

2次錐計画の構造力学への応用

寒野 善博

構造物の最適設計や弾塑性解析などの構造力学・計算力学における諸問題に対して、しばしば2次錐計画が用いられている。本稿では、それらの問題がどのようにして2次錐計画にモデル化されるかを紹介し、2次錐計画を用いない解法と比べてどのような利点があるのかについて解説する。

キーワード：2次錐計画，2次錐相補性問題，構造最適化，弾塑性問題，張力構造，接触問題

1. はじめに

構造物の最適設計や極限解析，接触問題などにおけるさまざまな問題は，最適化問題として定式化される。そのなかには2次錐計画に自然に帰着できる問題もあり，注目を集めている。本稿では，それらの問題がどのようにして2次錐計画にモデル化されるかを紹介する。

2節で取り上げるトラス構造のコンプライアンス最小化問題は，構造最適化における最も基本的な問題の一つである。3節で触れる塑性論では，古くから凸解析の概念が広く用いられてきた [1]。たとえば，関連流れ則ではなめらかではない曲面（降伏曲面）の法線という概念を必要とするが，これは劣勾配を用いると自然に定式化される。近年いくつかの降伏曲面が2次錐制約を用いて表せることが明らかになり，これに伴って極限解析やシェイクダウン解析と呼ばれる塑性論の問題に2次錐計画が盛んに用いられている。4節では，張力構造の一種であるケーブルネットの釣合い形状を求める問題が，2次錐計画を用いて解けることを述べる。5節では，Coulomb 摩擦則を取り上げ，これが2次錐上の相補性条件の形で表せることを説明する。

2. コンプライアンス最小化問題

構造物の最適設計における基本的な問題の一つに，コンプライアンス最小化問題と呼ばれる問題がある。特に，トラス構造のコンプライアンス最小化問題は2次錐計画問題として定式化できることが知られている [2]。

いくつかの直線状の棒材を，回転を拘束せずに接合してできる構造物を，トラスという。棒材を部材と呼び，接合部を節点と呼ぶ。図1では，節点を白丸，部

材を直線で示している。三角で示した節点は地面に固定されており，支点と呼ばれる。トラスの部材は，材軸方向の力（軸力）のみを伝達する。

トラスの最適設計では，多くの場合，まず図1(a)のように多くの部材を考える。次に，各部材の断面積を設計変数として最適化を行い，断面積がゼロになった部材を取り除くことで図1(b)のような設計解を得る。

トラスの節点の変位をすべて集めて並べたベクトルを $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ で表す。ただし， d は節点変位の自由度の総数である。同様に，節点に作用する外力を $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ で表す。部材 i の伸び e_i は，微小変形を仮定すると，定ベクトル $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$ を用いて $e_i = \mathbf{b}_i^\top \mathbf{u}$ と表せる。さらに，部材の断面積を x_i ，自然長を l_i ，ヤング率を E で表す。このとき，行列

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{E x_i}{l_i} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^\top \quad (1)$$

を剛性行列という。剛性行列は，半正定値対称行列で

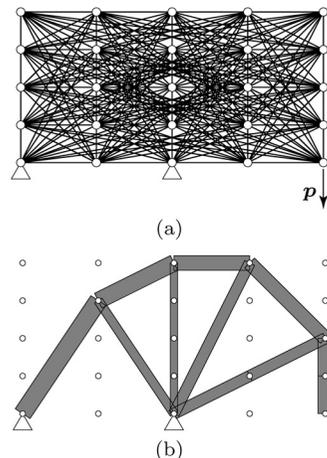


図1 トラスの最適設計の例 ((a) 問題設定と (b) 最適解)

かんの よしひろ
東京大学大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

ある。釣合い状態における変位は、線形方程式

$$K(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2)$$

の解として得られる。コンプライアンスは、断面積 \mathbf{x} の関数として、

$$\pi(\mathbf{x}) = \sup\{2\mathbf{p}^\top \mathbf{u} - \mathbf{u}^\top K(\mathbf{x})\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\} \quad (3)$$

