錐相補性問題の理論と応用

林 俊介

従来の不等式で構成される相補性問題に対してベクトル不等式を「錐」の制約に置き換えたものを錐相補性問題という．錐相補性問題は錐計画問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件としての側面だけでなく，ロバストナッシュ均衡問題やロバスト Wardrop 均衡問題のように錐計画問題として定式化できないクラスの均衡問題に対しても定式化能力をもつことから，近年注目を集めている．本稿では，まず錐相補性問題に対する概論および理論的背景を紹介し，錐相補性問題の応用例であるロバストナッシュ均衡問題について詳述する．また，錐相補性問題の解法について大まかな概要を述べる．

キーワード：錐相補性問題，対称錐，二次錐，半正定値錐，ユークリッドジョルダン代数，ロバストナッシュ均衡

1. はじめに

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が，任意の $x \in C$ と $\alpha \geq 0$ に対して $\alpha x \in C$ を満たすとき，その集合を錐という．また，閉集合かつ凸集合であるような錐を閉凸錐という．ベクトル値関数 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ と閉凸錐 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，錐相補性問題 (Conic Complementarity Problem: CCP) とは

$$x \in C,\ y \in C^*,\ \langle x, y \rangle = 0,\ F(x, y, \zeta) = 0 \quad (1)$$

を満たすベクトル $(x, y, \zeta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ を求める問題である．ここで，C^* は錐 C に対する双対錐であり，

$$C^* := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle x, y \rangle \geq 0\ (\forall y \in C) \right\}$$

で定義される．

錐相補性問題は従来の相補性問題を拡張した問題である．実際，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して $F(x, y, \zeta) := f(x) - y$ かつ $C := \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\}$ のとき，$C^* = C = \mathbb{R}^n_+$ であるので，CCP (1) は

$$x \geq 0,\ f(x) \geq 0,\ \langle x, f(x) \rangle = 0 \quad (2)$$

となるが，これはよく知られた非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem: NCP) である．また，関数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ と $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ に対して

$$F(x, y, \zeta) := \begin{pmatrix} f(x, \zeta) - y \\ g(x, \zeta) \end{pmatrix}$$

かつ $C := \mathbb{R}^n_+$ とすると，CCP (1) は

$$\begin{aligned} &x \geq 0,\ f(x, \zeta) \geq 0,\ \langle x, f(x, \zeta) \rangle = 0, \\ &g(x, \zeta) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

となるが，これは非線形混合相補性問題 (Nonlinear Mixed Complementarity Problem: NMCP) である．また，f および g がアフィン関数であるとき，(2) を特に線形相補性問題 (Linear Complementarity Problem: LCP)，(3) を特に線形混合相補性問題 (Linear Mixed Complementarity Problem: LMCP) という．

このように，錐相補性問題は既存の相補性問題における非負象限を一般の閉凸錐におきかえたものである．しかし，実際に現実問題への応用やアルゴリズムによる求解といった側面を考えたとき，錐相補性問題で対象とされる錐は，非負象限以外では二次錐 (Second-Order Cone: SOC) と半正定値錐 (Semidefinite Cone) がほとんどである[1]．

二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem: SOCCP) とは

$$x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K},\ \langle x, y \rangle = 0,\ F(x, y, \zeta) = 0 \quad (4)$$

を満たすベクトル $(x, y, \zeta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ を求める問題である．ここで，$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ は与えられた関数であり，$\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ は n_i 次元の二次錐

$$\mathcal{K}^{n_i} := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} & (n_i = 1) \\ \left\{(x_1, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i - 1} \;\middle|\; x_1 \geq \|\tilde{x}\|\right\} & (n_i \geq 2) \end{cases}$$

を用いて

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_p}$$

はやし しゅんすけ
東北大学情報科学研究科
〒980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6–3–09

[1] 最近の研究では，共正値錐 (copositive cone)，完全正値錐 (completely positive cone)，非負半正定値錐 (doubly nonnegative cone) といった自己双対性をもたない錐に対する相補性問題も注目を集めつつある．

（ただし，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$）で定義される閉凸錐である．言いかえると，SOCCP(4) はCCP(1) において $C := \mathcal{K}$ としたものにほかならない．また，半正定値相補性問題 (Semidefinite Complemetarity Problem: SDCP) とは

$$X \in \mathcal{S}_+^n,\ Y \in \mathcal{S}_+^n,\ \langle X, Y \rangle = 0,\ F(X, Y, \zeta) = 0 \quad (5)$$

