錐制約をもつ半無限計画問題の研究

奥野　貴之

半無限計画問題とは，無限個の不等式制約と有限個の変数で特徴付けされるような最適化問題のクラスである．工学や経済における多くの現実問題が半無限計画問題として自然に定式化されることが知られ，最適性条件や双対性などに関する理論の構築や，それらに基づいた半無限計画問題を解くためのアルゴリズムの設計が盛んに行われてきた．最近では半無限計画問題の中でも 2 次錐や半正定値錐といった凸錐を制約条件の中に含むクラスが研究されてきている．本稿では，標準的な半無限計画問題を紹介しつつ，錐制約をもつ半無限錐計画問題に関する結果や今後の課題について述べていきたい．

キーワード：半無限計画問題，錐計画問題，交換法，局所帰着法

1. はじめに

本稿では，半無限計画問題 (Semi-Infinite Programming Problem, SIP) と錐計画問題 (Conic Programming Problem, CP) の両方の特徴を兼ね備えた半無限錐計画問題 (Semi-Infinite Conic Programming Problem, SICP) を取り上げる．CP は，閉凸錐という特殊な集合が制約条件に含まれた最適化問題であり，2 次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming Problem, SOCP)[10] や半正定値計画問題 (Semi-Definite Programming Problem, SDP)[17] といったいわゆる対称錐 [2] 上の最適化問題が CP の代表的なクラスである．そうしたクラスを解くために内点法をはじめとした数多くの効率的なアルゴリズムが開発されてきており，また最適化に限定しない多くの分野において SOC と SDP が広く使われている．そうした背景もあって CP に関してご存知の読者は多いと思われる．一方，SIP については聞き慣れない人が多いかもしれない．詳しい定式化は次の節に回すが，SIP とは有限個の変数と無限個の制約をもつ最適化問題であり，昔から盛んに研究されてきたクラス [3, 6, 11] である．ちなみに“半無限 (Semi-Infinite)”という名前は，制約関数の個数と変数の個数のどちらか一方が無限であることに由来している．SIP は制約が無限個存在するために通常の最適化問題とは事情が大きく異なる．例えば実行可能性を調べるのも一筋縄ではいかない．実際，後述の SIP (1) における $g(x,t)$ は一般に t に関して非凸であり，与えられた点 $x \in \mathcal{R}^n$ の実行可能性を見るには $\min_{t\in T} g(x,t)$ の“大域的”最適解の非負性を調べなくてはいけない．よって内点法のように最初に実行可能内点を見つけよという要請に答えることも SIP では難しい．このように基本的な箇所で厄介な点が多くあるが，その分，フィルタ設計やチェビシェフ近似問題など自然に SIP に定式化される重要な問題も多く，SIP を効率的に解くアルゴリズムの開発など SIP を研究することの意義は大きい．

さて，著者の最近の関心は上述した二つの最適化問題である CP と SIP を組み合わせた，錐制約をもつ半無限計画問題 (SICP) にある．SICP はただの数学的問題ではなく現実問題への応用も多い．このことから SICP の研究は CP と SIP の両方の新しい方向性を与えるだけでなく，オペレーションズ・リサーチを含めた広い分野で問題解決のための新しい手段として活躍してくれるのではないかと期待している．本稿では，標準的な SIP に触れつつ著者の SICP に関する研究とその周辺を紹介していきたい．

2. SIP について

SIP は有限次元の変数空間において，無限個の不等式制約を含む制約条件の下で目的関数を最小化する問題である．SIP は以下のような形で記述される．

$$
[\mathbf{SIP}] \quad \begin{array}{ll} \underset{x\in\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & f(x) \\ \text{subject to} & g(x,t) \geq 0 \quad (t \in T) \end{array} \tag{1}
$$

ここで $T(\subseteq \mathcal{R}^\ell)$ はコンパクトな添字集合であり，各関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $g : \mathcal{R}^n \times T \to \mathcal{R}$ は十分に連続的微分可能とする．SIP は一般に等式制約を含むが，今回は表現の簡易性のため省略する．上の問題は有限個だけの

おくの　たかゆき
東京理科大学工学部第一部経営工学科
〒 162–8601 東京都新宿区神楽坂 1–3 工学部 3 号館 8 階

制約をもつ標準的な非線形計画問題 (Nonlinear Programming Problem, NLP) をサブクラスとして含む．実際，T が有限個の集合で $T=\{t^1,t^2,\ldots,t^p\}$ として表現されていたとしよう．すると (1) の制約領域は $\{x\in\mathcal{R}^n \mid g(x,t^1)\geq 0,\ g(x,t^2)\geq 0,\ldots,\ g(x,t^p)\geq 0\}$ と表される．このとき (1) は標準的な非線形計画問題である．しかし通常，半無限計画問題は，閉区間 $a\leq t\leq b$ のように T が無限個の要素で構成される場合を考え，制約領域は $\{x\in\mathcal{R}^n \mid g(x,t^1)\geq 0,\ g(x,t^2)\geq 0,\ldots\}$ と無限個の不等式制約で記述されるのである．

