Study on Stable Allocations in Two-Sided Discrete-Concave Market

横井　優

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻
指導教員：室田一雄 教授

1. はじめに

安定マッチングモデルは，労働者と雇用者のような二つの主体集合の間で，各主体の選好を考慮した“安定”なマッチングを考える問題である．本研究で扱う安定割当モデルは，その枠組みをさらに一般化したものであり，各主体は複数の相手と契約を結ぶことができ，各ペア間の契約量が非負整数値で表される．このモデルにおける各主体の選好の表現方法として，次の 2 種類の方法が提案されている．

Alkan–Gale [1] は主体の選好を選択関数で表す定式化を行い，選択関数が代替性，整合性，サイズ単調性を持てば，安定割当全体の成す集合が非空な分配束を成すことを示した．一方，江口–藤重–田村 [2] は主体の選好を評価関数で表すモデルを提案し，評価関数が $\mathrm{M}^\natural$ 凹性を持つならば安定割当が存在することを，アルゴリズムにより構成的に示した．

本研究では，評価関数モデルが選択関数モデルに帰着できること，および $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数から帰着された選択関数が Alkan–Gale の指摘した性質を導くことを示す．その結果，評価関数の $\mathrm{M}^\natural$ 凹性が，安定割当全体の集合の分配束構造といったさまざまな性質を導くという主結果を得る．さらに，その結果が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数よりも広い関数クラスである準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数に対して拡張できることを示す．

2. $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数

S を有限集合，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{R}$ をそれぞれ整数，実数全体の集合とする．ベクトル $x = (\, x(u) \mid u \in S \,) \in \mathbf{Z}^S$ に対してその正の台と負の台を

$$\mathrm{supp}^+(x) = \{\, u \in S \mid x(u) > 0 \,\},$$
$$\mathrm{supp}^-(x) = \{\, u \in S \mid x(u) < 0 \,\}$$

とする．関数 $f : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し，その実効定義域を $\mathrm{dom}\, f$ で表す．各 $u \in S$ に対し，$\chi_u \in \mathbf{Z}^S$ を u 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルとする．また，$\chi_0 \in \mathbf{Z}^S$ を 0 ベクトルとする．関数 $f : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が **$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数**であるとは，$\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ で，次の交換公理 ($\mathrm{M}^\natural$) が成り立つことをいう [3]:

($\mathrm{M}^\natural$) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$,
$\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$:

$$f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v) \geq f(x)+f(y).$$

$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数は連続凹関数に拡張可能であり，劣モジュラ性を満たす．これらの性質は，効用関数に一般に仮定される凹性や，限界効用逓減の法則に対応する．さらに，$\mathrm{M}^\natural$ 凹性は粗代替性と呼ばれる概念と密接な関係をもつ [4].

3. 安定割当モデル

I，J を交わりを持たない主体の集合とし，各ペア $(i, j) \in I \times J$ の間で非負整数単位の契約が結ばれるとする（例えば労働者集合・雇用者集合の間の労働割当）．割当 X は $I \times J$ 非負整数行列で表され，その i 行 ($x_i \in \mathbf{Z}^J_+$) は主体 $i \in I$ の割当，j 列 ($x_j \in \mathbf{Z}^I_+$) は主体 $j \in J$ の割当に対応する．主体 $i \in I$ ($j \in J$) は自身の割当に関する評価関数 $f_i : \mathbf{Z}^J_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ($f_j : \mathbf{Z}^I_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$) をもつ．関数値が $-\infty$ であることは割当が非許容なことを表すとし，$f_k(\mathbf{0}) \neq -\infty$ ($k \in I \cup J$) とする．割当 $X \in \mathbf{Z}^{I\times J}_+$ が**安定である**とは，次の二つの条件が成立することである（M は十分大きな整数）：

(S1) $\forall k \in I \cup J$,　$x_k \in \arg\max \{\, f_k(y) \mid y \leq x_k \,\}$.