を満たす $(X, Y, \zeta) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}^l$ を求める問題である．ここで，$\mathcal{S}^n$ は $n \times n$ 対称行列の集合，$\mathcal{S}_+^n$ は $n \times n$ 半正定値対称行列の集合，$F : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathcal{S}^n \times \mathbb{R}^l$ は与えられた関数である．言いかえると，SDCP(5) は CCP(1) において $C := \mathcal{S}_+^n$ としたものにほかならない．ただし，対称行列集合 $\mathcal{S}^n$ は $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ と同一視できることに注意する．

2. 錐相補性問題の理論的背景

2.1 変分不等式問題との関係

変分不等式問題 (Variational Inequality Problem: VIP) とは，ベクトル値関数 $\Gamma : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ と閉凸集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\nu$ が与えられたとき，

$$\big\langle \Gamma(z), z' - z \big\rangle \geq 0 \quad (\forall z' \in \Omega) \qquad (6)$$

を満たすベクトル $z \in \Omega$ を求める問題である．錐相補性問題は変分不等式問題の特別な場合であるということができる．実際，VIP(6) において

$$z := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \Gamma(z) := \begin{pmatrix} y \\ F(x, y, \zeta) \end{pmatrix},$$

および $\Omega := C \times \mathbb{R}^{n+l}$ とおくと，CCP (1) は VIP (6) と等価になる．特に CCP (1) においてある関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在して $F(x, y, \zeta) := f(x) - y$ とできる場合は，$\Omega := C$, $z := x$, $\Gamma(z) := f(x)$ とおくことにより，VIP (6) に等価に帰着できる．

2.2 錐計画問題との関係

ベクトル不等式制約の代わりに，関数が二次錐や半正定値錐といった閉凸錐に含まれるという制約を課した最適化問題を錐計画問題という．具体的には関数 $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \theta(z) \\ \text{subject to} & g(z) \in C,\ h(z) = 0 \end{array} \qquad (7)$$

と表される問題である．実際，θ が線形関数，g, h がアフィン関数で，C が二次錐の直積であるとき (7) は（線形）二次錐計画問題 (Second-Order Program: SOCP) といい，C が半正定値錐であるとき (7) は（線形）半正定値計画問題 (Semidefinite Program: SDP) という．SOCP や SDP は線形計画問題における主双対内点法を拡張することにより，効率的に解を求められることが知られている．

錐計画問題 (7) の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は

$$\begin{array}{l} \nabla\theta(z) - \nabla g(z) y - \nabla h(z) w = 0 \\ y \in C^*,\ g(z) \in C,\ \big\langle y, g(z) \big\rangle = 0,\ h(z) = 0 \end{array} \qquad (8)$$

と書くことができる[2]．ここで，

$$\zeta := \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},\ \ l := m + k,$$

$$F(x, y, \zeta) := \begin{pmatrix} g(z) - x \\ \nabla\theta(z) - \nabla g(z) y - \nabla h(z) w \\ h(z) \end{pmatrix}$$

とおけば，KKT 条件 (8) は CCP (1) として等価に書き換えることができる．すなわち，錐計画問題の KKT 条件は錐相補性問題として定式化できるので，凸性と適当な制約想定の下で錐相補性問題は錐計画問題を含むクラスの問題であるということができる．

2.3 対称錐とユークリッドジョルダン代数

閉凸錐の中でも，非負象限，二次錐，半正定値錐を含むクラスの錐として対称錐 (symmetric cone) がある．対称錐とは等質な自己双対錐[3]のことであり，その対称錐を特徴づける代数演算としてユークリッドジョルダン代数 (Euclidean Jordan algebra) [5, 11] がある．ユークリッドジョルダン代数は，本来最適化とは別の流れで研究されてきたものだが，二次錐や半正定値錐を含む問題に対して効率的なアルゴリズムを構築する際に大変有用であることが近年わかってきた．

有限次元ベクトル空間 $\mathcal{J}$ と乗算 $\circ : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ および内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，任意の $x, y, z \in \mathcal{J}$ に対して

(i) $x \circ y = y \circ x$

(ii) $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$

(iii) $\langle x, y \circ z \rangle = \langle x \circ y, z \rangle$

が成り立つとする．このとき，乗算 $\circ$ をジョルダン積 (Jordan product) といい，$\mathcal{A} = (\mathcal{J}, \circ, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ をユークリッドジョルダン代数という．ただし，x^m は x に

[2] $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対して $\nabla g(z) := (\nabla g_1(z), \ldots, \nabla g_n(z)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ であり，これはいわゆる転置ヤコビアンである．

