

サプライ・チェーン最適化における 2次錐最適化の応用

久保 幹雄, 小林 和博, 武田 朗子, 田中 未来, 村松 正和

本稿ではサプライ・チェーン最適化における2次錐最適化の2つの応用を紹介する。1つ目はロットサイズ決定モデルに安全在庫の考え方を組み込んだものであり、2つ目は在庫方策決定モデルに対してロバスト最適化の考え方を取り入れたものである。これらはいずれも不確実性に対して頑健なサプライ・チェーンを設計するために重要な最適化モデルであり、そこでは(混合整数)2次錐最適化という強力なツールが用いられる。

キーワード: 数理最適化, 2次錐最適化, 混合整数2次錐最適化, サプライ・チェーン

1. はじめに

本稿の目的はサプライ・チェーン最適化における2次錐最適化の応用を紹介することである。サプライ・チェーン最適化には様々なモデルがあり、問題の構造を生かした様々な解法が提案されてきた[1, 2]。従来のサプライ・チェーン最適化における課題の1つに、需要の不確実性にうまく対応できるようなモデルを設計することが挙げられる。そこで本稿では実務において重要な2つの基本的なモデルを拡張し、2次錐制約を用いて不確実性を考慮したモデルを紹介する。なお、不確実性を考慮する方法としては安全在庫とロバスト最適化という2つの異なるアプローチを用いる。

安全在庫とは、需要の不確実性に対処するために余分に保持する在庫のことであり、特に需要量が正規分布に従うと確率変数であると仮定して用いられることが多い。ある製品の需要量が平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布に従うことを仮定しよう。標準正規分布の分布関数を Φ とすると、品切れを起こす確率を $1-p$ に抑えるためには、平均的な需要 μ に加えて $\Phi^{-1}(p)\sigma$

だけ多く在庫を持つ必要がある。この在庫のことを安全在庫という。また、 $\Phi^{-1}(p)$ を安全在庫係数といい、以下では z で表す。この安全在庫という考え方はサプライ・チェーンの世界ではよく用いられるものである。詳細は久保[1]などを参照されたい。

一方で、ロバスト最適化とは、不確実な事象が起こりうる集合をあらかじめ設定し、最悪の場合が起こることを想定して最適化を行う方法である。この方法はSoyster[3]のinexact LPを起源とし、Ben-Tal and Nemirovski[4]が線形最適化問題の係数が楕円体型の不確実性集合に含まれるものとしたロバスト最適化問題を2次錐最適化問題として定式化したことで広く知られるようになった。日本語による解説はあまり多くないが、入門としては[5, 10.3節]や[6]がわかりやすい。詳細については専門書[7]やサーベイ論文[8]などを参照されたい。

次節以降では、実務において重要な2つの基本的なサプライ・チェーン最適化モデルにおいて需要の不確実性を考慮する方法を考える。まず2節では安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデルを、つづく3節ではロバスト在庫方策決定モデルを扱う。これらはいずれも(混合整数)2次錐最適化問題として定式化できる。近年では、(混合整数)2次錐最適化問題をGurobiやCPLEXなどの汎用ソフトウェアで扱えるようになってきており、これらのソフトウェアを利用できる環境にあれば、手軽にこれらの最適化モデルを扱える(効率よく解けるかどうかは問題の規模や性質にもよるので一概にはなんとも言えない)。なお、混合整数2次錐最適化問題に関するサーベイとしては[9]が優れている。サプライ・チェーン最適化以外への応用例や解法などについてはそちらを参照されたい。また、最後

くほ みさお

東京海洋大学大学院海洋工学系

〒135-8533 東京都江東区越中島 2-1-6

こばやし かずひろ

海上技術安全研究所運輸・物流系

〒181-0004 東京都三鷹市新川 6-38-1

たけだ あきこ

東京大学大学院情報理工学系研究科

〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

たなか みらい

東京理科大学理工学部

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

むらまつ まさかず

電気通信大学大学院情報理工学研究科

〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

に 4 節で総括を行う。

2. 安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデル

ロットサイズ決定モデルとは、需要量が期によって変動するときの各期の生産量を定めるための最適化モデルであり、主に工場内における生産計画に適用を持つ。ここでは、長期にわたって工場で生産を行うとして、どのタイミングでどのくらい生産を行うと効率なのか考えてみよう。一度に大量に生産して生産の頻度を低くした場合、工場内で在庫を多く持つことになり在庫費用を増加させるが、段取り費用（生産の準備などにかかる固定費用）を削減することができる。このようなまとめて生産を行うことに起因する在庫のことをロットサイズ在庫と呼ぶ。ロットサイズ在庫にかかわる在庫費用と段取り費用との間には上述したトレードオフの関係があり、これを最適化するのがロットサイズ決定モデルである。このモデルは需要が確定的な場合のロットサイズ在庫を決めることを目的とした最適化モデルであり、需要の不確実性に対処するためには別の工夫が必要となる。実務の場面では、安全在庫量を別途計算して対処することが多いが、ロットサイズ在庫と安全在庫を同時に考えることによってさらなる費用の削減が期待できる。ここではこの問題を混合整数 2 次錐最適化を用いて解決することを試みる。