2.1 SIP の応用例

ここでは，非線形計画問題 (NLP) のみならず錐計画問題 (CP) など幅広いクラスの最適化問題が SIP として自然に表現できることを紹介したい．さらに，最適化問題だけでなく，工学や経済における数多くの現実問題が SIP として定式化できることが知られている．本節ではその中の代表例として，チェビシェフ近似問題が SIP に変換できることをみる．そのほかの応用例については [6, 11] を参照していただきたい．

2.1.1 CP

CP（錐計画問題）とは，次の形をした凸錐制約をもつ最適化問題である．

$$[\mathbf{CP}]\quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & G(x)\in C \end{array} \tag{2}$$

ここで f は SIP(1) と同じ条件の関数であり，$G:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^m$ は連続的微分可能なベクトル値関数である．また $C(\subseteq\mathcal{R}^m)$ は閉凸錐であり，$z\in C\Rightarrow sz\in C\ (s\geq 0)$ を満たす閉凸集合である．閉凸錐の代表的な例としては，

- 非負錐 $\mathcal{R}^m_+=\{y\in\mathcal{R}^m \mid y_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m\}$
- 2 次錐 $\mathcal{K}^m=\{y\in\mathcal{R}^m \mid y_1\geq\sqrt{\sum_{i=2}^m (y_i)^2}\}$
- 半正定値錐 $\mathcal{S}^m_+=\{Y\in\mathcal{R}^{m\times m} \mid Y=Y^\top, d^\top Yd\geq 0\ (d\in\mathcal{R}^m)\}$

が挙げられる．さて閉凸錐 C は有限個もしくは無限個の半空間の共通部分として表現可能である．実際，適当なコンパクト集合 $S\subseteq\{s\in\mathcal{R}^m \mid \|s\|=1\}$ を用いて $C=\{y\in\mathcal{R}^m \mid s^\top y\geq 0\ (s\in S)\}$ と表すことができる．上の三つの例に関しては非負錐 $\mathcal{R}^m_+$ は自明，2 次錐 $\mathcal{K}^m$ と半正定値錐 $\mathcal{S}^m_+$ については $\mathcal{K}^m=\left\{y\in\mathcal{R}^m \mid (1,s^\top)y\geq 0, \forall s\in\mathcal{R}^{m-1} \text{ s.t. } \|s\|=1\right\}$, $\mathcal{S}^m_+=\{Y\in\mathcal{R}^{m\times m} \mid Y=Y^\top, \mathrm{tr}(dd^\top Y)\geq 0,\ \forall d\in\mathcal{R}^m \text{ s.t. } \|d\|=1\}$ と表すことができる．この事実を使うと CP は次の SIP として再定式化できる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & f(x) \\ \text{subject to} & t^\top G(x)\geq 0 \quad (t\in T) \end{array}$$

2.1.2 ロバスト最適化問題

ロバスト最適化 [1] とは，最適化問題の制約関数や目的関数のデータに不確実性が含まれているという前提のもと，真のデータ値がどのようなものであっても実行可能性を満たしている解や，データ値が最悪に振る舞った場合に目的関数を最小化するような解といった，頑健性を考慮した最適化手法の一つである．その際に解かれるロバスト最適化問題とは不確実性集合 $\mathcal{U}$ を用いて

$$\begin{array}{ll} \underset{(x_0,x)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & x_0 \\ \text{subject to} & f(x,u)\leq x_0,\ g(x,u)\geq 0 \quad (u\in\mathcal{U}) \end{array}$$

と表され，これは SIP として見なすことができる．

2.1.3 多項式チェビシェフ近似問題

多項式チェビシェフ近似問題とは，集合 T 上で定義された連続関数 $g:T\to\mathcal{R}$ を T 上でうまく近似するように k 次多項式関数 $p_k(a,t)=\sum_{i=0}^k a_{i+1}t^i$ の係数 $a:=(a_1,\ldots,a_{k+1})^\top\in\mathcal{R}^{k+1}$ を決定する問題であり，信号処理分野におけるフィルタ設計（3.2 節参照）などと関わりが深い．この問題は次のように定式化できる．

$$\underset{a\in\mathcal{R}^{k+1}}{\text{Minimize}}\ \max_{t\in T}|g(t)-p_k(a,t)|$$

この式は $|g(t)-p_k(a,t)|$ の T 上の最大ギャップを最小化することを意味するが，補助変数 $a_0\in\mathcal{R}$ を導入することで

$$\begin{array}{ll} \underset{a\in\mathcal{R}^{k+1}}{\text{Minimize}} & a_0 \\ \text{subject to} & |g(t)-p_k(a,t)|\leq a_0 \quad (t\in T) \end{array}$$