[3] 閉凸錐 C に対してその双対錐が C と一致する（i.e., $C = C^*$ である）とき，C を自己双対錐という．

対して m 回ジョルダン積をとったものである．また，ジョルダン積は結合則は一般に満たさない，すなわち $x\circ(y\circ z)\neq(x\circ y)\circ z$ である．ユークリッドジョルダン代数 $\mathcal{A}$ が与えられたとき，

$$Q := \{x\circ x \,|\, x\in\mathcal{J}\}$$

で表される錐 $Q\subseteq\mathcal{J}$ を対称錐という．対称錐 Q は等質な自己双対錐であり，非負錐，二次錐，半正定値錐，およびそれらの有限個の直積によってできる錐は対称錐であることが知られている．

さて，ユークリッドジョルダン代数 $\mathcal{A}=(\mathcal{J},\circ,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対していくつかの用語・概念を定義する．

- 要素 $e\in\mathcal{J}$ が任意の $x\in\mathcal{J}$ に対して $e\circ x=x\circ e=x$ を満たすとき，それを単位元 (identity element) といい，e で表す．
- 次で定義される正整数を $x\in\mathcal{J}$ に対する次数 (degree) という．

$$\deg(x) := \max\left\{m \,\middle|\, e,x,x^2,\ldots,x^m \text{は一次独立.}\right\}$$

- 次で定義される正整数を $\mathcal{A}$ に対する階数 (rank) という．

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) := \max\left\{\deg(x) \,\middle|\, x\in\mathcal{J}\right\}$$

- 要素 $c\in\mathcal{J}$ が $c^2=c\neq 0$ を満たすとき，それを等冪元 (idempotent) という．さらに，等冪元 $c\in\mathcal{J}$ が二つの等冪元の和で表せないとき，その等冪元は原始的 (primitive) であるという．
- 原始的な等冪元 $c_1,c_2,\ldots,c_k$ が $c_i\circ c_j=0$ $(i\neq j)$ および $c_1+c_2+\cdots+c_k=e$ を満たすとき，集合 $\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$ を $\mathcal{A}$ に対するジョルダンフレーム (Jordan frame) という．なお，$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=r$ のとき，つねに $k=r$ が成り立つ．

これらを用いて，任意の要素 $x\in\mathcal{J}$ に対してスペクトル分解が次のように定義される．

定理 2.1. $\mathcal{A}=(\mathcal{J},\circ,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $\mathrm{rank}(\mathcal{A})=r$ であるようなユークリッドジョルダン代数とする．このとき，任意の $x\in\mathcal{J}$ に対してジョルダンフレーム $\{c_1,c_2,\ldots,c_r\}$ と実数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ が存在して

$$x=\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_rc_r \tag{9}$$

と書ける．

ここで，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ を x に対するスペクトル値（固有値）といい，$c_1,c_2,\ldots,c_r$ を x に対するスペクトルベクトル（固有ベクトル）という．さらに，(9) の表現を x に対するスペクトル分解という．

以上のように，ユークリッドジョルダン代数は本来極めて抽象的に定義されるものである．しかしながら，Q が非負錐，二次錐，半正定値錐の場合はジョルダン積や内積，スペクトル分解を具体的な形で表現できる．

例 1（非負象限）**.** ジョルダン代数 $\mathcal{A}=(\mathcal{J},\circ,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ において $\mathcal{J}:=\mathbb{R}^n$, $x\circ y:=(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n)^\top$, $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_iy_i$ である場合を考える．このとき，$Q=\mathbb{R}^n_+$ である．また，$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=n$ であり，任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対してスペクトル値は $\lambda_i=x_i$ $(i=1,\ldots,n)$，スペクトルベクトルは $c_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^\top$ である．（第 i 成分のみが 1. $i=1,\ldots,n$）

例 2（二次錐）**.** ジョルダン代数 $\mathcal{A}=(\mathcal{J},\circ,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ において $\mathcal{J}:=\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$,

$$x\circ y := \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\ x_1\tilde{y}+y_1\tilde{x}\end{pmatrix},$$

$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_iy_i$ の場合を考える．ただし，$\tilde{x}:=(x_2,x_3,\ldots,x_n)^\top$, $\tilde{y}:=(y_2,y_3,\ldots,y_n)^\top$ である．このとき，$Q=\mathcal{K}^n$ である．また，$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=2$ であり，任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対してスペクトル値は $\lambda_i=x_1+(-1)^i\|\tilde{x}\|$ $(i=1,2)$, スペクトルベクトルは

$$c_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\(-1)^i\dfrac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\end{pmatrix} & (\tilde{x}\neq 0)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\(-1)^iw\end{pmatrix} & (\tilde{x}=0)\end{cases}$$