で定義される。

(3) の右辺の目的関数の停留条件が (2) であることに注意すると、コンプライアンスは釣合い状態における変位 $\hat{\mathbf{u}}$ を用いて $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^\top \hat{\mathbf{u}}$ とも表せる。つまり、コンプライアンスは釣合い状態に至るまでに荷重 \mathbf{p} がなした仕事に等しい。たとえば、図 1(a) の例のように外力が一つの節点のみに作用する場合には、コンプライアンスはその外力の方向の節点変位の大きさに比例する。このことから、コンプライアンスは構造物の静的な柔性の指標とみなせる。そこで、最適設計問題は

$$\min_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}) \quad (4a)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m l_i x_i \leq \bar{V}, \quad (4b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (4c)$$

と定式化できる。ここで、 \bar{V} は部材の総体積の上限値(指定値)である。

コンプライアンス π は凸関数であり、問題 (4) は凸計画問題である。また、問題 (4) には多くの等価な定式化が知られている [3, 4]。

(3) に (1) を代入すると、コンプライアンスは

$$\pi(\mathbf{x}) = 2 \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{e}} \left\{ \mathbf{p}^\top \mathbf{u} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{E x_i}{l_i} e_i^2 \mid \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i^\top \mathbf{u} \ (i = 1, \dots, m) \right\} \quad (5)$$

と書き直せる。(5) の右辺の最適化問題は、変位 \mathbf{u} および部材の伸び e_1, \dots, e_m を変数とする凸 2 次計画である。その双対問題を導くことで、

$$\pi(\mathbf{x}) = 2 \inf_{\mathbf{w}, \mathbf{q}} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \mid \sum_{i=1}^m q_i \mathbf{b}_i = \mathbf{p} \right. \\ \left. w_i x_i \geq \frac{1}{2} \frac{l_i}{E} q_i^2 \ (i = 1, \dots, m) \right\} \quad (6)$$

が得られる。(6) の右辺の変数のうち q_i は部材に生じる軸力であり、等式制約は外力と軸力の釣合いを表す。

また、最適解において w_i は補ひずみエネルギーとよばれる量に等しくなる。(4c) に注意すると、(6) の不等式制約は 2 次錐制約

$$w_i + x_i \geq \left\| \begin{bmatrix} w_i - x_i \\ \sqrt{2l_i/E} q_i \end{bmatrix} \right\| \quad (7)$$

に書き直せる。したがって、問題 (4) は、外力と軸力の釣合い式および 2 次錐制約 (7) と体積制約 (4b) の下で w_1, \dots, w_m の和を最小化する問題に変形できる。このようにして、コンプライアンス最小化問題を 2 次錐計画問題として定式化できる。

2 次錐計画を用いることの利点の一つは、断面積 x_i が 0 になる場合も困難なく扱える点にある。実際、ある節点に接続するすべての部材の断面積が 0 になると、剛性行列 (1) は特異となるため、釣合い式 (2) を用いた既往の定式化では最適化の過程で数値的な困難が生じることが多い。

3. 弾塑性論における問題

金属などの材料に徐々に力を加えていくと、最初のうちは弾性変形(可逆変形)のみが進行し、応力がある基準に達したところで塑性変形(不可逆変形)が生じはじめる。塑性変形が生じはじめる応力のことを降伏応力といい、降伏応力の集合を降伏曲面という。材料の違いに応じて種々の降伏曲面が用いられ、そのいくつかは 2 次錐制約で記述できることが知られている。

3.1 降伏関数

まず、降伏関数の概念を簡単に説明する。軸方向の力(軸力)のみを受ける棒材を考え、その軸力を q 、伸びを e で表す。鉄などの金属では、 q と e の関係はおおむね図 2(a) の実線のようになる。簡単のため、これをさらに図 2(b) のように単純化する(このような単純化を、弾完全塑性モデルという)。加えた軸力の大きさが R 以下であれば、その軸力を徐々に取り除いていくと伸びは実線をたどって原点まで戻る。つま