と SIP に変形できる．

2.2 SIP に対するアルゴリズム

SIP の応用範囲が広いこともあって SIP を解くアルゴリズムの研究を多くの研究者が行ってきた．この節では，その中の代表的なアルゴリズムである離散化法 (discretization method)[6, 11, 14]，交換法 (exchange method) [4, 6, 9, 11, 12] 局所帰着法 (local reduction method) [6, 11, 13, 16] の概略を紹介する．

2.2.1 離散化法と交換法

SIP (1) において T を有限部分添字集合 $\tilde{T}(\subsetneq T)$ で置き換えた緩和問題を SIP$(\tilde{T})$ と書くことにする．このとき SIP$(\tilde{T})$ は有限個の制約をもつ最適化問題であ

ることに注意してほしい．離散化法と交換法はいずれも T の有限部分集合 T_k を逐次更新しながら SIP (T_k) の最適解を反復点として生成した点列 $\{x^k\}$ を SIP の最適解へ収束させる手法である．離散化法と交換法の違いは $\{T_k\}$ の更新方法にある．

まず離散化法は，適当な $T^k_{\rm new} := \{t^k_1,\ t^k_2, \ldots, t^k_p\} \in T \backslash T_k$ を見つけて $T_{k+1} = T_k \cup T^k_{\rm new}$ と更新することを繰り返す．このときの $T^k_{\rm new}$ の取り方として $\mathrm{dist}(T_k, T) \to 0\ (k \to \infty)$[1] となるように選べば最適解へ収束することが知られている．例えば $T^k_{\rm new} \subseteq \mathrm{argmin}_{t\in T}\, g(x^k, t)$ ととればよい．離散化法の利点の一つは，SIP のアルゴリズムの中でも最も理解しやすく，実装も簡単であるということであろう．しかしながら T_k の要素数は（$T^k_{\rm new}$ の選び方によっては爆発的に）増加していき，部分問題として解く SIP (T_k) のサイズも極めて大きくなりがちなのが欠点である．T の次元が大きいときはその傾向は顕著になる．

一方，交換法は

$$T_{k+1} \subseteq T_k \cup T^k_{\rm new} \tag{3}$$

であるように T_k を更新していき，各反復点において有効でない添字[2]など，不要なものを除くことによって T_k のサイズが膨れあがらないようにする．この手法の利点は，離散化法とは異なり各反復で解くべき SIP(T^k) のサイズも高々変数の数で抑えられるところにある．

2.2.2 局所帰着法

SIP (1) において添字集合 T が微分可能な関数 $v : \mathcal{R}^\ell \to \mathcal{R}^{\ell'}$ を使って $T = \{t \in \mathcal{R}^\ell \mid v(t) \geq 0\}$ と表されているとする．また現在点 $\bar{x}$ において $\min_{t\in T} g(\bar{x}, t)$ の各局所的最適解で

a) 2 次の十分条件が成り立つ．

b) 狭義相補性が成り立つ．

c) 1 次独立制約想定が成り立つ．

といった性質[3][6, 13] が成り立っていると仮定しよう．さて天下り的な説明になるが，局所帰着法のアイデアとは

- 現在点 $\bar{x}$ の適当な近傍 $\mathcal{N}(\bar{x})$ 上で $t^1(x), t^2(x), \ldots, t^s(x)$ は $\min_{t\in T} g(x, t)$ の局所的最小解である．
- $\{t^i(\bar{x})\}^s_{i=1} \supseteq \mathrm{argmin}_{t\in T}\, g(\bar{x}, t)$

を満たす有限個の連続的微分可能な関数 $t^1(\cdot), \ldots, t^s(\cdot) : \mathcal{N}(\bar{x}) \to T$ を使って $\{x \in \mathcal{R}^n \mid g(x, t) \geq 0\ (t \in T)\} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid g(x, t^i(x)) \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, s)\}$ と無限個の制約を有限個の制約で表現することにある．このとき $\mathcal{N}(\bar{x})$ 上で SIP は標準的な NLP に帰着され，逐次 2 次計画法（Sequential Quadratic Programming method, SQP 法）[7, 18] といった NLP に対する既存手法が適用できることが期待される．ここで読者は上の性質をもつ関数 $t^1(\cdot), t^2(\cdot), \ldots, t^s(\cdot)$ をどのように見つけるのかと思うだろう．残念ながら仮定 a)〜c) の下でこうした関数の存在は保証できるものの，具体的に見つける一般的な手段はない．しかし，面白いことに制約関数 $\tilde{g}_i(x) := g(x, t^i(x))$ の勾配情報は陽に得ることができる．実際，$\nabla\tilde{g}_i(\bar{x}) = \nabla_x g(\bar{x}, t^i(\bar{x}))$ と表現することができ，SQP 法などで部分問題として解かれる元問題の近似問題 $\min_{d\in\mathcal{R}^n}\ \nabla f(\bar{x})^\top d + \frac{1}{2} d^\top \bar{B} d$ s.t. $\tilde{g}(\bar{x}) + \nabla\tilde{g}(\bar{x})^\top d \geq 0$ （$\bar{B} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ は適当な正定値対称行列）の形は具体的に得ることができる．SQP 法では，部分問題の最適解を探索方向 d として次の反復点を $\bar{x} = \bar{x} + sd$ ($s \in (0, 1]$: ステップサイズ）と更新していく．したがって，SQP 法と局所帰着法を併用すると，SIP から帰着させた NLP の具体的な形を知ることはできないものの，点列を生成することができる．この手法は各反復点において，最初の仮定 a)〜c) の成立を前提とすることや $\min_{t\in T}\, g(\bar{x}, t)$ における大域的最適解を含む局所的最適解を計算する必要があり，交換法と比べると 1 反復あたりにかかる計算コストが大きくなりがちである[4]．だが交換法や離散化法が最適解への超 1 次収束といった速い収束 [7, 18] が期待できない一方で，局所帰着法はそうした速い収束性を備えているのが大きい利点といえる．