である．ここで，$w\in\mathbb{R}^{n-1}$ は $\|w\|=1$ であるような任意のベクトルである．

例 3（半正定値錐）**.** ジョルダン代数 $\mathcal{A}=(\mathcal{J},\circ,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ において $\mathcal{J}:=\mathcal{S}^n$, $X\circ Y:=(XY+YX)/2$, $\langle X,Y\rangle:=\mathrm{tr}(X^\top Y)=\sum_{i,j}X_{ij}Y_{ij}$ である場合を考える．このとき，$Q=\mathcal{S}^n_+$ である．また，$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=n$ であり，任意の $X\in\mathcal{S}^n$ に対してスペクトル値は $\lambda_i=$（X の i 番目の固有値），スペクトルベクトル[4]は $c_i=v^i(v^i)^\top$ である．ただし，$v^i\in\mathbb{R}^n$ は行列 X の固有値 λ_i に対応する $\|v^i\|=1$ であるような固有ベクトルである．

[4] この場合 c_i は行列だが，便宜上スペクトルベクトルと呼ぶ．

3. ロバストナッシュ均衡問題

前節でも述べたように，錐相補性問題は錐計画問題の KKT 条件を含んでいるため，錐計画問題を解くための手段として用いることができるという利点がある．一方，錐計画問題として定式化できない錐相補性問題独自の応用もいくつか存在する．本節では，その代表的な応用例であるロバストナッシュ均衡問題を紹介する．ロバストナッシュ均衡は Aghassi ら [1] と林ら [7] によって独立に提案された不確実性を含むゲームに対する均衡概念であり，各プレイヤーがロバスト最適化 [2] による意志決定を行うことにその特徴がある．

3.1 双行列ゲームとロバストナッシュ均衡

本節では簡単のため，2 人のプレイヤーで行われる双行列ゲームに対象を絞る．プレイヤー 1 および 2 の戦略ベクトルをそれぞれ $y \in \mathbb{R}^n$ および $z \in \mathbb{R}^m$ とし，各戦略は空でない閉凸集合 $S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ および $S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ から選択されるものとする．また，プレイヤー 1 のコスト関数はコスト行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ を用いて $f_1(y,z) := y^\top Az$ で，プレイヤー 2 のコスト関数はコスト行列 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ を用いて $f_2(y,z) := y^\top Bz$ で与えられるものとする．このとき，各プレイヤーは以下のような相手の戦略をパラメータとして含むような最適化問題を解くことにより，戦略を決定する．

$$
\begin{aligned}
&\underset{y}{\text{minimize}} \quad y^\top Az \quad \text{subject to } y \in S_1,\\
&\underset{z}{\text{minimize}} \quad y^\top Bz \quad \text{subject to } z \in S_2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

このような双行列ゲーム (10) に対して，ベクトルの組 $(\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ が $\overline{y} \in \operatorname{argmin}_{y\in S_1} y^\top A\overline{z}$ と $\overline{z} \in \operatorname{argmin}_{z\in S_2} \overline{y}^\top Bz$ を満たすとき，これをナッシュ均衡解という．

ナッシュ均衡の概念は，各プレイヤーが自身のコスト行列（すなわちコスト関数の構造）および相手の戦略に関して正確な情報をもつという前提の下で意味をもつ．しかし，現実の問題において，このような前提が満たされるとは限らない．そこで，情報に不確実性が含まれるようなゲームに対する各プレイヤーの行動原理として，以下の 3 つを仮定する．

(I) プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の戦略 z を正確には推定できないが，ある集合（不確実性集合という）$Z(z) \subseteq \mathbb{R}^m$ にそれが含まれていることは推定できる．同様に，プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の戦略 y を正確には推定できないが，ある集合 $Y(y) \subseteq \mathbb{R}^n$ にそれが含まれていることは推定できる．

(II) プレイヤー 1 は自身のコスト行列 A を正確には推定できないが，それが集合 $D_A \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ に含まれていることは推定できる．同様に，プレイヤー 2 は自身のコスト行列 B を正確には推定できないが，それが集合 $D_B \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ に含まれていることは推定できる．

