変化に対応付けたときと同様に，今度は $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の添え字のシフトを標本の変化に対応付けることを考えます．(4) 式で見たように，シフト作用素 θ_t を作用させると，添え字は $N((0,t])$（または $N((t,0])$）の値だけシフトします．しかし，$N((0,t])$ は確率変数であり，標本ごとに異なる値をとるので，任意に選んだ整数 m だけ添え字をシフトさせることができません．マークは点過程の点ごとに与えられているので，添え字を m だけシフトさせるには，作用素 θ_{T_m} を作用させれば良いのです（図 5 参照）．

ところが，ここで困ったことが起こります．確率 P は，任意に選んだ実数 t の幅のシフト θ_t に対しては不変ですが，T_m は確率変数であり，標本ごとに異なる値をとるので，P の θ_{T_m} に対する不変性は保証されません．つまり，一般的には $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は確率 P について定常ではないのです．「確率 P について定常なマーク付き点過程のマーク列は定常ではない」と言われると何だか混乱しそうですが，それではマーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が定常となるような確率とはどんなものでしょうか?

4.2　パルム確率

マーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の添え字を m だけシフトさせるには，シフト作用素 θ_{T_m} を作用させれば良かったので，$\{\theta_{T_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して不変な確率があれば，その確率について $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は定常です．そこで（天下り的です

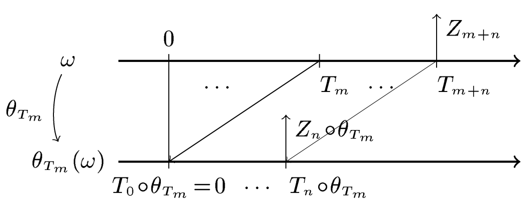

図 5 ランダムなシフト

が)，強度 $\lambda \in (0, \infty)$ を持つ点過程 $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して，次の P_N^0 を定義します．

定義 4.1（パルム確率）

任意の事象 A と $\mathbb{R}$ 上の有界かつ長さが正の区間 B に対して，

$$\mathsf{P}_N^0(A) = \frac{1}{\lambda |B|} \mathsf{E}\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_A \circ \theta_{T_n} \, \mathbf{1}_B(T_n)\Big) \quad (6)$$

とする．この P_N^0 を点過程 N に対する**パルム確率**という．

(6) 式の右辺の期待値の中身は，区間 B に入っている点 T_n のうち，その点の位置の分だけシフトさせた標本 $\theta_{T_n}(\omega)$ が事象 A に入るものの数を表しており，この期待値を区間 B に入っている点の数の期待値 $\lambda |B|$ で割ったものが事象 A のパルム確率です．点過程 $N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の定常性より，(6) 式の右辺は区間 B の選び方には依存しません．

パルム確率 P_N^0 は次の性質を持っています．

(P1) $\mathsf{P}_N^0(T_0 = 0) = 1$.

(P2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と事象 A に対して $\mathsf{P}_N^0(\theta_{T_n}^{-1} A) = \mathsf{P}_N^0(A)$.

(P 1) は，θ_{T_n} を作用させると常に $T_0 \circ \theta_{T_n} = 0$ であることから，(6) 式より容易に確かめられます (図 5 参照)．(P 2) は，P_N^0 が $\{\theta_{T_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して不変（$\{\theta_{T_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が P_N^0 に対して保測）であることを表し，このことからマーク列 $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の P_N^0 についての定常性が得られます．(6) 式より，任意の実数値確率変数 Y に対して，パルム確率 P_N^0 についての期待値は (存在すれば)，

$$\mathsf{E}_N^0(Y) = \frac{1}{\lambda |B|} \mathsf{E}\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} Y \circ \theta_{T_n} \, \mathbf{1}_B(T_n)\Big) \quad (7)$$