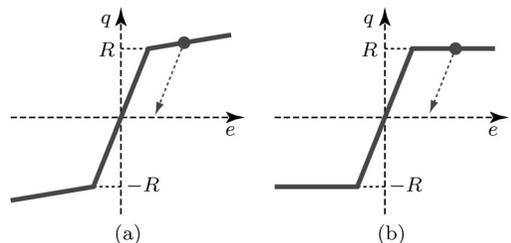


図 2 一軸荷重での弾塑性モデル

り、この場合は弾性変形のみが生じている。塑性変形は、軸力の大きさが R に達したあとに生じる。たとえば、図の丸印まで変形が進んだあとに軸力を徐々に取り除いたとすると、伸びは点線をたどるため、原点には戻らない。この不可逆変形が、塑性変形である。以上をまとめると、 $f(q) = |q| - R$ とおいたときに、 $f(q) < 0$ であれば弾性変形のみが生じ、塑性変形が生じるときには $f(q) = 0$ が成り立つ。したがって、常に $f(q) \leq 0$ が成り立つ。関数 f をこの棒材の降伏関数、 $\{q \in \mathbb{R} \mid f(q) = 0\}$ を降伏曲面という。なお、図 2(a) のモデルでは、塑性変形の進行に従って R の値が大きくなると考える（これを、ひずみ硬化という）。

次に、3次元連続体における降伏関数を紹介する。応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に対して¹、

$$\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbf{I} \quad (8)$$

で定義される $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ を偏差応力という。ただし、 \mathbf{I} は単位テンソルである。金属材料に対してよく用いられる von Mises の降伏関数は、この偏差応力を用いて

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - R \quad (9)$$

で与えられる [5]。ここで、 R は一軸負荷での降伏応力 σ_y を用いて $R = \sqrt{2/3} \sigma_y$ と表される正の定数であり、 $\|\cdot\|$ は Frobenius ノルム²である。金属の塑性変形は、せん断変形（正方形の上下の辺が平行なままずれるような変形）によって生じる結晶格子のずれが原因である。たとえば静水圧応力 $\frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$ のみではせん断変形は生じないため、塑性変形も生じない。von Mises の降伏関数は、このような事情を反映している。

応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は 2 階の対称テンソルなので、その独立な成分のみを並べたベクトル

$$\mathbf{s} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})^\top$$

を用いて表すことも多い（これを Voigt 記法という）。すると、定行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で定義すると、条件 $f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ は \mathbf{s} を変数として

$$\|A\mathbf{s}\| \leq R$$

と書ける。このように、von Mises の降伏条件は 2 次錐制約として記述できる。

土壌やコンクリートなどでは、微視的には、材料を構成する粒子が摩擦力に抵抗してすべることで塑性変形が生じる。このため、降伏条件は、すべりが生じる面に垂直な方向の圧力にも依存する。そのようなモデルの一つが Drucker–Prager の降伏関数であり、正の定数 α および β を用いて

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| + \alpha \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - \beta \leq 0 \quad (10)$$

という形で与えられる（ $\alpha = 0$ ならば、von Mises の降伏関数と一致する）[5]。(10) の不等式も 2 次錐制約を用いて表せる [6, 7]。この他にも、Cam-clay モデルや平面応力状態における Mohr–Coulomb モデルなども 2 次錐制約で表せることが知られている [8, 9]。

3.2 極限解析とシェイクダウン解析

構造物を構成する部材が図 2(b) のような完全弾塑性モデルに従うとき、各部材は R より大きな軸力を伝達できない。したがって、構造物全体としても、支持できる荷重の大きさに上限がある。この上限値を塑性崩壊荷重といい、それを求める方法論を極限解析という。ただし、ここでの議論は微小変形を仮定しており、変形に伴う構造物の幾何学的な形状の変化は無視している。したがって、崩壊といっても構造物の崩壊現象の終局状態を考えているわけではなく、塑性崩壊荷重は崩壊の初期段階の荷重を表していると考えべきである。

3次元連続体に変形前に占める領域を Ω で表し、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ のうち力が作用する領域を Γ_N ($\subset \Gamma$) で表す。 Ω 内で作用する物体力および Γ_N 上で作用する表面力をそれぞれ $\lambda \mathbf{p}$ および $\lambda \mathbf{t}$ とする。ここで \mathbf{p} および \mathbf{t} は定数であり、 λ をパラメータとして荷重を単調に大きくしていくことを考える。このときに構造物が支持できる最大の荷重係数 λ に対応する荷重が、塑性崩壊荷重である。このような λ の最大値は、次の