3. SICP について

ここでは本稿のメインテーマである SICP について述べていく．

SICP は無限個の錐制約を含む最適化問題として次のように記述される．

$$[\textbf{SICP}]\quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & G(x, t) \in C \quad (t \in T) \end{array} \tag{4}$$

[1] $\mathrm{dist}\,(X, Y) := \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X}\ \|x - y\|$

[2] 添字 $t \in T^k$ が x^k で有効とは，$g(x^k, t) = 0$ が成り立つときをいう．

[3] この性質が至るところで成り立つとするのは強い仮定であるが，SIP の最適解付近では成立することは多い．また局所帰着法は交換法や離散化法を用いて十分に解に近づいた状況で使われることが多いため，a)〜c) を仮定するのは不自然なことではない．

[4] チェビシェフ近似やフィルタ設計では T として閉区間 $[0, 1] \times [0, 1]$ といった高々2 次元の箱型を考えることが多く，そうした T 上で $g(x, t)$ の局所的最適解を計算することは難しいことではない．

ここで関数 $G : \mathcal{R}^n \times T \to \mathcal{R}^m$ は十分に連続的微分可能なベクトル値関数，関数 f と添字集合 $T \subseteq \mathcal{R}^\ell$ は SIP (1) や CP (2) と同じものとする．T が有限集合で与えられる場合は SICP は CP (2) に帰着され，$C = \mathcal{R}^1_+$ のときは SICP は SIP (1) に帰着される．

さて 2.1.1 節で述べたように錐は無限個の半空間の共通部分として表現することができるため，適当な添字集合 S をつかって

$$G(x,t) \in C \ (t \in T) \Leftrightarrow s^\top G(x,t) \geq 0 \ ((s,t) \in S \times T)$$

と書き直すことができる．よって SICP は SIP へ帰着することが可能であり，離散化法や交換法といった SIP の既存手法をそのまま適用可能である．SIP の専門家たちが SICP の研究をしてこなかったのはそこに原因があるのかもしれない．しかし，そうした SIP アプローチだと

(∗) 添字集合の次元が S の次元だけ増加するためアルゴリズムの計算コストが激増する

という問題がある．実際，離散化法や交換法といった既存手法では実行可能性を調べるために“非凸”最適化問題 $\min_{(s,t)\in S\times T} s^\top G(x,t)$ の大域的最小解を求める必要がある．それは変数の次元が増えるにつれて難しさが大きく増す．例えば 2 次錐 $\mathcal{K}^m$ つきの SICP (4) を SIP に変形すると，$S \times T$ の次元は T の次元 $+(m-1)$ である．よって，実行可能性を調べる観点からは SIP アプローチは効率的とはいえない．Hayashi et al. [4] では，有限個の 2 次錐制約と無限個の線形制約をもつ SICP に対して各反復で SOCP を繰り返し解く交換法ベースの手法を提案しているが，そのように 2 次錐をそのまま扱うほうが SIP アプローチよりも効率的に問題が解けることを数値実験で確認している．

3.1 SICP に対する KKT 条件

標準的な非線形計画問題 (NLP) の有名な事実として，NLP の局所的最適解において制約想定といわれる制約関数に関する適当な条件の下で Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件 [7, 18] が成り立つという性質がある．逆に，凸目的関数と凸制約関数から構成される NLP の実行可能点で KKT 条件が成立するならば，その点は大域的最適解であることもよく知られた事実である．同様に SICP の局所的最適解 $x^* \in \mathcal{R}^n$ においても KKT 条件の成立が予想されるが，その KKT 条件は無限個の錐制約で特徴付けられると考えるのが自然である．しかし，実際には高々変数の数の錐制約だけで十分であることを下で述べる．SICP の局所的最適解 x^* に対して次の Robinson 制約想定 (Robinson Constraint Qualification, RCQ) を定義する．

RCQ: $G(x^*,t) + \nabla_x G(x^*,t)^\top d \in \operatorname{int} C \ (t \in T)$ を満たすベクトル $d \in \mathcal{R}^n$ が存在する．