ここでは簡単のため、単一段階・単一品目（生産の段階が 1 つで、生産する製品が 1 品目）のロットサイズ決定モデルを扱う。まず 2.1 節では、安全在庫を考慮しない古典的な Wagner-Whitin のモデル [10] を紹介する。つづいて 2.2 節では、Wagner-Whitin のモデルに安全在庫を組み込んだモデルを提案し、2.3 節でロットサイズと安全在庫量を同時に決定する効果を検証するために行った計算実験の結果を示す。

2.1 Wagner-Whitin のモデル

Wagner-Whitin のモデル [10] は、以下に示す仮定の下で T 期にわたる工場の生産計画を決定する古典的な最適化モデルである：それぞれの期 $t \in \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ において、生産量の上限は M_t で、生産を行う場合は段取り費用 f_t と製品 1 個あたり c_t の生産費用がかかる。工場は在庫を持つことができるが、在庫量の上限は C_t で、製品 1 個あたり h_t の在庫費用がかかる。また、期 t の在庫量は需要量 d_t だけ減少する。この仮定の下、各期における生産量を最適化して総費用を最小化するためのモデルは、 t 期の期末の在庫量を表す変数を I_t 、 t 期における生産量を表す変数を x_t 、 t 期に

生産を行うときに 1、それ以外るときに 0 となる 0-1 整数変数を y_t とすると、次のような混合整数線形最適化問題として定式化できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) \quad (1.a)$$

$$\text{s.t. } I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (1.b)$$

$$I_0 = 0, \quad (1.c)$$

$$0 \leq I_t \leq C_t \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (1.d)$$

$$0 \leq x_t \leq M_t y_t \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (1.e)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (1.f)$$

ここで、目的関数 (1.a) は段取り費用、生産費用、在庫費用の計画期間全体にわたる総和を表す。また、制約 (1.b) は期 t における製品の在庫保存式であり、前期からの繰り越しの在庫量 I_{t-1} に生産量 x_t を加え、需要量 d_t を減じたものが来期に持ち越す在庫量 I_t であることを意味する。制約 (1.c) は初期在庫量が 0 であることを、制約 (1.d) は各期の在庫量が 0 以上 C_t 以下であることを表している。制約 (1.e) は、生産を行わない期における生産量が 0 であり、生産を行う期 t においては生産量が 0 以上 M_t 以下であることを保証するための式である。なお、 I_t の上限制約は x_t の上限制約に変換できるので、通常 Wagner-Whitin のモデルという I_t の上限制約のないものを指すことが多い [2]。

各期 t の需要量 d_t の不確実性を考慮して Wagner-Whitin のモデル (1) を用いる際には、 d_t として需要量の予測値を用い、予測の不確実性をなんらかの方法で補うことになる。例えば、期 t の需要量 d_t に平均値 \bar{d}_t を用いてこのモデル (1) を解き、得られた生産間隔に対応した安全在庫量を別途計算したり、需要が定常であると仮定して経済発注量モデルを適用することで安全在庫量を別途計算するなどといったことがなされる。

2.2 安全在庫を考慮したモデル

生産のロットサイズと同時に工場の出口で保持される安全在庫の量を考慮した最適化モデルを考えよう。このようなモデルには、安全在庫量の下限と上限を与えてその制約の下でロットサイズを最適化するもの [2] や、確率計画のように需要過程を表すシナリオ木を与えたもの [11] がある。ここでは、ロットサイズ決定モデルで定まる生産間隔に応じて動的に安全在庫量を変化させるモデルを考えよう。

以下では、各期 t の需要がそれぞれ独立に平均 \bar{d}_t 、標準偏差 σ_t の正規分布に従うと仮定する。このとき、

生産を行う期 t_0 から次に生産を行う期 t_1 までの需要量の総和の標準偏差は $\sqrt{\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sigma_t^2}$ となる。そのため、この期間の安全在庫量はこの値に安全在庫係数 z を掛けたものとなる。したがって、 SS_t を生産を行う期 t において安全在庫のために新たに生産する製品の量を表す変数とすると、各期 s において追加で生産する安全在庫量を表現するための制約は、期 s で生産した量によって期 t ($\geq s$) の需要がまかなわれるときに 1、そうでないときに 0 をとる 0-1 整数変数 X_{st} を用いた次の等式で表される：

$$SS_s = z \sqrt{\sum_{t=s}^T \sigma_t^2 X_{st}}. \quad (2)$$

これを用いると、安全在庫を考慮した単一段階・単一品目の動的ロットサイズ決定モデルは次のような混合整数 2 次錐最適化問題として定式化できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) \quad (3.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (1.c), (1.d), (1.e), (1.f), \quad (3.b)$$

$$I_t = I_{t-1} + x_t - \bar{d}_t \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (3.c)$$

$$0 \leq SS_t \leq C_t y_t \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (3.d)$$

$$X_{st} \leq y_s \quad (s, t \in \mathcal{T} : s \leq t), \quad (3.e)$$

$$I_s \geq \sum_{t=s+1}^T \bar{d}_t X_{st} + SS_s \quad (s \in \mathcal{T}), \quad (3.f)$$

$$\sum_{s=1}^t X_{st} = \begin{cases} 1 & (\bar{d}_t > 0) \\ 0 & (\bar{d}_t = 0) \end{cases} \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (3.g)$$