(S2) 次を満たすペア $(i, j) \in I \times J$ が存在しない：

$$x_i \notin \arg\max \{\, f_i(y) \mid y \leq x_i + M\chi_j \,\},$$
$$x_j \notin \arg\max \{\, f_j(y) \mid y \leq x_j + M\chi_i \,\}.$$

条件 (S1) は，どの主体も現在の割当の一部を破棄する動機をもたないことを表す．条件 (S2) は，どのペア (i, j) に関しても，(i, j) 間の割当数を増加させることによって，i と j の双方がより好ましい割当を選べる

ようになることがないことを表す．

4. 安定割当の存在と束構造

上記の安定割当モデルにおいて，各主体の評価関数 f_k $(k \in I \cup J)$ が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数で，条件

(US) $\forall x \in \mathrm{dom}\, f_k$, $|\arg\max\{f_k(y) \mid y \le x\}| = 1$

を満たすとして，安定割当の存在性と，安定割当全体が成す集合の構造について考える．二つの割当 $X, X' \in \mathbf{Z}_+^{I\times J}$ に関して，$X \succeq_I X'$ によって

$$x_i = \arg\max\{\, f_i(y) \mid y \le x_i \vee x'_i \,\} \ \ (\forall i \in I),$$

を表すこととする．同様に $\succeq_J$ も定める．このとき $\succeq_I, \succeq_J$ は半順序である．また，$X \curlyvee X' \in \mathbf{Z}_+^{I\times J}$ を i 行 $(i \in I)$ が $\arg\max\{\, f_i(y) \mid y \le x_i \vee x'_i \,\}$ である行列とし，$X \curlywedge X' \in \mathbf{Z}_+^{I\times J}$ を j 列 $(j \in J)$ が $\arg\max\{\, f_j(y) \mid y \le x_j \vee x'_j \,\}$ である行列とする．本研究では，次の定理を示した．

定理 1. 任意の $k \in I \cup J$ に関して f_k が (US) を満たす $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数ならば，以下の (1)–(5) が成立する：

(1) 安定割当が存在する．

(2) 安定割当全体の集合は，半順序 $\succeq_I$ に関して分配束を成す．

(3) 任意の安定割当 X，X' に関して，$X \curlyvee X'$，$X \curlywedge X'$ もまた安定割当であり，それぞれ束における上限，下限となる．

(4) 任意の安定割当 X，X' に関して次式が成り立つ：

$$X \succeq_I X' \iff X' \succeq_J X.$$

(5) 任意の安定割当 X，X' に関して

$$|x_k| = |x'_k| \quad (k \in I \cup J)$$

が成り立つ（$|\cdot|$ はベクトルの要素和）．

上記の (1)–(5) は古典的な安定マッチングモデルにおいて成立する事実の自然な拡張となっている．

証明の概略：上記の評価関数モデルは，f_k $(k \in I \cup J)$ が (US) を満たすとき，

$$C_k(x) = \arg\max\{\, f_k(y) \mid y \le x \,\}$$

を各主体の選択関数として Alkan–Gale [1] の選択関数モデルに帰着できる．さらに，f_k $(k \in I \cup J)$ が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数であるときには，安定割当集合が分配束構造を持つための選択関数に関する十分条件（代替性，整合性，サイズ単調性 [1]）が満たされる．

5. 準 M$^\natural$ 凹関数への拡張

室田–塩浦 [5] の提案した準 M 凹関数の変種として，準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数が定義される．関数 $f : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が**準 M 凹関数**であるとは，$\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ であり，公理

(QM) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$:

$$f(x - \chi_u + \chi_v) \ge f(x) \text{ or } f(y + \chi_u - \chi_v) \ge f(y).$$

が成り立つことをいう [5]．本研究では**準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数**を準 M 凹関数の射影として定義する．すなわち，関数 $f : \mathbf{Z}^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数であるとは，次式で定義される $\hat{f} : \mathbf{Z}^{\{0\}\cup S} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が準 M 凹関数であることとする：

$$\hat{f}(z_0, z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z_0 = -|z|, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数は $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数よりも真に広い関数クラスである．また，準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹性は関数値の大小関係のみによって定まる性質であり，順序に関する $\mathrm{M}^\natural$ 凹性とみなせる．本研究では，定理 1 の結果が準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数の場合に対して拡張できることを示した．

定理 2. 任意の $k \in I \cup J$ に関して f_k が (US) を満たす準 $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数ならば，定理 1 の (1)–(5) が成立する．

参考文献

[1] A. Alkan and D. Gale, "Stable schedule matching under revealed preference," *J. Econom. Theory*, **112**, 289–306, 2003.

[2] A. Eguchi, S. Fujishige and A. Tamura, "A generalized Gale–Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model," *ISAAC2003, LNCS*, **2906**, 495–504, 2003.

[3] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, SIAM, 2003.

[4] K. Murota and A. Tamura, "New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities," *Discrete Appl. Math.*, **131**, 495–512, 2003.

[5] K. Murota and A. Shioura, "Quasi M-convex and L-convex functions: Quasi-convexity in discrete optimization," *Discrete Appl. Math.*, **131**, 467–494, 2003.

[6] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Mathe. Monthly*, **69**, 9–15, 1962.