(III) 各プレイヤーは (I)，(II) の状況下で最悪のケースを想定して戦略を決定する．

すなわち，各プレイヤー $i = 1,2$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_1(y,z) &:= \sup\left\{ y^\top \hat{A}\hat{z} \;\middle|\; \hat{A} \in D_A, \hat{z} \in Z(z) \right\},\\
\tilde{f}_2(y,z) &:= \sup\left\{ \hat{y}^\top \hat{B}z \;\middle|\; \hat{B} \in D_B, \hat{y} \in Y(y) \right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

で定義される関数（最悪コスト関数）$\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ に対して，それぞれ以下の問題を解くことにより戦略を決定するものとする．

$$
\begin{aligned}
&\underset{y}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}_1(y,z) \quad \text{subject to } y \in S_1,\\
&\underset{z}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}_2(y,z) \quad \text{subject to } z \in S_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

定義 3.1. 関数 $\tilde{f}_1$，$\tilde{f}_2$ を (11) で定義する．このとき，$\overline{y}^r \in \operatorname{argmin}_{y\in S_1} \tilde{f}_1(y,\overline{z}^r)$ および $\overline{z}^r \in \operatorname{argmin}_{z\in S_2} \tilde{f}_2(\overline{y}^r,z)$ が成り立つ，すなわち，$(\overline{y}^r,\overline{z}^r)$ がゲーム (12) に対するナッシュ均衡であるとき，それをゲーム (10) に対するロバストナッシュ均衡であるという．

3.2 二次錐相補性問題への定式化

本節では，双行列ゲームにおいて各プレイヤーが自身のコスト関数は正確に推定できるが，相手の戦略が正確に推定できない状況を考え，その状況下で起こりうるロバストナッシュ均衡を求める問題が二次錐相補性問題として定式化できることを示す．

双行列ゲームに対して次のような仮定を考える．

仮定 A.

(i) 各プレイヤーは混合戦略を選択する．すなわち，$S_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y \geq 0,\ e_n^\top y = 1\}$ および $S_2 = \{z \in \mathbb{R}^m \,|\, z \geq 0,\ e_m^\top z = 1\}$ である．（$e_n \in \mathbb{R}^n$ および $e_m \in \mathbb{R}^m$ はすべての成分が 1 であるようなベクトル.）

(ii) $Y(y) := \{y+\delta_y \in \mathbb{R}^n \,|\, \|\delta_y\| \leq \rho_y,\ e_n^\top\delta_y = 0\}$ および $Z(z) := \{z+\delta_z \in \mathbb{R}^m \,|\, \|\delta_z\| \leq \rho_z,\ e_m^\top\delta_z = 0\}$ である．ただし，ρ_y および ρ_z は与えられた正の定数である．

(iii) $D_A = \{A\}$ および $D_B = \{B\}$ である．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ および $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ は与えられ

た実定数行列である．

ここで，(ii) の条件はプレイヤー 1（プレイヤー 2）が相手の戦略が半径 ρ_z (ρ_y) の $(n-1)$-次元球に含まれていることを想定していることを意味する．ただし，$Y(y)$ と $Z(z)$ の定義における $e_n^\top \delta_y = e_m^\top \delta_z = 0$ という条件は，$e_n^\top(y+\delta_y) = e_m^\top(z+\delta_z) = 1$ を満たすように付加されたものである．

さて，このときプレイヤー 1 の最悪コスト関数は以下のようにユークリッドノルムを用いることで陽に評価できる．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}_1(y,z)\\
&=\max\left\{ y^\top A(z+\delta_z) \;\middle|\; \|\delta_z\| \le \rho_z,\ e_m^\top \delta_z = 0 \right\}\\
&=y^\top Az + \max\left\{ y^\top A\delta_z \;\middle|\; \|\delta_z\| \le \rho_z,\ e_m^\top \delta_z = 0 \right\}\\
&=y^\top Az + \rho_z \|\tilde{A}^\top y\|.
\end{aligned}
$$

ここで，$\tilde{A} := A(I_m - m^{-1}e_m e_m^\top)$ である．したがって，補助変数 $y_0 \in \mathbb{R}$ を導入すると，プレイヤー 1 が解くべき最適化問題は

$$
\begin{aligned}
&\underset{y_0,\,y}{\text{minimize}} \quad y^\top Az + \rho_z y_0\\
&\text{subject to} \quad \|\tilde{A}^\top y\| \le y_0,\ y \ge 0,\ e_n^\top y = 1 \quad (13)
\end{aligned}
$$

と書くことができる．ここで，

$$
\|\tilde{A}^\top y\| \le y_0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde{A}^\top y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{m+1}
$$