$$SS_s \geq z \sqrt{\sum_{t=s}^T \sigma_t^2 X_{st}^2} \quad (s \in \mathcal{T}), \quad (3.h)$$

$$X_{su} \leq X_{st} \quad (s, t, u \in \mathcal{T} : s < t < u), \quad (3.i)$$

$$X_{st} \in \{0, 1\} \quad (s, t \in \mathcal{T} : s \leq t). \quad (3.j)$$

ここで、制約 (3.d) は生産を行わない期は新たに安全在庫を生産することができないことを意味する。制約 (3.e) は期 t の需要を期 s の生産でまかなうためには期 s で段取りを行う必要があることを表す。制約 (3.f) は在庫量が将来の確定的な需要をまかなうためのロットサイズ在庫量と新しく生産する安全在庫量の和以上であることを要請するものである。制約 (3.g) は生産は異なる期に分けて行うことはできないこと、すなわち期 t の需要はすべてそれ以前のいずれか 1 つの期で生産されることを表す。この条件は実務ではし

ばしば現れる条件であり、単一ソース条件と呼ばれることもある。制約 (3.h) は 0-1 整数変数が 2 乗しても値が変わらないことを利用して式 (2) を 2 次錐制約として表現したもので、安全在庫量が安全在庫係数と需要の標準偏差の積以上であることを要請する。この不等式は最適解においては等号が成立し、結果として式 (2) が満たされる。制約 (3.i) は、期 s の段取りで期 u の需要をまかなう際には s と u に挟まれた期 t の需要も期 s に生産する必要があることを表す。

なお、ロットサイズ決定問題は古くから研究がなされており、多くの拡張が存在する [1]。拡張の 1 つに多段階・多品目のロットサイズ決定モデルがあり、上述のモデル (3) も多段階・多品目のモデルに容易に拡張できる。また、施設配置問題で安全在庫を考慮することは [12~14] などで行われており、モデル (3) は Atamtürk et al. [12] の定式化に近い。

2.3 計算実験

ロットサイズと安全在庫量を同時に最適化する効果を検証するために、それぞれのモデルで複数の問題例を解き、総費用を比較する計算実験を行った。なお、実験で用いた問題例は以下に示す方法で生成した。

2.3.1 問題例

各期 t の需要量 d_t は、以下のように設定した平均 \bar{d}_t および標準偏差 σ_t をパラメータを持つ正規分布 $N(\bar{d}_t, \sigma_t^2)$ にそれぞれ独立に従うものとした。需要量の平均 \bar{d}_t は

$$\bar{d}_t = \begin{cases} \alpha \bar{d}^w & (t \bmod 7 = 5), \\ \beta \bar{d}^w & (t \bmod 7 = 6), \\ \bar{d}^w & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とした。これは、土曜日と日曜日の需要が平均的に見れば平日の需要 \bar{d}^w に比べてそれぞれ α 倍、 β 倍であるというモデルになっている。実験では計画期間の長さを $T = 7, 21, 35, 49$ のいずれかであるものとし、 $\bar{d}^w = 50$ 、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 4$ とした。また、需要量の標準偏差は期によらず $\sigma_t = 10$ とした。

製品の製造にかかる段取り費用は $f_t = 100$ 、製品 1 個あたりの製造費用は $c_t = 1$ 、製品 1 個 1 期あたりの在庫費用は $h_t = 1$ とした。また、製造量および在庫量の上限は γ をパラメータとして $C_t = M_t = \gamma \sum_{i=1}^T \bar{d}_i / T$ とした。これらはいずれも期によらず一定である。なお、実験では $\gamma = 2, 3$ のいずれかであるものとし、結果を比較した。

2.3.2 実験の手順および結果

今回の計算実験は以下に示す手順で行った：

1. まず、以下に示す 2 つのモデルについてパラメータを $\gamma = 2, 3$, $T = 7, 21, 35, 49$ と動かし、それぞれについて問題例を生成した：

- Wagner–Whitin のモデル (1) における需要量 d を平均値 \bar{d} で置き換えたもの、
- 安全在庫を考慮したロットサイズ決定モデル (3).

2. 次に、それぞれの問題例を下記に示す計算環境で解いた：

- CPU: 2.3 GHz Intel Core i7 CPU,
- RAM: 8 GB,
- OS: Mac OS X 10.9.4,
- 最適化ソフトウェア：CPLEX 12.6.

3. Wagner–Whitin のモデルについては、最適解における生産間隔に対応する安全在庫量を計算し、それを生産・保管するための費用を最適値に加えることで、安全在庫を加味した総費用とした（以下、これを簡便法と呼ぶ）¹。安全在庫を考慮したモデルについては最適値をそのまま総費用とした。

結果を表 1 に示す。ここで簡便法の制約違反度とは、簡便法において安全在庫を別途計算した際に生産量および在庫量の上限制約を違反した度合いの総和を意味する²。

まずは $\gamma = 2$ のときの結果を見てみよう。この場合はすべての T について、安全在庫を考慮したモデルのほうが総費用が小さくなったうえ、簡便法では安全在庫量を追加で生産することによって生産量の上限制約を違反している。

次に $\gamma = 3$ のときの結果を見てみよう。 $T = 7$ のときは安全在庫を考慮したモデルのほうが総費用が小さくなった。これは生産量と安全在庫量を同時に最適化した効果と見ることができる。一方で $T = 21, 35, 49$ のときは簡便法のほうが総費用が小さくなった。しかしながら、安全在庫のために製品を追加で生産することにより生産量の上限制約を違反しており、実際には上