ただし $\operatorname{int} C$ は閉凸錐 C の内部を表すとする．この RCQ の下で以下の定理が成り立つ．

Theorem 3.1. [12, Theorem 2.4] $x^* \in \mathcal{R}^n$ が SICP (4) の局所的最適解であり RCQ が成立するならば $t_1, t_2, \ldots, t_p \in T$，ラグランジュ乗数ベクトル $y_1, y_2, \ldots, y_p \in \mathcal{R}^m$ $(p \leq n)$ が存在して

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \nabla_x G(x^*, t_i) y_i = 0,$$
$$C \ni y_i \perp G(x^*, t_i) \in C \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

が成り立つ．ただし $x \perp y$ は $x^\top y = 0$ を意味する．

また f が凸関数，$G(x,t) = A(t)^\top x - b(t)$ の場合，SICP の実行可能解 $x \in \mathcal{R}^n$ で上の KKT 条件が成立していれば x は SICP の大域的最適解である [12, Theorem 2.5]．これらの性質は，後述する SICP に対するアルゴリズムの収束解析で重要な役目を果たす．

3.2 SICP の応用例

SICP の代表的な応用先としては，例えば有限インパルス応答 (Finite Impulse Response, FIR) フィルタ設計がある．FIR フィルタ設計とは，周波数応答関数 $H(h,\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} h_k e^{-k\omega\sqrt{-1}}$ が適当な条件をすべての $\omega \in [\omega_1, \omega_2] \subseteq [0, 2\pi]$ 上で満たすような係数ベクトル $h := (h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})^\top \in \mathcal{R}^n$ を決定する問題である．その中で対数チェビシェフ近似 FIR フィルタ設計問題が SICP として定式化される．その問題は $D(\omega) > 0$ $(\omega \in [0, \pi])$ であるような振幅関数 $D : [0, \pi] \to \mathcal{R}$ が与えられたときに

$$\underset{h \in \mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} \ \sup_{\omega \in [0,\pi]} \Big| \log |H(h,\omega)| - \log |D(\omega)| \Big| \quad (5)$$

を満たす関数 $H(h,\omega)$ を決定する問題である．問題 (5) は，$R(h,\omega) := |H(h,\omega)|^2$ とし，補助変数 $r \in \mathcal{R}$ を導入することで

$$\begin{array}{ll} \underset{(r,h)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & r \\ \text{subject to} & 1/r \leq R(h,\omega)/D(\omega)^2 \leq r \\ & (\omega \in [0,\pi]) \end{array}$$

と表現でき，これは最終的に

$$\begin{array}{ll} \underset{(r,h)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & r \\ \text{subject to} & rD(\omega)^2 - R(h,\omega) \geq 0, \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} R(h,\omega)+r \\ R(h,\omega)-r \\ 2D(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^3 \quad (\omega \in [0,\pi])$$

と無限個の 2 次錐制約を含む SICP として表すことができる．

そのほかの応用例としては，上の例と同様 無限個の 2 次錐制約つきの SICP として定式化されるベクトル値チェビシェフ近似問題 [12] や，半正定値錐つきの SICP として定式化されるようなクラス FIR フィルタ設計 [15] が存在する．

3.3 アルゴリズム

この節では，SICP を解くための二つのアルゴリズムについて説明する．それらはそれぞれ前の節で説明した SIP に対する交換法と局所帰着法に基づいた手法である．

3.3.1 正則化陽的交換法

ここでは，次のような形をした SICP を考える：

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & f(x) & \\ \text{subject to} & A(t)^\top x - b(t) \in C \quad (t \in T) \end{array} \tag{6}$$

ここで $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ は連続的微分可能な凸関数であり，$A : T \to \mathcal{R}^{n\times m}$, $b : T \to \mathcal{R}^m$ は連続なベクトル値関数とする．前節で説明した対数チェビシェフ近似問題は SICP (6) として定式化可能である．さて，SICP (6) に対する交換法をベースとしたアルゴリズムについて説明する．いくつか記号の定義を行う．e を $\operatorname{int} C$ に含まれる任意の点とし，$f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon\|x\|^2/2$ とおく．また f_ε^* を SICP (6) の目的関数を正則化した問題 (SICP$_\varepsilon$)：$\min f_\varepsilon(x)$ s.t. $A(t)^\top x - b(t) \in C$ $(t \in T)$ の最適値とする．さらに SICP$_\varepsilon$ の最適値レベル集合 L_ε と緩和された実行可能領域 $\mathcal{F}_\gamma$ から集合 $S_{\varepsilon,\gamma}$ を $S_{\varepsilon,\gamma} := L_\varepsilon \cap \mathcal{F}_\gamma$, $L_\varepsilon := \{x \in \mathcal{R}^n \mid f_\varepsilon(x) \le f_\varepsilon^*\}, \mathcal{F}_\gamma := \{x \in \mathcal{R}^n \mid A(t)^\top x - b(t) \in -\gamma e + C\ (t \in T)\}$ と定義する．式から明らかに $S_{0,0}$ は SICP (6) の最適解の集合と一致する．この事実に基づくと，$S_{\varepsilon,\gamma}$ に含まれる点を逐次求めながら $\varepsilon, \gamma \to 0$ とすることで SICP (6) の最適解を得られることが期待できる．そこで本アルゴリズムでは，各 ε, $\gamma > 0$ に対して (ε,γ)-近似解 $x(\varepsilon,\gamma) \in S_{\varepsilon,\gamma}$ を 3 節で説明した交換法で逐次求めていきながら ε, γ を 0 に近づけていく．本交換法では，SICP$_\varepsilon$ において T を $T' := \{t_1, \ldots, t_p\} \subseteq T$ で置き換えた CP(ε, T') を部分問題として解きながら，T' を更新していく．アルゴリズムの詳細は以下のとおりである．