であることに注意すると，問題 (13) の KKT 条件は次のようなプレイヤー 2 の戦略 z をパラメータとして含むような二次錐相補性問題で書くことができる．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}^{m+1} \ni \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{m+1},\\
&\mathbb{R}^n_+ \ni y \perp Az - \tilde{A}\lambda + e_n s \in \mathbb{R}^n_+, \qquad (14)\\
&e_n^\top y = 1, \quad \lambda_0 = \rho_z,
\end{aligned}
$$

ただし，$\lambda \in \mathbb{R}^m$ および $s \in \mathbb{R}$ はラグランジュ乗数であり，$\lambda_0 \in \mathbb{R}$ は補助変数である．また，二次錐相補性条件 $\xi \in \mathcal{K}^{m+1}$, $\eta \in \mathcal{K}^{m+1}$, $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ をまとめて $\mathcal{K}^{m+1} \ni \xi \perp \eta \in \mathcal{K}^{m+1}$ と表記していることに注意する．同様にプレイヤー 2 が解くべき最適化問題に対する KKT 条件は次のようなプレイヤー 1 の戦略 y をパラメータとして含むような二次錐相補性問題で書くことができる．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}^{n+1} \ni \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{n+1},\\
&\mathbb{R}^m_+ \ni z \perp B^\top y - \tilde{B}^\top \mu + e_m t \in \mathbb{R}^m_+, \qquad (15)\\
&e_m^\top z = 1, \quad \mu_0 = \rho_y,
\end{aligned}
$$

ここで，$\tilde{B} = (I_n - n^{-1}e_n e_n^\top)B$ である．したがって，これら二つの KKT 条件 (14)，(15) を一つにまとめることにより，仮定 A を満たすようなロバストナッシュ均衡問題を二次錐相補性問題として等価に表現できる．

本節では相手の戦略のみに不確実性が含まれるような双行列ゲームに対するロバストナッシュ均衡問題を考えた．一方，自身のコスト行列のみに不確実性が含まれるような双行列ゲームに対するロバストナッシュ均衡問題も二次錐相補性問題として定式化できることが知られている [7]．さらに，自身のコスト行列と相手の戦略の両方に不確実性が含まれるようなゲームに対するロバストナッシュ均衡問題は，二次錐相補性問題でなく半正定値相補性問題として定式化されることもわかっている [13]．

3.3 N 人ゲームに対するロバストナッシュ均衡

前節までに紹介したロバストナッシュ均衡はプレイヤーの数が 2 人でコスト関数も簡単な双線形の構造をもつものに限定していた．しかし，この均衡概念は一般の N 人プレイヤーが非線形なコスト関数を独立に最小化するゲームに対しても自然に拡張できる [12]．

プレイヤー i $(i = 1,2,\ldots,N)$ のコスト関数が $f_i^{u^i}(x^i, x^{-i})$ で与えられているとする．ここで，$x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ はプレイヤー i の選択する戦略，$u^i \in \mathbb{R}^{r_i}$ はコスト関数に含まれるパラメータ（多項式の係数や双行列ゲームにおけるコスト行列など），$x^{-i} = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^N)$ は i 以外のプレイヤーの選択する戦略である．ここで，u^i や x^{-i} が正確には推定できず，集合 U_i, $X_i(x^{-i})$ に含まれているという曖昧な推定しかできないものとする．このとき，最悪コスト関数

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_i(x^i, x^{-i}) := \sup\{ f_i^{\hat{u}^i}(x^i, \hat{x}^{-i}) \mid\ & \\
& \hat{u}^i \in U_i, \hat{x}^{-i} \in X_i(x^{-i})\},
\end{aligned}
$$

に対するナッシュ均衡を，元の不確実性を含むゲームに対するロバストナッシュ均衡として定義できる．

4. 錐相補性問題の解法

線形相補性問題は二次計画問題の KKT 条件としての側面もあるため，数十年前から盛んに研究がなされ，

レムケ法 [8] や内点法 [10] といったアルゴリズムが開発されてきた．一方，非線形相補性問題に対しては，残差関数や Fischer-Burmeister 関数といったいわゆる NCP 関数を用いて等価なベクトル方程式に帰着した上で，ニュートン法（的な手法）を適用して解くといったアルゴリズムが盛んに研究されてきた [3].