¹ 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は 2 階の対称テンソルであり、その成分 σ_{ij} は x_i 軸に垂直な微小面に作用する単位面積あたりの力の x_j 軸方向の成分を表す。本稿の範囲では、共変成分と反変成分の区別は無視できて、応力テンソルやひずみテンソルは 3 次の実対称行列と同一視できる。

² 2 階のテンソル \mathbf{X} と \mathbf{Y} のスカラー積を総和規約を用いて $\mathbf{X} : \mathbf{Y} = X_{ij} Y_{ij}$ で表すと、 $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} : \mathbf{X}}$ である。

最適化問題を解くことで得られる [10] :

$$\max \lambda \quad (11a)$$

$$\text{s. t. } -\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{p} \quad \text{in } \Omega, \quad (11b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (11c)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (11d)$$

ここで、変数は λ と $\boldsymbol{\sigma}$ であり、 \mathbf{n} は Ω の境界における外向きの単位法線ベクトルである。制約 (11b) および (11c) はそれぞれ連続体の内部と境界における応力と外力の釣合いを表している。また、(11d) は降伏条件である。

この問題を通常の有限要素法の手続きに従って空間的に離散化すると、(11b) と (11c) は応力に関する線形の等式制約になる。また、3.1 節で取り上げた降伏条件を仮定すると、(11d) は (有限個の) 2 次錐制約として離散化される。このようにして、2 次錐計画問題を解くことで塑性崩壊荷重が得られることがわかる。

極限解析では、荷重が比例的かつ単調に大きくなる状況を考えている。現実には、構造物が繰り返し大きな荷重を受ける状況もある。一度の単調載荷では崩壊しないレベルの荷重であっても、繰り返し作用することで塑性変形が累積し崩壊にいたる場合もある。繰り返し載荷の変動幅が比較的小さければ、構造物はある程度の塑性変形を経験した後に完全に弾性的な周期挙動を示すようになり、変形が発散することはない。このような現象をシェイクダウンといい、シェイクダウンが生じる最大の荷重の変動幅を求めることをシェイクダウン解析という (したがって、シェイクダウンする構造物のほうが安全である)。荷重の変動領域が有界な多面体であるという仮定をおくと、3.1 節の降伏条件の下でのシェイクダウン解析は 2 次錐計画に帰着できる [11, 12]。

3.3 弾塑性解析

3.2 節では、崩壊する瞬間に注目することで構造物が支持しうる荷重の最大値を求める問題を見た。一方、荷重が徐々に変化する際の、構造物の時々刻々の変形の様子を求める弾塑性解析も重要である。図 2 のように弾塑性挙動は履歴依存であるから、弾塑性解析では荷重や変位の微小増分に対して支配式をたて、その増分問題を逐次解くことで釣合い経路を追跡していく。

簡単のために、以下では図 2(b) のような完全弾塑性モデルを考える。増分解析の要点は、塑性ひずみ増分がとりうる値の範囲が応力に依存することにある。たとえば図 2(b) の丸印まで変形が進んでいるとき、次の

増分では、塑性変形がさらに進行する (このとき、塑性ひずみ増分は正) か除荷されて弾性領域にもどる (このとき、塑性ひずみ増分はゼロ) かのいずれかが生じ、塑性ひずみ増分が負になることはない。

このような関係として、3 次元連続体では関連流れ則

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad (12)$$

が仮定されることが多い [5]。ただし、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ は塑性ひずみ増分 (2 階の対称テンソル) であり、 $\dot{\gamma}$ は塑性乗数とよばれるスカラー、 f は降伏関数である。(12) は、塑性ひずみ増分が降伏曲面の外向き法線であることを意味するため、法線則とも呼ばれる。3.1 節で説明したように、応力は常に