となります．

ここまでで 2 つの確率 P と P_N^0 が出てきました．では，待ち行列などの確率モデルにおいて，どんな特性量が確率 P によって評価されて，どんな特性量がパルム確率 P_N^0 によって評価されるのかをまとめておきます．確率 P は，任意の実数値の幅の推移について不変なので，任意時点で定義される特性量の定常状態での性質を評価するのに用います．例えば，施設内の客数や残りの仕事量などです．一方，パルム確率 P_N^0 は点の位置ごとの推移について不変なので，点ごとに定義される特性量の定常状態での性質を評価するのに用います．例えば，点過程 N が客の到着時刻の列を表すときは，客のサービス時間，待ち時間，到着時刻での施設内の客数，到着時刻での残りの仕事量など，客ごとに定義される特性量です．また，N が稼働期間（施設内に 1 人以上の客がいる期間）の開始時刻の列を表すときは，稼働期間の長さや稼働期間中に到着（退出）する客の数など，稼働期間ごとに定義される量を評価するのに用います．

5. 基本公式とその応用

パルム確率を用いたいくつかの基本的な公式とその応用例を紹介します．ここでは，確率 P はシフト作用素群 $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に対して不変であること，マーク付き点過程 $N_Z = \{(T_n, Z_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に連動すること，そして点過程 N は単純で，強度 λ は正かつ有限であることをあらかじめ仮定しておきます．さらに，本節で現れるすべての期待値の存在も仮定します．

5.1 キャンベルの公式

定理 5.1（キャンベルの公式）

K をマーク空間とする．$\mathbb{R} \times K$ から $\mathbb{R}$ への関数 f に対して，

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(T_n, Z_n)\Big) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}_N^0(f(s, Z_0)) \, \mathrm{d}s \quad (8)$$

が成り立つ．これを**キャンベル** (Campbell) **の公式**という．

キャンベルの公式は，パルム確率の定義の (6) 式を直接拡張したものです．実際，B を $\mathbb{R}$ 上の区間，$Z_n = \mathbf{1}_A \circ \theta_{T_n}$ として，$f(s, Z_n) = Z_n \, \mathbf{1}_B(s)$ を (8) 式に代入すると，(6) 式が得られます．

例 5.1 (定常版リトルの公式)**.** 例 3.1，3.2 と同じモデルを考えます．施設内の客の数は (5) 式で与えられるので，キャンベルの公式において $f(t, w) = \mathbf{1}_{[t, t+w)}(0)$ とすると，非負関数に対して積分と期待値の交換ができることから，

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(L(0)) &= \mathsf{E}\Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_n, T_n + W_n)}(0)\Big) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}_N^0(\mathbf{1}_{[s, s+W_0)}(0)) \, \mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \lambda\, \mathsf{E}^0_N\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-W_0,0]}(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \lambda\, \mathsf{E}^0_N(W_0)$$

が得られます．得られた式 $\mathsf{E}(L(0)) = \lambda\, \mathsf{E}^0_N(W_0)$ は，施設内にいる客の数の期待値が，客の到着率と客 1 人の平均滞在時間との積で与えられることを表しており，これを**定常版リトル (Little) の公式**[1]といいます．

5.2 宮沢の率保存則

$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は実数値をとる確率過程であり，$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動するものとします．

定理 5.2 （宮沢の率保存則）

$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ のサンプルパスは，$t \in \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を除いて連続かつ微分可能であり，不連続点では右連続かつ左極限を持つものとする．このとき，

$$\mathsf{E}(X'(0)) + \lambda\, \mathsf{E}^0_N\big(X(0) - X(0-)\big) = 0 \qquad (9)$$

が成り立ち，これを**宮沢の率保存則**という．ただし，$X'(t)$ は $t \notin \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ での $X(t)$ の微分係数を表し，$X(t-) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} X(t-\epsilon)$ である．

(9) 式は，確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の時間による変化が，

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(X(T_n) - X(T_n-)\big)\, \mathbf{1}_{(0,t]}(T_n)$$

と表されるので，この両辺の期待値をとって，$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ と $\{X'(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の定常性，さらに (7) 式を用いると得ることができます．(9) 式の左辺第 1 項は確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が連続なところでの変化率であり，第 2 項は不連続点の現れる頻度と不連続点での平均変化量との積と見ることができます．つまり，宮沢の率保存則は，定常な確率過程が連続的に変化しているところと不連続に変化するところを合せて考えると，全体として変化率が 0 であることを表しています．