<u>正則化陽的交換法</u>

Step 0. 二つの正数列 $\{\gamma_k\}_{k\ge0}$, $\{\varepsilon_k\}_{k\ge0}$ を $\lim_{k\to\infty}\gamma_k = 0$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ となるように選ぶ．有限部分集合 $T^0 := \{t_1^0, \ldots, t_p^0\} \subseteq T$ をとる．$k := 0$ とする．

Step 1. $r := 0$, $E^0 := T^k$ とする．CP(ε_k, E^0) を解き，最適解 v^0 を求める．以下の (a)–(c) を行う：

- **(a)** $A(t_{\text{new}}^r)^\top v^r - b(t_{\text{new}}^r) \notin -\gamma_k e + C$ であるような $t_{\text{new}}^r \in T$ を見つけて，$\overline{E}^{r+1} := E^r \cup \{t_{\text{new}}^r\}$ として (b) へ．もし，そのような t_{new}^r が存在しない場合，すなわち，$A(t)^\top v^r - b(t) \in -\gamma_k e + C$ が任意の $t \in T$ について成り立つならば，$x(\varepsilon_k, \gamma_k) := v^r, T^{k+1} := E^r$ として Step 2 へ．
- **(b)** CP$(\varepsilon_k, \overline{E}^{r+1})$ を解いて最適解 v^{r+1} と各 $t \in \overline{E}^{r+1}$ に対応するラグランジュ乗数ベクトル $y_t^{r+1} \in \mathcal{R}^m$ を求める．
- **(c)** $E^{r+1} := \{t \in \overline{E}^{r+1} \mid y_t^{r+1} \ne 0\}$, $r := r+1$ として (a) へ．

Step 2. γ_k と ε_k が十分小さければ終了．そうでなければ，$k := k+1$ として Step 1 へ．

Step 1 では，3 節における添字の交換 (3) を行っている．Step 1-(a) における t_{new}^r は，現在点 v^r が緩和実行可能領域にも入らないほど違反度が強い制約に対応した添字である．また，このような $t_{\text{new}}^r \in T$ は，$A(t)^\top v^r - b(t) \notin -\gamma_k e + C$ であるものならば何でもよく，必ずしも（SIP における $\min_{t\in T} g(x,t)$ のような）最小化問題を解いて求める必要がない．Step 1-(b) においては，閉凸錐 C が 2 次錐や半正定値錐のように特殊な構造をもつ場合，主双対内点法 [10, 17] や平滑化ニュートン法 [5] などで効率的に解くことができる．また Step 1-(c) では，ラグランジュ乗数の非零性を調べることで v^{r+1} で有効でない制約を取り除いている．

正則化項 $\varepsilon\|x\|^2/2$ を目的関数につけ加えることのメリットは大きく，まず部分問題の CP$(\varepsilon, \overline{E}_{r+1})$ が最適解を（唯一つ）もつことや，Step 1 が必ず有限回の反復で終了することが保証できる．そして以下の定理が示すように，二つのパラメータの列 $\{\varepsilon_k\}, \{\gamma_k\}$ を適切に選べば生成する点列の有界性だけでなく，収束性も証明できるという強い結果も得られた．

Theorem 3.2. [12, Theorem 4.3] SICP (6) が空ではない最適解集合 S をもつとし，Slater 制約想定 $A(t)^\top x - b(t) \in \operatorname{int} C$ $(t \in T)$[5]が成り立つ

[5] これは 3.1 節で導入した RCQ と等価である．

とする．さらに $\gamma_k = o(\varepsilon_k)$ となるように $\{\varepsilon_k\}$ と $\{\gamma_k\}$ を選べば，正則化陽的交換法で生成される点列は SICP (6) の最小 2 ノルム解 $x^*_{\min}$ に収束する．すなわち $\lim_{k\to\infty} x(\varepsilon_k,\gamma_k) = x^*_{\min}$，$\{x^*_{\min}\} := \mathrm{argmin}_{x\in S}\|x\|$ である．