限を超えて生産することに起因する罰金を支払うことになる。この例では、罰金が生産にかかる費用の 10 倍程度であるとしただけでも、安全在庫を考慮したモデルを用いて計算した総費用より大きくなってしまう。このように、安全在庫を別途考慮することは容易ではないことがある。

3. ロバスト在庫方策決定モデル

在庫方策決定モデルとは、需要量が期によって変動するときの各期の発注量を定めるための最適化モデルであり、主に小売店における発注計画に応用を持つ。このモデルは前節で扱ったロットサイズ決定モデルと類似するモデルだが、段取り費用を考えずに品切れを考える点が異なる。近年では発注は半自動的に行われることが多く、発注にかかるコストは無視できる場合が多い。一方、商品が品切れした際には、追加の費用を支払うことにより顧客が再び商品が到着するまで待ってくれる場合（バックオーダー）と、需要が消滅してしまう場合（品切れ、販売機会の逸失）が考えられる。ここで、前者にかかる費用のことをバックオーダー費用と呼ぶ。このようなモデルは古典的なオペレーションズ・リサーチのモデルの 1 つであり、多くの（主に理論的な）研究がなされてきた [1]。しかし、実際の問題への適用を考える際には多くの付加条件を考慮する必要がある、需要の不確実性を確率分布として与えたモデル（多くは動的計画に基づく）はいわゆる次元の呪いによって適用が困難になる [1]。ここでは、ロバスト最適化のフレームワークを用いたアプローチを紹介する。このアプローチの特色は、実務であらわれる様々な付加条件に容易に対処できる点である。

ここでは簡単のため、品切れが起こった場合にすべての需要がバックオーダーされると仮定した在庫方策決定モデルを考える（実際には、需要の一部が逸失し、一部がバックオーダーされるという場合もある）。まず 3.1 節では在庫方策決定モデルの定式化を紹介する。次に 3.2 節でこのモデルにロバスト最適化の考え方を導入し、不確実性に対して頑健なモデルを導く。さらに 3.3 節では 3.1 節のモデルに変更を施すことで、将来の生産量をそれまでの需要量を知ったうえで決めることができるようなモデルに変更する。次に 3.4 節でこのモデルに対するロバストモデルを導く。なお、ロバスト最適化では不確実な事象が起こりうる集合（不確実性集合）の取り方が重要である。今回は一貫して楕円体型の不確実性集合を採用するが、これは不確実性が多変量正規分布に従うものと仮定することに相当

¹ 具体的な手順は以下のとおり：モデル (1) の最適解を $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{I}^*)$ 、 $y_t^* = 1$ となっている t を $t_1 < \dots < t_k$ とし、便宜上 $t_{k+1} = T + 1$ とする。品切れを起こさない確率をモデル (3) を解いて得られた結果と同程度にするためには、期 t ($t_i \leq t \leq t_{i+1} - 1$) において $SS_t = z \sqrt{\sum_{s=t_i}^{t_{i+1}-1} \sigma_s^2}$ の安全在庫量が追加で必要になる。そのため、各期 t における生産量と在庫量を $x_t = x_t^* + SS_t - SS_{t-1}$ 、 $I_t = I_t^* + SS_t$ として目的関数に代入したものを総費用とした。

² 具体的には $\sum_{t \in T} (\max\{-x_t, 0\} + \max\{x_t - M_t, 0\} + \max\{-I_t, 0\} + \max\{I_t - C_t, 0\})$ 。

表 1 総費用および容量制約度の比較

T	$\gamma = 2$			$\gamma = 3$		
	モデル (3)	簡便法		モデル (3)	簡便法	
	総費用	総費用	制約違反度	総費用	総費用	制約違反度
7	1351.84	1374.34	21.49	1308.84	1331.34	0.00
21	4022.63	4090.18	10.08	3864.51	3850.88	13.62
35	6693.41	6805.90	41.65	6420.17	6392.92	27.25
49	9364.20	9521.68	51.74	8975.83	8934.96	40.87

する。3.5 節ではこれらの関係を簡単に紹介する。さらに、3.6 節でロバスト最適化の効果を検証するために行った計算実験の結果を示す。

3.1 静的非ロバストモデル

ここでは Bertsimas–Thiele のモデル [15] から発注費と固定費を除いたモデルを紹介する。このモデルは、以下に示す仮定の下で T 期にわたる発注の計画を決定するものである：それぞれの期 $t \in \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ において、在庫を持つ場合は商品 1 個あたり h_t の在庫費用が、バックオーダーされる場合は b_t のバックオーダー費用がかかる。また、期 t における発注量には上限 M_t があり、期 t において在庫量は需要量 d_t だけ減少する。この仮定の下で計画期間全体にわたる在庫費用とバックオーダー費用の総和を最小化するような各期の発注量を決定するモデルは、期 t における発注量を表す変数を x_t 、期 t における在庫費用とバックオーダー費用のうち発生するほうを表す変数を y_t とすると、以下のような線形最適化問題として定式化できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (4.a)$$

$$\text{s.t. } y_t \geq h_t \sum_{s=1}^t (x_s - d_s) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (4.b)$$

$$y_t \geq b_t \sum_{s=1}^t (d_s - x_s) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (4.c)$$

$$0 \leq x_t \leq M_t \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (4.d)$$