後者の手法については，21 世紀になってから，ユークリッドジョルダン代数を用いることにより二次錐相補性問題や半正定値相補性問題へと拡張されてきた．本節ではその手法について概要を述べる．

4.1 ベクトル方程式への再定式化とメリット関数

CCP (1) に対して関数 $\phi_{\rm NR} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\phi_{\rm NR}(x, y) := x - \mathrm{Proj}_C(x - y)$$

で定義する．ここで，$\mathrm{Proj}_C(\cdot)$ は錐 C へのユークリッド射影を意味する．このように定義された関数 $\phi_{\rm NR}$ を残差関数 (natural residual) といい，

$$\phi_{\rm NR}(x, y) = 0 \iff x \in C, y \in C^*, \langle x, y\rangle = 0 \quad (16)$$

が成り立つことが知られている [4]．したがって，ベクトル値関数 $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{2n+l}$ を

$$H(x, y, \zeta) := \begin{pmatrix} \phi_{\rm NR}(x, y) \\ F(x, y, \zeta) \end{pmatrix}$$

で定義すると，CCP (1) はベクトル方程式

$$H(x, y, \zeta) = 0 \quad (17)$$

と等価になることがわかる．さらに，実数値関数 $\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, \zeta) &:= \frac{1}{2}\|H(x, y, \zeta)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\phi_{\rm NR}(x, y)\|^2 + \frac{1}{2}\|F(x, y, \zeta)\|^2\end{aligned}$$

で定義すれば，CCP (1) は無制約最適化問題

$$\text{minimize} \ \ \Psi(x, y, \zeta) \quad (18)$$

と等価になることも容易にわかる．このような関数 Ψ を CCP (1) に対するメリット関数という．

以上のように，錐相補性問題はベクトル方程式 (17) や無制約最適化問題 (18) に等価に変換できるので，それらを適当な手法で解ければ，CCP (1) の解を得ることができる．しかしながら，残差関数 $\phi_{\rm NR}$ は錐 C への射影を用いて定義されているため，C が一般の閉凸錐の場合には残差関数 $\phi_{\rm NR}$ を陽に計算できず，計算機に直接実装可能なアルゴリズムを構築するのは困難である．

4.2 対称錐相補性問題に対する正則化平滑化ニュートン法

本節では，CCP (1) における錐 C が対称錐 Q である場合を考える．このとき，ベクトル $z \in \mathbb{R}^n$ の対称錐 Q への射影が

$$\mathrm{Proj}_Q(z) = \sum_{i=1}^{r} \max(0, \lambda_i) c_i \quad (19)$$

と陽に記述できることが知られている [11]．ここで，λ_i および c_i は z に対するスペクトル値およびスペクトルベクトルである（2.3 節参照）．したがって，ベクトル方程式 (17) や無制約最適化問題 (18) を陽に記述することができ，計算機上で適当な手法を用いることにより解が得られることが期待できる．

Kong ら [11] は，林ら [6] の提案した二次錐相補性問題に対する正則化平滑化ニュートン法 (regularized smoothing Newton method) を次の形の対称錐相補性問題 (Symmetric Cone Complementarity Problem: SCCP) へと拡張した．

$$x \in Q, \ y \in Q, \ \langle x, y\rangle = 0, \ y = f(x) \quad (20)$$

ここで，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は与えられた関数であり，$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ は任意の対称錐である．SCCP (20) は CCP (1) においてを用いて $C := Q$, $F(x, y, \zeta) := f(x) - y$ としたものにほかならない．また，2.3 節で述べたように，対称錐は非負象限，二次錐，半正定値錐を含んでいるため，SCCP (20) は非負象限に対する相補性問題だけでなく，二次錐相補性問題や半正定値相補性問題も対象として含んでいることに注意する．

正則化平滑化ニュートン法では，正則化と平滑化の手法を組み合わせて点列を生成しているところが特徴的である．実際，ベクトル方程式 (17) を解くにあたって収束速度の観点からニュートン法[5]を用いるのが望ましいが，残差関数 $\phi_{\rm NR}$ は射影を含むため微分不可能であり，そのままニュートン法を適用することができない．そこで，残差関数 $\phi_{\rm NR}$ を $\mu \geq 0$ というパラメータを用いて平滑化することを考える．実際，残差関数 $\phi_{\rm NR}$ の代わりに次の二つの性質をもつ平滑化関数 ϕ_μ を用いる：(i) 任意の $\mu > 0$ に対して ϕ_μ は連続的微分可能である；(ii) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{\mu \downarrow 0} \phi_\mu(x, y) = \phi_{\rm NR}(x, y)$ である．また，正則化法は SCCP (20) における関数 f の代わりに，正則化パラメータ $\varepsilon > 0$ を用いて $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon x$ で定義