宮沢の率保存則は，複数の点過程がある場合に拡張できます．k を自然数として，k 個の点過程 N_1，$N_2, \dots, N_k$ はすべて $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動し，単純で互いに共通の点を持たないものとします．また，それぞれの強度 λ_1，$\lambda_2, \dots, \lambda_k$ はすべて正かつ有限であるものとします．このとき，点過程 N_i ($i = 1,\ 2, \dots, k$) に対するパルム確率を $\mathsf{P}^0_{N_i}$，その期待値を $\mathsf{E}^0_{N_i}$ とすると，

$$\mathsf{E}(X'(0)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \mathsf{E}^0_{N_i}\big(X(0) - X(0-)\big) = 0 \qquad (10)$$

が成り立ちます．

例 5.2 (フィンチの公式)**.** 再び，例 3.1，3.2，5.1 と同じモデルを考えます．$N' = \{T'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を施設からの客の退出時刻を表す列とします．ここで，$\{T'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は例 3.1 の $\{T_n + W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と同じ点列ですが，(1) 式にしたがって添字を付け替えたものです．また，$N' = \{T'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ も単純であり，$N = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と N' は共通の点を持たないものとします．さて，$X_\ell(t) = \mathbf{1}_{\{L(t)>\ell\}}$ ($\ell = 0$，1，$2, \dots$) として，この $\{X_\ell(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ に率保存則 (10) 式を適用することを考えます．まず，$X_\ell(t)$ のサンプルパスは，客の到着または退出の時点を除いて一定なので，$\mathsf{P}(T_0 = 0) = \mathsf{P}(T'_0 = 0) = 0$ より $\mathsf{E}(X'_\ell(0)) = 0$ です．次に，パルム確率の性質 (P1) より $\mathsf{P}^0_N(T_0 = 0) = 1$ なので，時刻 0 に 1 人の客の到着がある場合を考えると，$X_\ell(0) - X_\ell(0-) = \mathbf{1}_{\{L(0-)=\ell\}}$ です．よって，

$$\mathsf{E}^0_N(X_\ell(0) - X_\ell(0-)) = \mathsf{P}^0_N(L(0-) = \ell)$$

が得られます．同様に，$\mathsf{P}^0_{N'}(T'_0 = 0) = 1$ より，時刻 0 に 1 人の客の退出がある場合を考えると，$X_\ell(0) - X_\ell(0-) = -\mathbf{1}_{\{L(0)=\ell\}}$ であり，よって，

$$\mathsf{E}^0_{N'}(X_\ell(0) - X_\ell(0-)) = -\mathsf{P}^0_{N'}(L(0) = \ell)$$

が得られます．これらを率保存則 (10) 式に代入すると，例 3.2 より $\lambda = \lambda'$ であることを用いて，$\ell = 0$，1，$2, \dots$ に対して，

$$\mathsf{P}^0_N(L(0-) = \ell) = \mathsf{P}^0_{N'}(L(0) = \ell) \qquad (11)$$

が成り立つことがわかります．この式は，客の到着直前での施設内の客数の確率分布が退出直後での客数の確率分布と等しいことを表しており，**フィンチ (Finch) の公式**と呼ばれています．

5.3 ランダム・サンプリングと定常版 PASTA

最後に，確率 P による評価とパルム確率 P^0_N による評価が等しくなる場合を考えます．前節と同様に，$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は実数値をとる確率過程で，$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動するものとします．また，そのサンプルパスは右連続かつ左極限を持つものとします．

[1] これに対して，通常のリトルの公式は“サンプルパス版”とも言えます．これらはエルゴード性という条件のもとでは同じものであり，実際にはあまり区別されていないようです．

定理 5.3

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\{X(s)\}_{s\le t}$ と $\{N((t,u])\}_{u>t}$ が互いに独立であれば，

$$\mathsf{E}(X(0)) = \mathsf{E}^0_N(X(0-)) \qquad (12)$$

が成り立つ．

(12) 式は，確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を任意時点で観測したときの期待値が，点過程 $N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の点の位置の直前で観測したときの期待値と等しいことを表しています．では，この定理の条件「任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\{X(s)\}_{s\le t}$ と $\{N((t,u])\}_{u>t}$ が互いに独立」がどんな場合に成り立つのかを考えてみましょう．まず，そもそも $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ と $N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が互いに独立であれば，もちろんこの条件は成り立ち，この場合，(12) 式の右辺は $\mathsf{E}^0_N(X(0))$ でも構いません．これは，定常な確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ をこれとは独立なタイミング $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で観測すると，その定常状態での性質を評価できることを表しています（**ランダム・サンプリング**）．