ここで、式 (4.b)–(4.c) は各 $t \in \mathcal{T}$ について

$$y_t \geq \max \left\{ h_t \sum_{s=1}^t (x_s - d_s), b_t \sum_{s=1}^t (d_s - x_s) \right\}$$

と等価であり、最適解において y_t は期 t における在庫費用とバックオーダー費用のうち発生するものに一致することに注意されたい。以下では、このモデルのことを後述するロバストモデルや適応型モデルと対比させる

ために静的非ロバストモデルと呼ぶ。なお、この線形最適化問題は、すべての期 $t \in \mathcal{T}$ において $0 \leq x_t \leq M_t$ が成り立つとき、すべての期 $t \in \mathcal{T}$ において $x_t = d_t$ とするのが最適解となるなどといった特徴を持つ。

各期 t の需要 d_t の不確実性を考慮して最適化を行うのであれば、ロットサイズ決定モデルのときと同様に 2 次錐制約と 0-1 整数変数を導入して安全在庫も同時に決定するモデルを考えることもできる。しかしながら、今回の場合、元のモデル (4) が単なる線形最適化問題に過ぎないのに対し、このモデルは混合整数 2 次錐最適化問題となり、いささか難しくなりすぎるきらいがある。以下では、ロバスト最適化の考え方をを用いて不確実性に対処する方法を考えよう。

3.2 静的ロバストモデル

ロバスト最適化では、不確実性を持つ定数ベクトル (今回の場合は需要量ベクトル $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_T)^T$) が不確実性集合 \mathcal{U} に含まれるものとし、そのうち最悪のケースを想定して最適化を行う。すなわち、次のような問題を考える：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (5.a)$$

$$\text{s.t. } (4.d), \quad (5.b)$$

$$y_t \geq \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} h_t \sum_{s=1}^t (x_s - d_s) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (5.c)$$

$$y_t \geq \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} b_t \sum_{s=1}^t (d_s - x_s) \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (5.d)$$

以下では不確実性集合として楕円体型の不確実性集合 $\mathcal{U} = \{\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{R}\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$ を用いる (ベクトル $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^T$ と行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ の取り方については 3.5 節で述べる)。このとき、 $\mathbf{e}_t \in \mathbb{R}^T$ を第 t 成分が 1、それ以外の成分が 0 であるようなベクトルとして、 $\mathbf{1}_t = \sum_{s=1}^t \mathbf{e}_s$ とすると、制約 (5.c) は各 $t \in \mathcal{T}$ について

$$y_t \geq h_t \left[\sum_{s=1}^t (x_s - \bar{d}_s) - \min_{\mathbf{u}: \|\mathbf{u}\| \leq 1} \mathbf{1}_t^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \right]$$

と書ける。この制約は次のように書き換えることができる：

$$y_t \geq h_t \left[\sum_{s=1}^t (x_s - \bar{d}_s) + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{1}_t\| \right].$$

制約 (5.d) についても同様の変形を行うとロバスト最適化モデル (5) は次の線形最適化問題に帰着できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (6.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (4.d), \quad (6.b)$$

$$y_t \geq h_t \left[\sum_{s=1}^t (x_s - \bar{d}_s) + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{1}_t\| \right] \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (6.c)$$

$$y_t \geq b_t \left[\sum_{s=1}^t (\bar{d}_s - x_s) + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{1}_t\| \right] \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (6.d)$$

3.3 適応型非ロバストモデル

長期にわたる意思決定では、将来の意思決定において、それまでに確定した事象を踏まえて意思決定を行うことができる。実際、期 t における発注量 x_t は過去の需要量の確定値を知ったうえで決定することができる。これはすなわち x_t が過去の需要量についてのなんらかの関数であることを意味する。Ben-Tal et al. [16] は期 t における発注量が過去の需要量の履歴のアフィン関数

$$x_t = \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} d_u + z_{t0} \quad (7)$$

であることを仮定した適応型モデルがロバスト最適化において有効であると述べている。ここで $\mathcal{I}_t \subset \{1, \dots, t\}$ は過去の需要が明らかになっている期の添字を表す集合であり、例えば Ben-Tal et al. [16] では過去の需要が θ 期だけ遅れて明らかになる状況を想定して、 $\mathcal{I}_t = \{1, \dots, t - \theta\}$ と設定している。前述した静的なモデル (4) における x_t がアフィン関数 (7) で表されるものとしたモデルは次のように定式化できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (8.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (4.b), (4.c), (4.d), \quad (8.b)$$

$$x_t = \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} d_u + z_{t0} \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (8.c)$$

このモデルを以下では適応型モデルと呼ぶ。ただし、静的モデル (4) の実行可能解から適応型モデル (8) の実行可能解を構成することと、その逆が可能であることから、これらの最適値は一致することに注意されたい (後述するロバストモデルでは差が生じうる)。

適応型モデル (8) に対応したロバスト最適化問題を考える際の表記を簡単にするために、以下では次のベクトル $\mathbf{v}_t, \mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^T$ を用いる：

$$\mathbf{v}_t = \sum_{u \in \mathcal{I}_t} z_{tu} \mathbf{e}_u \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (9.a)$$

$$\mathbf{w}_t = \sum_{s=1}^t (\mathbf{e}_s - \mathbf{v}_s) \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (9.b)$$