[5] ここで言うところのニュートン法とは，無制約最適化問題に対するニュートン法ではなく，ベクトル方程式に対するニュートン法である．

された関数 f_ε を用いる手法である．実際，アルゴリズムの収束性能の観点から見ると，関数 f よりも f_ε の方が性質がよく，正則化法を組み合わせないアルゴリズムに比べて弱い仮定で大域的収束性が言えることが多い．これらの関数を用いて定義された関数

$$H_{\mu,\varepsilon} := \begin{pmatrix} \phi_\mu(x,y) \\ f_\varepsilon(x) - y \end{pmatrix}$$

に対してニュートン方程式

$$H_{\mu,\varepsilon}(x,y) + \nabla H_{\mu,\varepsilon}(x,y)d = 0$$

を解いて探索方向 d と点列を生成しつつ，最終的に $(\mu,\varepsilon) \downarrow (0,0)$ としていく手法が正則化平滑化ニュートン法である．本節では，紙面の都合上，大まかな概要のみを述べるに留まったが，より詳細なアルゴリズムについては，[6, 11] を参照されたい．

また，残差関数 ϕ_{NR} の代わりに

$$\phi_{\mathrm{FB}}(x,y) := (x^2+y^2)^{1/2} - x - y \tag{21}$$

で定義される Fischer-Burmeister (F-B) 関数 $\phi_{\mathrm{FB}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を用いることも考えられる．ここで，(21) における $(\cdot)^2$ や $(\cdot)^{1/2}$ はユークリッドジョルダン代数を用いて定義されたものである．言い換えると，F-B 関数は CCP (1) において錐 C が対称錐の場合においてのみ定義することができる．F-B 関数は残差関数と同様 (16) の性質を満たし，微分可能性で残差関数よりも有利な点があることから，多くのアルゴリズムで採用されている．

5. さいごに

本稿では錐相補性問題の理論的背景と応用，およびその解法について簡単に述べた．ほかにも重要なトピックとして解の存在性や唯一性，およびそれに関わる関数の性質（単調性，Cartesian P property, Jordan P property など）があるが，これは [4] の参考書などに譲ることとしたい．3 章では，錐相補性問題の応用例としてロバストナッシュ均衡問題のみを挙げたが，不確実な情報をもつ道路ネットワークにおける均衡概念であるロバスト Wardrop 均衡 [9, 14] も錐相補性問題（二次錐相補性問題）独自の応用例として挙げられる．また，4.2 節で述べた正則化平滑化ニュートン法に関しては，（混合）二次錐相補性問題や（混合）非線形相補性問題に対して実装可能な Matlab ソルバー (ReSNA: Reguralized Smoothing Newton Algorithm) を本稿著者のウェブサイト上 [15] で無償提供している．SDP 関係のソルバーなどに比べるとはるかに未洗練であることは否めないが，面白半分にでも使っていただければ作者としても幸いである．

謝辞　本稿を執筆する機会を下さりました東京工業大学の高野祐一先生をはじめ，編集委員の先生方にこの場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, *Mathematical Programming*, **107**, 231–273, 2006.
[2] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
[3] X. Chen, Smoothing methods for complementarity problems and their applications: A survey, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **43**, 32–47, 2000.
[4] F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.
[5] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, New York, 1994.
[6] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **15**, 593–615, 2005.
[7] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima, Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **6**, 283–296, 2005.
[8] 茨木俊秀，福島雅夫，FORTRAN77 最適化プログラミング，岩波書店，1991.
[9] Y. Ito, Robust Wardrop equilibria in the traffic assignment problem with uncertain data, master's thesis, Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2011.
[10] 小島正和，土谷隆，水野眞治，矢部博，内点法，朝倉書店，2001.
[11] L. Kong, J. Sun, and N. Xiu, A regularized smoothing Newton method for symmetric cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **19**, 1028–1047, 2008.
[12] R. Nishimura, S. Hayashi, and M. Fukushima, Robust Nash equilibria in N-person noncooperative games: Uniqueness and reformulation, *Pacific Journal of Optimization*, **5**, 237–259, 2009.
[13] R. Nishimura, S. Hayashi, and M. Fukushima, Semidefinite complementarity reformulation for robust Nash equilibrium problems with Euclidean uncertainty sets, *Journal of Global Optimization*, **53**, 107–120, 2012.
[14] F. Ordóñez and N. E. Stier-Moses, Robust Wardrop equilibrium, *Network Control and Optimization*, Lecture Notes in Computer Science Vol. 4465, 247–256, 2007.
[15] http://www.plan.civil.tohoku.ac.jp/opt/hayashi/