3.3.2　局所帰着 SQP 法

本節では (4) において $C = \mathcal{K}^m$ とした無限個の 2 次錐制約をもつ SICP を考える．

SICP に対する二番目の解法として，2.2.2 節で述べた局所帰着法をベースとした SQP タイプの手法について説明する．この手法では，SICP を局所帰着法を使って局所的に有限個の制約からなる 2 次錐計画問題 (SOCP) に帰着させ，得られた SOCP に対して SQP 法を適用して点列の生成を行う．$G(x,t) = (G_1(x,t), \bar{G}(x,t))^\top \in \mathcal{R}\times\mathcal{R}^{m-1}$ として $\varphi(x,t) := (G(x,t))_1 - \|\bar{G}(x,t)\|_2$ とおく．本手法では，まず反復点 x^k のある近傍 $\mathcal{N}(x^k)(\subseteq \mathcal{R}^n)$ 上で

- $\mathcal{N}(x^k)$ 上で $t_1^k(x), t_2^k(x), \ldots, t_{r_k}^k(x)$ は $\min_{t\in T} \varphi(x,t)$ における局所的最小解である．
- $\{t_i^k(x^k)\}_{i=1}^{r_k} \supseteq \mathrm{argmin}_{t\in T}\varphi(x^k,t)$

であるような有限個の連続的微分可能な関数 $t_1^k(\cdot),\ldots,t_{r_k}^k(\cdot) : \mathcal{N}(x^k) \to T$ を考える．それらを用いることで SICP は無限個の 2 次錐制約を有限個の 2 次錐制約で表現した SOCP(x^k)：

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathcal{N}(x^k)}{\text{Minimize}} & f(x) \\ \text{subject to} & G_i^k(x) := G(x, t_i^k(x)) \in \mathcal{K}^m \\ & (1 \le i \le r_k) \end{array}$$

として（仮想的に）書き直すことができる．次に部分問題として SOCP(x^k) を近似した次の QSOCP(x^k,ε) を解いて，その最適解を探索方向 d^k とする．

$$\begin{array}{ll} \underset{d\in\mathcal{R}^n}{\text{Minimize}} & \nabla f(x^k)^\top d + \frac{1}{2} d^\top B_k d \\ \text{subject to} & G_i^k(x^k) + \nabla G_i^k(x^k)^\top d \in \mathcal{K}^m \\ & (i = 1,2,\ldots,r_k) \end{array}$$

ここで $B_k \in \mathcal{R}^{n\times n}$ は正定値対称な行列である．また 2.2.2 節で述べた SIP に対する局所帰着法と同様，$\nabla G_i^k(x^k)$ の値も計算することが可能であり，QSOCP(x^k,ε) を具体的に書き下すことが可能であることに注意してほしい．続いて，最適解に近づくよう探索方向 d^k のステップサイズを適切に定めるため，評価関数として max 型ペナルティ関数 $\Phi_\rho(x) := f(x) + \rho \max_{t\in T}(-\varphi(x,t))_+$ $((z)_+ := \max(z,0))$ を使用する．そして Armijo の直線探索 [7, 18] で $\Phi_\rho(x)$ が減少するようにステップサイズ $s_k \in (0,1]$ を定める．（ペナルティパラメータ ρ を十分大きくとれば，こうした s_k は必ず見つけることができることが保証されている．下の Step 3 を参照のこと．）そして次の反復点として $x^{k+1} := x^k + s_k d^k$ とする．最後に停止条件について説明する．QSOCP(x^k,ε) の KKT 条件はラグランジュ乗数ベクトル $\eta_1^{k+1}, \eta_2^{k+1}, \ldots, \eta_{r_k}^{k+1}$ を用いて

$$\begin{array}{l} \nabla f(x^k) + B_k d^k - \displaystyle\sum_{j=1}^{r_k} \nabla G_j^k(x^k)\eta_j^{k+1} = 0, \\ \mathcal{K}^m \ni \eta_j^{k+1} \perp G_j^k(x^k) + \nabla G_j^k(x^k)^\top d^k \in \mathcal{K}^m \\ (j = 1,2,\ldots,r_k) \end{array}$$

と表現できる．$d^k = 0$ のとき上の条件は SICP の KKT 条件と一致するので，そのとき KKT 条件を満たす点が得られたとしてアルゴリズムを終了させる．以上をまとめると以下のようになる．

<u>局所帰着 SQP 法</u>

Step 0（初期設定）：　初期点 $x^0 \in \mathcal{R}^n$ と初期行列 $B_0 \in S^n_{++}$ を選ぶ．各パラメータ $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\delta > 0$, $\rho_{-1} > 0$ を選ぶ．$k := 0$ とする．

Step 1（探索方向生成）：　QSOCP(x^k,ε) を解いて最適解 $d^k \in \mathcal{R}^n$ を探索方向，また各制約に対応するラグランジュ乗数ベクトル $\eta_j^{k+1} \in \mathcal{K}^m$ $(j = 1,2,\ldots,r_k)$ を求める．