さらに、 $\mathbf{z}_0 = (z_{10}, \dots, z_{T0})^\top \in \mathbb{R}^T$ とすると問題 (8) は次のように書ける：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (10.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (9.a), (9.b), \quad (10.b)$$

$$y_t \geq h_t (\mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0 - \mathbf{d}^\top \mathbf{w}_t) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (10.c)$$

$$y_t \geq b_t (\mathbf{d}^\top \mathbf{w}_t - \mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (10.d)$$

$$0 \leq \mathbf{d}^\top \mathbf{v}_t + z_{t0} \leq M_t \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (10.e)$$

3.4 適応型ロバストモデル

静的モデルのときと同様に、適応型モデル (10) に対応するロバスト最適化問題を考えよう。需要ベクトル \mathbf{d} が不確実性集合 \mathcal{U} に含まれるものとしたロバスト最適化モデルは次のように書ける：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (11.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (9.a), (9.b), \quad (11.b)$$

$$y_t \geq \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} h_t (\mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0 - \mathbf{d}^\top \mathbf{w}_t) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (11.c)$$

$$y_t \geq \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} b_t (\mathbf{d}^\top \mathbf{w}_t - \mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (11.d)$$

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} \mathbf{d}^\top \mathbf{v}_t + z_{t0} \geq 0 \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (11.e)$$

$$\max_{\mathbf{d} \in \mathcal{U}} \mathbf{d}^\top \mathbf{v}_t + z_{t0} \leq M_t \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (11.f)$$

この適応型ロバストモデル (11) は前述した 2 つのモデルを包含していることに注意されたい。実際、 $U = \{\bar{\mathbf{d}}\}$ とすると静的非ロバストモデル (4) において $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}$ としたものとなる。また、 $\mathcal{I}_t = \emptyset$ とすると静的ロバストモデル (5) となる。このことから、適応型ロバストモデル (11) はロバストモデル (5) に比べて悲観的すぎない最適解を持つ可能性があるといえる。静的なモデルのときと同様に、楕円体型の不確実性集合 $U = \{\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{R}\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$ を採用し、同様の変形を施すと、適応型ロバストモデル (11) は次の 2 次錐最適化問題に帰着できる：

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} y_t \quad (12.a)$$

$$\text{s.t.} \quad (9.a), (9.b), \quad (12.b)$$

$$y_t \geq h_t(\mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{w}_t + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{w}_t\|) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (12.c)$$

$$y_t \geq b_t(\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{w}_t - \mathbf{1}_t^\top \mathbf{z}_0 + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{w}_t\|) \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (12.d)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{v}_t - \|\mathbf{R}^\top \mathbf{v}_t\| + z_{t0} \geq 0 \quad (t \in \mathcal{T}), \quad (12.e)$$

$$\bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{v}_t + \|\mathbf{R}^\top \mathbf{v}_t\| + z_{t0} \leq M_t \quad (t \in \mathcal{T}). \quad (12.f)$$

3.5 楕円体型不確実性集合と多変量正規分布との関係

ここまでで用いた楕円体型の不確実性集合は多変量正規分布と密接な関係がある。 n 次元確率変数 \mathbf{x} が平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ 、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布に従うとき、密度関数の等高線は楕円体 $\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq c\}$ の境界となる。ここで、 $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ は自由度 n の χ^2 分布に従うことから、 $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, c)$ となる確率は自由度 n の χ^2 分布の分布関数 F_n を用いて $F_n(c)$ と書ける。このことを用いると、確率変数 \mathbf{x} が確率 p で楕円体 $\mathcal{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, F_n^{-1}(p)) = \{\boldsymbol{\mu} + \sqrt{F_n^{-1}(p)}\mathbf{C}\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$ に含まれることを示すことができる。ここで \mathbf{C} は $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^\top \mathbf{C}$ を満たすなんらかの行列 (Cholesky 分解や行列の平方根など) である。したがって、これまで用いてきた楕円体型不確実性集合 U の $\bar{\mathbf{d}}$ 、 \mathbf{R} としそれぞれ $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\sqrt{F_T^{-1}(p)}\mathbf{C}$ を用いると、 U に確率的な解釈を与えることができる。

3.6 計算実験

静的非ロバストモデル (4) と楕円体型の不確実性集合を用いた静的ロバストモデル (6) および適応型ロバ

スト最適化モデル (12) の性能を比較するために、複数の問題例を解き、得られた結果を用いてシミュレーションを行った。この計算実験の具体的な目的は、ロバスト最適化を行うことにより、不確実性に対して頑健な解が得られることを確認することと、静的ロバストモデルと適応型ロバストモデルとの間で結果にどの程度の差が出るかを調べることの 2 つである。

3.6.1 問題例

需要量ベクトル \mathbf{d} が従う確率分布は、以下のように設定した平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ および分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ をパラメータを持つ多変量正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とした。

需要量の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_T)^\top$ は 2.3 節における $\bar{\mathbf{d}}$ と同様に

$$\mu_t = \begin{cases} \alpha\mu^w & (t \bmod 7 = 5), \\ \beta\mu^w & (t \bmod 7 = 6), \\ \mu^w & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とした。実験では計画期間の長さを $T = 7, 21, 35, 49$ のいずれかであるものとし、 $\mu^w = 50$ 、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 4$ とした。