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (13)$$

を満たす。さらに、塑性変形が生じるならば (13) が等号で成立するため、

$$\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。このように、塑性ひずみ増分と応力の関係は相補性条件で記述できる。

von Mises の降伏条件の下では、(12)、(13)、(14) は 2 次錐上の相補性条件に書き直せる。まず、(9) より

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|}$$

であるから、(12) は $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ が $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ と同じ向きであることを意味している。3.1 節では Voigt 記法を用いたが、ここでは表記の簡単のために 2 次錐の定義を拡張して $R \geq \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|$ を変数 $\boldsymbol{\sigma}$ に関する 2 次錐制約とみなす。すると、(12)、(13)、(14) は³

$$R \geq \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|, \quad \dot{\gamma} \geq \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\|, \quad (15a)$$

$$R \dot{\gamma} + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : (-\boldsymbol{\varepsilon}_p) = 0 \quad (15b)$$

と等価であることが示せる [13]。(15a) が二つの 2 次錐制約であり、(15b) が相補性条件にあたる。ここで、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ と $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ の向きの一致を示す非線形の等式条件 (12) と弾性・塑性の別を表す相補性条件 (14) との二つが同時に 2 次錐上の相補性条件 (15) で記述されており、2 次錐のもつ表現力の豊かさの例になっている。

(15) をもとに、弾塑性解析に対する全ポテンシャルエネルギー最小化問題を 2 次錐計画問題として定式化

³ 2 階のテンソル \mathbf{X} と \mathbf{Y} のスカラー積を $\mathbf{X} : \mathbf{Y} = X_{ij} Y_{ij}$ で表す (総和既約を用いている)。

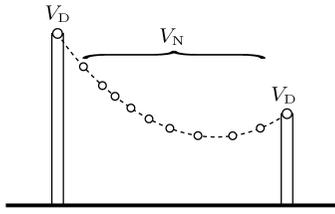


図3 釣り糸の釣合い形状の解析

することができる. 実際, (15) は, この2次錐計画問題の最適性条件の一部として自然に現れる [13, 14].

4. ケーブルネットの釣合い解析

釣り糸や鎖などを吊り下げたときに自然に釣合う形状は, 全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解くことで求められるが, この問題は2次錐計画問題として定式化できる.

いくつかの糸をリングでつないだ構造物を考える. 図3の例では, 10本の糸をリングでつなぎ, 両端の二つのリングは柱に固定している. 糸は引張剛性が十分大きいために自然長よりも長く伸びないと仮定する. さらに, 曲げ剛性や圧縮剛性はなく, 自然長よりも短くなると抵抗なくたるむとする. 糸の重さはリングの重さに比べて十分に小さいとし, リングに作用する重力のみを考える. この構造物のリングを頂点とみなし糸を枝とみなすと, グラフ $G = (V, E)$ が得られる.

変形後の頂点 $i \in V$ の座標を \mathbf{x}_i で表す. 頂点のうち, 柱に固定したものの集合を V_D , それ以外のものの集合を V_N で表す. 頂点 $i \in V_D$ を固定する位置を \mathbf{x}_i^0 で表し, 頂点 $i \in V_N$ に作用する重力を \mathbf{f}_i で表す. また, 各枝 $(i, j) \in E$ の自然長を l_{ij} とすると, 変形後の枝 (i, j) の長さは自然長以下でなければならない. 以上をまとめると, 釣合い形状は, 次の全ポテンシャルエネルギー最小化問題の最適解として得られる:

$$\min - \sum_{i \in V_N} \mathbf{f}_i^\top \mathbf{x}_i \quad (16a)$$

$$\text{s. t. } l_{ij} \geq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad (i, j) \in E, \quad (16b)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^0, \quad i \in V_D. \quad (16c)$$

この問題は, \mathbf{x}_i ($i \in V_N$) を変数とする2次錐計画問題である.