次に，$\{X(s)\}_{s\le t}$ が $\{N(s,t]\}_{s\le t}$ に依存する場合を考えます．例えば，確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ の時刻 t での値が，点過程 N の時刻 t までの点の現れ方によって定まるような場合です．このとき，定理 5.3 の条件が成り立つということは，任意の t に対して $\{N((s,t])\}_{s\le t}$ と $\{N((t,u])\}_{u>t}$ が互いに独立であるということです（独立増分を持つといいます）．この性質を持つ単純な定常点過程は定常ポアソン過程しかなく，このとき (12) 式を **定常版 PASTA** (Poisson Arrivals See Time Averages)[2] といいます．

例 5.3. 前の例では，客の到着直前での施設内の客数の確率分布が，退出直後での客数の確率分布と等しいことを示しました．いま，$N=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定常ポアソン過程とします．さらに，話を簡単にするために N と $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は互いに独立であるとします（この仮定は緩めることができます）．ある時刻での施設内の客の数は，その時刻以前に到着した客によって定まり，この後で到着する客の影響は受けないので，(12) 式の PASTA に $X(t)=\mathbf{1}_{\{L(t)=\ell\}}$ ($\ell=0, 1, 2,\ldots$) を代入することによって，任意時点での施設内の客数も (11) 式と同じ確率分布にしたがうという結果が得られます．

[2] この場合も，通常の PASTA は“サンプルパス版”と言うことができて，やはりエルゴード性のもとでは同一です．こちらも実際にはあまり区別されていないようです．

6. おわりに

待ち行列などの確率モデルに対する“点過程アプローチ”の基本について解説しました．さらに勉強したい人には [1] の第 1，3 章，[3] の第 11，12 章を薦めます．これらの文献には，ここに書けなかったことが詳しく述べられています．特に，「点過程が単純でないときはどうするの?」と思った人は [3] の“詳細パルム分布”の項を，「ポアソン過程の条件を緩めると PASTA はどうなるの?」と思った人は [1] の “Papangelou's formula” の項を参照してください．本稿の例では，扱った特性量や，その期待値が有限であることを仮定しましたが，これは対象とするモデルの安定性の問題であり，実際の解析ではきちんと議論されなければなりません．こうした安定性の問題は [2] に詳しく述べられており，[1] の第 2 章でも扱われています．

本稿で扱ったアプローチは，今では様々な方向に発展しています．例えば，非負整数値をとるランダムな計数測度を一般化して，非負実数値をとるランダム測度を考えると，流体入力の待ち行列（[3] の第 10 章を参照）を扱うことができます．また最近では，2 次元あるいは 3 次元空間上の点過程を考え，それが無線ノードの位置を表すものとした無線通信ネットワークの確率モデルが盛んに研究されています．この話については，いずれ紹介する機会があるかもしれません．

謝辞　本稿は，2010 年 6 月に待ち行列研究部会によって開催された「学生･初学者のための待ち行列チュートリアル」での講演内容を基にしています．このときの講演スライドに対しては，当時筆者の研究室の学生であった木村恒太氏から多くの有益なコメントをいただきました．また，今回の草稿に対しては，高野祐一氏に初学者の立場に立っていただき，多くの貴重なコメントをいただきました．この場を借りて，両名に感謝の意を表します．

参考文献

[1] F. Baccelli and P. Brémaud: *Elements of Queueing Theory: Palm Martingale Calculus and Stochastic Recurrences*, 2nd Ed., Springer, 2003.
[2] A. Brandt, P. Franken and B. Lisek: *Stationary Stochastic Models*, Wiley, 1990.
[3] 宮沢政清：待ち行列の数理とその応用，牧野書店，2006.