各期の需要量の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は以下に示す 3 重対角行列とした：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} v & c & & & & & \\ c & v & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & v & c \\ & & & & & c & v \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^T.$$

これは、 $c > 0$ のときその日の需要が多ければ次の日の需要も多くなりやすいというモデルに、 $c < 0$ のときその日の需要が多ければ次の日の需要は少なくなりやすいというモデルになっている。なお、実験では $v = 100$ 、 $c = -50$ とした。

今回の実験の目的はロバスト最適化の性能を評価することにあるので、需要量が従う確率分布は既知として実験を行った。すなわち $\bar{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\mu}$ 、 $\mathbf{R} = \sqrt{F_T^{-1}(p)}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ とした。なお、実験では $p = 0.9$ とした。

また、適応型ロバストモデルにおける \mathcal{I}_t は、前日までの情報をすべて用いる $\mathcal{I}_t^a = \{1, \dots, t-1\}$ と直近の 1 週間分の情報のみを用いる $\mathcal{I}_t^w = \{t-7, \dots, t-1\} \cap \mathcal{T}$ のいずれかであるものとし、結果を比較した。

製品 1 個 1 期あたりの在庫費用は $h_t = 3$ 、製品

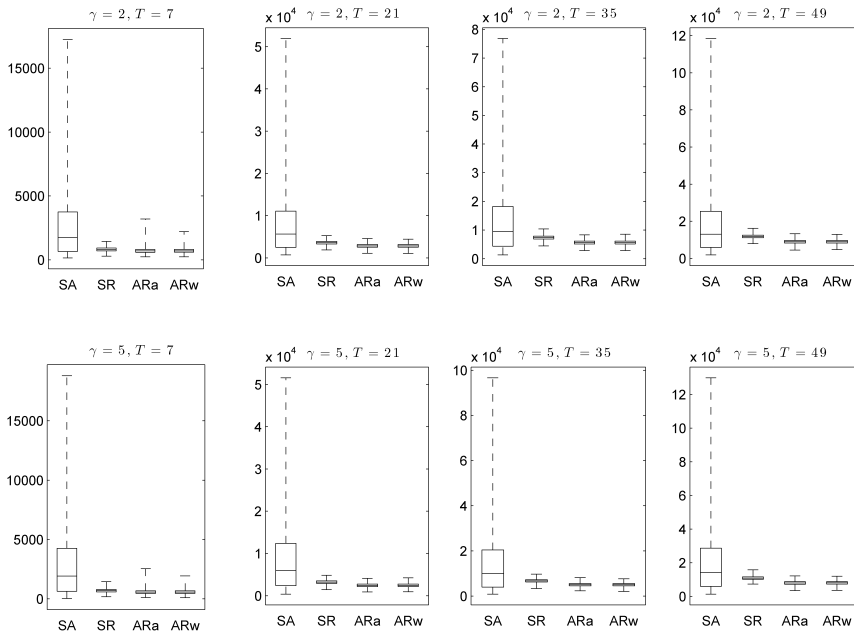


図 1 シミュレーションにより得られた総費用の箱ひげ図

1 個 1 期あたりのバックオーダー費用は $b_t = 100$ とした。また、発注量の上限は γ をパラメータとして $M_t = \gamma \sum_{i=1}^T \mu_i / T$ とした。これらはいずれも期によらず一定である。なお、実験では $\gamma = 2, 5$ のいずれかであるものとし、結果を比較した。

3.6.2 手順および結果

今回の計算実験は以下に示す手順で行った：

1. まず、以下に示す 4 つのモデルについてパラメータを $\gamma = 2, 5$, $T = 7, 21, 35, 49$ と動かし、それぞれについて問題例を生成した：
 - 静的非ロバストモデル (4) における需要量 d を平均値 μ で置き換えたもの、
 - 静的ロバストモデル (5) で $\mathcal{U} = \{\mu + \sqrt{F_T^{-1}(p)} \Sigma^{1/2} \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$ としたもの、
 - 適応型ロバストモデルで $\mathcal{U} = \{\mu + \sqrt{F_T^{-1}(p)} \Sigma^{1/2} \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$, $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^a$ としたもの、
 - 適応型ロバストモデルで $\mathcal{U} = \{\mu + \sqrt{F_T^{-1}(p)} \Sigma^{1/2} \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$, $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^w$ としたもの。
2. 次に、それぞれの問題例を 2.3 節と同じ計算環境で解き、各期における最適発注量を求めた。
3. 最後に、それぞれの問題例に対応する需要量ベクトル $\mathbf{d} \sim N(\mu, \Sigma)$ を擬乱数で 10,000 個生成し、2 で求めた最適発注量を用いたときにかかる総費用を計算した。

結果を図 1 に示す。上段と下段はそれぞれ $\gamma = 2, 5$ としたときの、左から順に $T = 7, 21, 35, 49$ としたときの箱ひげ図である。それぞれの箱ひげ図では、左から順に静的非ロバストモデルで $\mathbf{d} = \mu$ としたもの (SA)、静的ロバストモデル (SR)、適応型ロバストモデルにて $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^a$ としたもの (ARa)、適応型ロバストモデルにて $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^w$ としたもの (ARw) の結果が示されている。ひげの最も上が最大値、最も下が最小値を、箱の最も上が第 3 四分位点、最も下が第 1 四分位点を、箱の中央の線が中央値を表す。