Step 2（終了判定）：　$d^k = 0$ ならば終了．そうでなければ Step 3 へ．

Step 3（ペナルティパラメータの更新）：　$\rho_{k-1} \ge \sum_{j=1}^{r_k}(\eta_j^{k+1})_1$ ならば $\rho_k := \rho_{k-1}$ とする．そうでなければ $\rho_k := \sum_{j=1}^{r_k}(\eta_j^{k+1})_1 + \delta$ とする．

Step 4（**Armijo** 直線探索）：　以下を満たす最小の非負整数 $\ell_k \ge 0$ を見つける．

$$\Phi_{\rho_k}(x^k + \alpha^{\ell_k} d^k) - \Phi_{\rho_k}(x^k) \le -\alpha^{\ell_k}\beta(d^k)^\top B_k d^k$$

$s_k := \alpha^{\ell_k}$, $x^{k+1} := x^k + s_k d^k$ とする．

Step 5:　正定値対称行列 B_k を更新．$k := k+1$ として Step 1 へ．

この手法は適当な仮定の下で SICP の KKT 条件をみたす点への大域的収束性をもつ．また局所的 2 次収束といった速い収束　[7, 18] を達成するためには，QSOCP(x^k,ε) の目的関数の係数行列 B_k として SOCP(x^k,ε) のラグランジュ関数のヘッセ行列 $\mathcal{H}_k \in \mathcal{R}^{n\times n}$ をとることが好ましい [8]．ところが $\mathcal{H}_k$ の値を計算するには $\nabla^2 t_i^k(x^k)$ $(i = 1,2,\ldots,r_k)$ の値が必要

であり，それの導出は難しい．そこで本研究では $\mathcal{H}_k$ とは異なる B_k の生成方法を提案し，局所的に 2 次収束することを示した．詳しいことは [13] を参照されたい．

4. おわりに

本稿では，錐制約をもつ半無限計画問題 (SICP) についての研究について紹介した．本研究の詳細については [12, 13] を参照していただければと思う．

SICP の研究の今後の方向として大きく分けて二つある．一つ目が前節で提案したアルゴリズムの改良である．いずれの手法も部分問題として有限個の制約をもつ錐計画問題 (CP) を厳密に解くことを要請している．それらは主双対内点法など強力な既存アルゴリズムで効率よく解けるといえども，その計算コストは決して小さくない．各部分問題を解く精度をうまく調整しながら，生成する点列が SICP の最適解へ収束するようにアルゴリズムを拡張することが重要な課題である．二つ目として，SICP として半正定値錐を含むクラス (SISDP) に関する研究である．あるクラスの FIR フィルタ設計 [15] が SISDP として定式化される．SISDP に特化したアルゴリズムの開発も是非取り組みたい課題の一つである．

謝辞 最後になりましたが，本稿を執筆する機会をくださった高野祐一先生に感謝したいと思います．

参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust convex optimization, *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998), 769–805.
[2] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press, New York, 1994.
[3] M. A. Goberna and M. A. López, *Semi-Infinite Programming—Recent Advances*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
[4] S. Hayashi and S.-Y.Wu, An explicit exchange algorithm for linear semi-infinite programming problems with second-order cone constrains, *SIAM Journal on Optimization*, **20** (2009), 1527–1546.
[5] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **15** (2005), 593–615.
[6] R. Hettich and K. O. Kortanek, Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications, *SIAM Review*, **35** (1993), 380–429.
[7] 茨木俊秀，福島雅夫，最適化の手法，共立出版，1993.
[8] H. Kato and M. Fukushima, An SQP-type algorithm for nonlinear second-order cone programs, *Optimization Letters*, **1** (2007), 129–144.
[9] H. C. Lai and S.-Y.Wu, On linear semi-infinite programming problems, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **13** (1992), 287–304.
[10] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, *Linear Algebra and its Application*, **284** (1998), 193–228.
[11] M. A. López and G. Still, Semi-infinite programming, *European Journal of Operation Research*, **180** (2007), 491–518.
[12] T. Okuno, S. Hayashi and M. Fukushima, A regularized explicit exchange method for semi-infinite programs with an infinite number of conic constraints, *SIAM Journal on Optimization*, **22** (2012), 1009–1028.
[13] T. Okuno and M. Fukushima, Local reduction based SQP-type method for semi-infinite programs with an infinite number of second-order cone constraints, *Journal of Global Optimization*, (2012), 1–24, DOI:10.1007/s10898-013-0063-0.
[14] R. Reemtsen, Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **71** (1991), 85–103.
[15] S.-P. Wu, S. Boyd and L. Vandenberghe, FIR filter design via semidefinite programming and spectral factorization, *Proceedings of the 35th IEEE Decision and Control*, **1** (1996), 271–276.
[16] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Ibaraki, A globally convergent SQP method for semi-infinite nonlinear optimization, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **23** (1988), 141–153.
[17] L. Vandenberghe and S. Boyd, Semidefinite programming, *SIAM Review*, **38** (1996), 49–95.
[18] 矢部博，工学基礎 最適化とその応用，数理工学社，2006.