大スパン架構(ドームの屋根など)に用いられるケーブルネット構造(図4)に用いられるケーブルは, 伸びる際には正の(有限の)剛性をもつが縮むとたるむので剛性をもたない. このような構造物の全ポテンシャルエネルギー最小化問題も, 2次錐計画問題として定

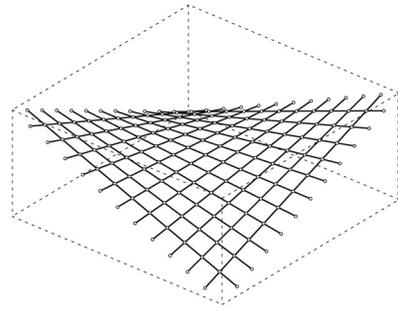


図4 ケーブルネットの釣合い解析の例

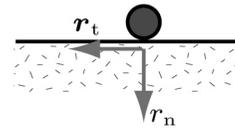


図5 r_n と r_t の定義

式化できる [15]. また, この問題の双対問題は, コンプリメンタリエネルギー最小化の原理という, 力学における自然な解釈をもっている [14, 16].

このように釣合い解析を2次錐計画として解くことの利点は, ケーブルが伸びる場合とたるむ場合との場合分けが生じないことにある. ケーブルは伸びると正の剛性をもつが, たるむと剛性がゼロである. ところが, 釣合い形状において個々のケーブルが伸びるかたるむかは, 未知である. したがって, 従来の手法では, 個々のケーブルが伸びるかたるむかを仮定し, 試行錯誤でその場合分けを修正しながら釣合い形状を探索する. 2次錐計画を用いた手法では, このような場合分けや試行錯誤が不要である. そして, この場合分けは, 各枝 $(i, j) \in E$ における2次錐制約が最適解において有効になるか否かに対応している.

5. Coulomb 摩擦則

Coulomb 摩擦則は, 工学ではよく用いられる単純な摩擦則であり, 2次錐相補性問題として定式化できる.

5.1 定義

一つの質点が, 3次元空間内の剛で平らな床の上に置かれている場合を考える. 質点に作用する床からの反力のうち, 床に垂直な成分(つまり, 垂直抗力)を $r_n \in \mathbb{R}$ で表し, 平行な成分(つまり, 摩擦力)を $\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^2$ で表す(図5). 床には法線方向の粘着力はないものとする. 圧縮力のみが作用しうるので $r_n \leq 0$ である.

摩擦則は, 摩擦力がとりうる値の範囲と, 質点がすべりうる方向と摩擦力との関係との, 二つの要素から

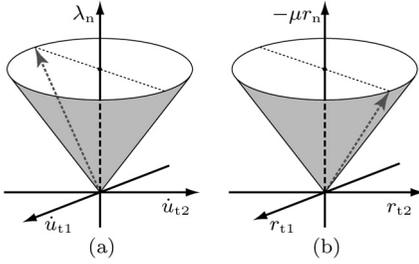


図6 2次錐を用いた Coulomb 摩擦則の定式化 (21) の意味 ((a) 変位増分と (b) 反力に関する制約)

なる. $\mu > 0$ を摩擦係数 (定数) とすると, Coulomb 摩擦則では反力が

$$\|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n \quad (17)$$

を満たすことを仮定する. この不等式を満たす反力ベクトル $(r_n, \mathbf{r}_t) \in \mathbb{R}^3$ の集合を摩擦錐と呼ぶ. 次に, 質点の変位 (床に平行な成分) の増分を $\dot{\mathbf{u}}_t \in \mathbb{R}^2$ で表す. このとき, 反力が摩擦錐の内部にあるならば, 質点は床の上をすべらない (つまり, $\dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}$ である). また, 質点が床の上をすべるときは, 反力は摩擦錐の境界にあり, 摩擦力 \mathbf{r}_t はすべる方向 $\dot{\mathbf{u}}_t$ と反対向きにはたらく. まとめると,

$$\|\mathbf{r}_t\| < -\mu r_n \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}, \quad (18a)$$

$$\|\mathbf{r}_t\| = -\mu r_n \Rightarrow \exists \gamma \geq 0, \quad \dot{\mathbf{u}}_t = -\gamma \mathbf{r}_t \quad (18b)$$

が成り立つ [17].