まず、非ロバストモデルとロバストモデルを比較すると、ロバストモデルの方が最大値、中央値、四分位点のすべてにおいて小さく、頑健な結果が得られているといえる。

また、ロバストモデルのうち、静的モデルと適応型モデルで最大値を比較すると、 $T = 7$ のときを除いて適応型のほうが小さく、中央値および四分位点を比較すると、すべての場合において適応型モデルのほうが小さかった。これは、適応型モデルが“過去の情報をこれからの意思決定に使うことで悲観的すぎない意思決定ができる”というモチベーションに基づいていることから妥当な結果といえる。

なお、適応型モデルにおいて $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^a$ とした場合の結果と $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t^w$ とした場合の結果との間に大きな差は見られなかった。そのため、今回の場合はその日の需要は直近 1 週間分の需要の関数で表されるとしても十

分に良い結果が得られたといえる。

4. おわりに

本稿ではロットサイズ決定モデル (1) と在庫方策決定モデル (4) を紹介し、それぞれのモデルで不確実性を考慮する方法を述べた。具体的には、前者においては生産間隔に合わせた安全在庫を保持する方法を、後者においては最悪の場合を最適化するロバスト最適化の考え方を導入した。さらに、これらのモデルがいずれも (混合整数) 2 次錐最適化問題として表現できることを見た。本稿で扱った応用例はサプライ・チェーン最適化に現れるものに限られているが、それでも 2 次錐最適化が強力なツールであることを感じていただければ幸いである。

なお、ロットサイズ決定モデル (1) と在庫方策決定モデル (4) は最適化問題としてはよく似ている。実際、モデル (4) において $I_t = \sum_{s=1}^t (x_s - d_s)$ という変数を導入すると、モデル (1) において、

- 製造費用を考えるのをやめて ($f_t = c_t = 0$ として)、
- バックオーダーを許して (制約 $0 \leq I_t \leq C_t$ を外して目的関数における在庫費用の部分を $\sum_{t \in T} h_t \max\{I_t, 0\}$ と書き換えて)、
- バックオーダーの費用を考えた (目的関数に $\sum_{t \in T} b_t \max\{-I_t, 0\}$ を加えた)

ものになる。2 次錐最適化という強力なツールを得たいま、私たちは統一的な視点からこれらを扱い、より優れたモデルを構築することができるかもしれない。

参考文献

- [1] 久保幹雄, 『サプライ・チェーン最適化ハンドブック』, 朝倉書店, 2007.
- [2] Y. Pochet and L. A. Wolsey, *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, 2006.
- [3] A. L. Soyster, “Convex programming with set-

inclusive constraints and applications to inexact linear programming,” *Operations Research*, **21**, 1154–1157, 1973.

- [4] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, “Robust convex optimization,” *Mathematics of Operations Research*, **23**, 769–805, 1998.
- [5] 久保幹雄, ジョア・ベドロ・ベドロソ, 村松正和, アドル・レイス, 『あたらしい数理最適化—Python 言語と Gurobi で解く—』, 近代科学社, 2012.
- [6] 武田朗子, “不確実性下での最適化—ロバスト最適化を中心に—,” *オペレーションズ・リサーチ*, **51**, 420–423, 2006.
- [7] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton University Press, 2009.
- [8] D. Bertsimas, D. B. Brown and C. Caramanis, “Theory and applications of robust optimization,” *SIAM Review*, **53**, 464–501, 2011.
- [9] H. Y. Benson and Ü. Sağlam, “Mixed-integer second-order cone programming: A survey,” *INFORMS TutORials in Operations Research Vol. 10*, H. Topaloglu (ed.), INFORMS, pp. 13–36, 2013.
- [10] H. M. Wagner and T. M. Whitin, “Dynamic version of the economic lot sizing model,” *Management Science*, **5**, 89–96, 1959.
- [11] S. Küçükyavuz, “Mixed-integer optimization approaches for inventory management,” *INFORMS TutORials in Operations Research Vol. 8*, J. Geunes (ed.), INFORMS, pp. 90–105, 2011.
- [12] A. Atamtürk, G. Berenguer and Z.-J. M. Shen, “A conic integer programming approach to stochastic joint location-inventory problems,” *Operations Research*, **60**, 366–381, 2012.
- [13] L. Özsen, C. R. Coullard and M. S. Daskin, “Capacitated warehouse location model with risk pooling,” *Naval Research Logistics*, **55**, 295–312, 2008.
- [14] Z.-J. M. Shen, C. R. Coullard and M. S. Daskin, “A joint location-inventory model,” *Transportation Science*, **37**, 40–55, 2003.
- [15] D. Bertsimas and A. Thiele, “A robust optimization approach to supply chain management,” *Proceedings of 10th Integer Programming and Combinatorial Optimization*, D. Bienstock and G. Nemhauser (eds.), Springer, pp. 86–100, 2004.
- [16] A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer and A. Nemirovski, “Adjustable robust solutions of uncertain linear programs,” *Mathematical Programming*, **99**, 351–376, 2004.