(17) および (18) は, 次のように書き直せる:

$$\dot{\mathbf{u}}_t = -\gamma \mathbf{r}_t, \quad (19a)$$

$$\|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n, \quad \gamma \geq 0, \quad \lambda(\|\mathbf{r}_t\| + \mu r_n) = 0. \quad (19b)$$

(19) は, 実は, \mathbf{r}_t を変数とする最適化問題

$$\max \quad -\dot{\mathbf{u}}_t^\top \mathbf{r}_t \quad (20a)$$

$$\text{s. t.} \quad \|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n \quad (20b)$$

の最適性条件にあたる. 問題 (20) は, 摩擦力のする仕事を最大化するものが真の摩擦力であることを示しており, 最大散逸エネルギーの原理と呼ばれている [18].

5.2 2次錐上の相補性条件による定式化

補助変数 $\lambda_n \in \mathbb{R}$ を用いると, Coulomb 摩擦則は次のように2次錐上の相補性条件の形で表せる [19]:

$$\lambda_n \geq \|\dot{\mathbf{u}}_t\|, \quad (21a)$$

$$-\mu r_n \geq \|\mathbf{r}_t\|, \quad (21b)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_n \\ \dot{\mathbf{u}}_t \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\mu r_n \\ \mathbf{r}_t \end{bmatrix} = 0. \quad (21c)$$

これは, 図6のように図示すると理解しやすい [14].

図6の二つの2次錐は, それぞれ (21a) および (21b) を満たす領域を表している. 図6(a)のように, ベクトル $(\lambda_n, \dot{\mathbf{u}}_t)$ がこの錐の境界にある (つまり, $\lambda_n = \|\dot{\mathbf{u}}_t\|$ を満たす) とする. ベクトル $(-\mu r_n, \mathbf{r}_t)$ が図6(b)の錐に含まれ, かつ二つのベクトルの間に (21c) が成り立つには, $(-\mu r_n, \mathbf{r}_t)$ は錐の境界にあって $(\lambda_n, \dot{\mathbf{u}}_t)$ の「反対側」になければならない. この関係を鉛直方向から見下ろすと, $\dot{\mathbf{u}}_t$ と \mathbf{r}_t が同じ方向で逆の向きをもっていることがわかる. すなわち, 摩擦力はすべる方向と反対向きに作用する. 次に, ベクトル $(-\mu r_n, \mathbf{r}_t)$ が錐の内部にあるとする. この場合には, $(-\mu r_n, \mathbf{r}_t)$ との内積が0になるには $(\lambda_n, \dot{\mathbf{u}}_t) = \mathbf{0}$ でなければならない. すなわち, 摩擦力の大きさが $-\mu r_n$ より小さいときは質点はすべることができない.

以上のように, 2次錐を用いた定式化 (21) では, すべる方向に関する非線形の等式条件 (19a) とすべるか否かを表す相補性条件 (19b) との二つが同時に表現されていることがわかる.

6. おわりに

力学のさまざまな分野における問題が, 2次錐計画を用いることで, より見通しよく定式化できることをみてきた. 2節の最適設計問題では, 設計変数 (部材の断面積) が0になる場合も困難なく扱える点が2次錐計画の利点である. 3節で取り上げた降伏関数には微分不可能な点が存在しており, このことが非線形計画などに基づく従来の手法の問題点である. さらに (2次錐では表せないが) 半正定値対称行列の錐を用いると記述できるような降伏条件も調べられており [20, 21], この研究分野での錐計画の利用は飛躍的に増えている. また, 力学における応用では, 3.3節や5.2節で述べたように, 2次錐上の相補性条件を用いると応力とひずみの向きや摩擦力と変位の向きの一致が表現できることも魅力である. 本文では触れなかったが, 4節のケーブルネットの問題でも同様に, 変形後のケーブルの向きとケーブルが伝達する力の向きとの一致が2次錐上の相補性条件で記述でき, そのことが2次錐計画による定式化の本質につながっている [16]. このように最適性条件や双対性のもつ意味が力学の文脈で自然に解釈できることは, 2次錐計画による定式化の自然さを示しているものと思われる. さらに, 関連する話題

として、たとえば制振構造のための粘性ダンパーの最適配置問題が混合整数2次錐計画に定式化できる [22] など、構造力学・計算力学における2次錐計画の活躍の場はまだまだ広がるものと期待される。

一方で、2次錐計画やそれを含む錐計画と力学との接点を論じた書籍や論文には、日本語で書かれたものはまだほとんど見当たらない。ひろく構造最適化一般については、成書 [3, 4, 23] などがある。塑性論と凸解析の関係については、成書 [1] に詳しい。接触問題を含む力学の諸問題と最適化の接点を論じたものに、成書 [24, 25] などがある。拙著 [14] では、これらの問題を錐計画の枠組みで包括的に捉え直すことを試みている。

参考文献

- [1] W. Han and B. Daya Reddy, *Plasticity*, 2nd ed., Springer, 2013.
- [2] A. Makrodimopoulos, A. Bhaskar and A. J. Keane, “Second-order cone programming formulations for a class of problems in structural optimization,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **40**, 365–380, 2010.
- [3] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization*, Springer-Verlag, 2003.
- [4] M. Ohsaki, *Optimization of Finite Dimensional Structures*, CRC Press, 2011.
- [5] E. A. de Souza Neto, D. Perić and D. R. J. Owen, *Computational Methods for Plasticity*, John Wiley & Sons, 2008.
- [6] A. Makrodimopoulos and C. M. Martin, “Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **66**, 604–634, 2006.
- [7] M. Trillat, J. Pastor and P. Thoré, “Limit analysis and conic programming, ‘porous Drucker–Prager’ material and Gurson’s model,” *Comptes Rendus Mécanique*, **334**, 599–604, 2006.
- [8] K. Krabbenhøft and A. V. Lyamin, “Computational Cam clay plasticity using second-order cone programming,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **209–212**, 239–249, 2012.
- [9] K. Krabbenhøft, A. V. Lyamin and S. W. Sloan, “Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs,” *International Journal of Solids and Structures*, **44**, 1533–1549, 2007.
- [10] W. T. Koiter, “General theorems for elastic-plastic solids,” *Progress in Solid Mechanics*, Vol. I, I. N. Sneddon and R. Hill (eds.), North-Holland, pp. 167–221, 1960.
- [11] C. D. Bisbos, A. Makrodimopoulos and P. M. Pardalos, “Second-order cone programming approaches to static shakedown analysis in steel plasticity,” *Optimization Methods and Software*, **20**, 25–52, 2005.
- [12] A. Makrodimopoulos, “Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem,” *Mechanics Research Communications*, **33**, 72–83, 2006.
- [13] K. Yonekura and Y. Kanno, “Second-order cone programming with warm start for elastoplastic analysis with von Mises yield criterion,” *Optimization and Engineering*, **13**, 181–218, 2012.
- [14] Y. Kanno, *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*, CRC Press, 2011.
- [15] Y. Kanno, M. Ohsaki and J. Ito, “Large-deformation and friction analysis of nonlinear elastic cable networks by second-order cone programming,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **55**, 1079–1114, 2002.
- [16] Y. Kanno and M. Ohsaki, “Minimum principle of complementary energy of cable networks by using second-order cone programming,” *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 4437–4460, 2003.
- [17] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, 2006.
- [18] A. Klarbring, “Contact, friction, discrete mechanical structures and mathematical programming,” *New Developments in Contact Problems*, P. Wriggers and P. Panagiotopoulos (eds.), Springer-Verlag, pp. 55–100, 1999.
- [19] Y. Kanno, J. A. C. Martins and A. Pinto da Costa, “Three-dimensional quasi-static frictional contact by using second-order cone linear complementarity problem,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**, 62–83, 2006.
- [20] C. D. Bisbos, “Semidefinite optimization models for limit and shakedown analysis problems involving matrix spreads,” *Optimization Letters*, **1**, 101–109, 2007.
- [21] C. D. Bisbos and P. M. Pardalos, “Second-order cone and semidefinite representations of material failure criteria,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **134**, 275–301, 2007.
- [22] Y. Kanno, “Damper placement optimization in a shear building model with discrete design variables: A mixed-integer second-order cone programming approach,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **42**, 1657–1676, 2013.
- [23] 西脇真二, 泉井一浩, 菊池昇, 『トポロジー最適化』, 丸善出版, 2013.
- [24] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976.
- [25] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer-Verlag, 2002.