構造化マルコフ連鎖の切断誤差評価

増山　博之

「解けない」待ち行列の系内客数分布や待ち時間分布は，しばしば，ある種の構造化マルコフ連鎖の定常分布として数値的に求めることになる．しかし，その構造化マルコフ連鎖の遷移確率行列が無限次元である場合には，何らかの方法で遷移確率行列を切断してから，計算機実装を行う必要がある．無論，切断された遷移確率行列から得られる定常分布は，本来求めるべき定常分布に対する「近似」である．本稿では，「最終列増大切断」によって得られる定常分布の誤差上界と，その導出に必要となる確率行列の「単調性」について述べる．また，関連する結果についても言及する．

キーワード：待ち行列，構造化マルコフ連鎖，最終列増大切断，誤差評価，単調性

1. はじめに

1.1 意外と「解けない」待ち行列

「解ける」待ち行列モデルは多くはない．ここでいう「解ける」とは，（定常）系内客数分布や待ち時間分布などが，到着率や平均サービス時間といった基本パラメータで陽的 (explicit) に表現されることを意味する．

一般に，系内客数分布が求まれば，その結果を用いて待ち時間分布が得られるので，以下では系内客数分布に焦点を当てて，代表的な待ち行列モデルの「解ける・解けない」をおさらいしてみたいと思う．個々のモデルの解析法については，文献 [1, 2] などを参照されたい．

まず，「解ける」待ち行列モデルの筆頭格は，M/M/c 待ち行列と M/G/∞ 待ち行列である．M/M/c 待ち行列の系内客数分布は，極めて初等的な手法によって，その陽表現を導くことができる．特に，サーバ数 c が 1 に等しいとき，系内客数分布はトラヒック強度をパラメータとする幾何分布になる．同様に，M/G/∞ 待ち行列の系内客数分布は，トラヒック強度を平均とするポアソン分布になることが知られている．

陽表現は得られないものの，それに準ずる結果が得られる待ち行列モデルがある．例えば，GI/M/1 待ち行列では，ある方程式の解（安定条件のもとで区間 $(0, 1)$ に唯一存在することが示されている）を用いて，系内客数分布の半陽的 (semi-explicit) な表現を得ることができる．GI/M/c 待ち行列についてもほぼ同様の結果が得られる．

ますやま　ひろゆき
京都大学大学院情報学研究科
〒 606–8501 京都府京都市左京区吉田本町

一方，GI/M/1 待ち行列と双対な関係にあり，そして最も基本的な待ち行列モデルの 1 つでもある M/G/1 待ち行列についてはどうだろうか．ご存じの方も多いと思うが，こちらは有名な「ポラチェック・ヒンチンの公式 (Pollaczek-Khintchine formula)」によって系内客数分布の確率母関数が与えられている．したがって，その確率母関数を適宜微分すれば，平均や分散などの陽表現を得ることができる．しかし，一般に，系内客数分布自身の陽表現あるいは半陽的な表現を導出するのは困難である．

さらに，M/G/1 待ち行列を複数サーバモデルへと拡張した M/G/c 待ち行列や，より一般的な GI/G/c 待ち行列については，そもそも解析的な取り扱いが難しいことが示されている [3].

1.2 数値計算へのパラダイムシフト

一般的な複数サーバモデルの解析に挫折したことは，待ち行列研究のパラダイムシフトを引き起こした．1970 年代後半頃から，数値計算に主眼をおいた待ち行列研究に注目が集まり，数値計算への親和性を意図した Phase-type (PH) 分布やマルコフ型到着過程 (Markovian arrival process: MAP) が導入された．

PH 分布と MAP は，任意の 1 次元確率分布と定常な到着過程を，それぞれ，任意の精度で近似することができる [4]．加えて，PH 分布と MAP は，解析的な取り扱いが比較的容易なことから，一般的なサービス時間分布や到着過程の代替として用いられたり，ポアソン到着過程や指数サービス時間分布の一般化として用いられたりする．例えば，PH/PH/c 待ち行列は GI/G/c 待ち行列の代替として，MAP/G/1 待ち行列は M/G/1 待ち行列の一般化として扱われる．

PH/PH/c や MAP/G/1 待ち行列，さらに，それら

の拡張モデルの解析は，多くの場合，準出生死滅過程やM/G/1型マルコフ連鎖といったブロック構造化マルコフ連鎖の解析に帰着させることができる．1980年代後半までに，これらブロック構造化マルコフ連鎖の定常分布に対するアルゴリズミックな解の構成法が確立されている．例えば，準出生死滅過程の定常分布については行列幾何形式解の存在が示され，その公比行列を求める効率のよい数値計算アルゴリズムも提案されている．また，M/G/1型マルコフ連鎖については，「M/G/1パラダイム」と呼ばれる定常分布の構成法が確立されている．こうしたアルゴリズミックな解の構成法の詳細については，文献 [2, 5, 6] などを参照のこと．

1.3 計算機実装に向けた「切断」

さて，これは筆者の知識および経験に基づく個人的な意見であるが，待ち行列の系内客数分布や待ち時間分布などが，効率的かつ安定的に数値計算できるかどうかは，それが構造化マルコフ連鎖に関する数値計算に帰着できるかどうかにかかっている．

しかし，待ち行列の系内客数過程が首尾よく構造化マルコフ連鎖に帰着できたとしても，その遷移確率行列が無限次元である場合には，何らかの「切断 (truncation)」を行わないと実際の数値計算は難しい．例えば，M/G/1型マルコフ連鎖は無限個のブロック行列で特徴づけられているため，前小節で言及したM/G/1パラダイムを計算機実装する際には，その無限個のブロック行列の中から，何らかの基準で有限個を選び出さなければならない．

ここで，一般的な遷移確率行列に対する切断法について少し具体的に述べておく．遷移確率行列の切断とは，定常分布への貢献が大きいと見込まれる成分を残し，その他の成分をゼロとみなす方法である．なお，切断後の行列（一般に，確率行列ではなくなっている）をそのまま用いる手法もあるが，本稿では，切断後の行列が確率行列となるよう成分の増大を行う手法に話を限定する．遷移確率行列の切断と成分の増大操作はまとめて「増大切断 (augmented truncation)」と呼ばれる．当然のことながら，成分の増大方法は一意的ではない．これについては次小節で少し触れる．

さて，遷移確率行列の切断の仕方（成分の増大を除く）は大きく2種類に分類できる．1つは元の遷移構造をできるだけ残しつつ遷移確率行列を特徴づけるパラメータが有限個になるよう切断する方法である．もう1つは，遷移確率行列の左上隅に位置する有限次元正方部分行列を抜き出す方法である．前者の方法では，切断後の遷移確率行列は必ずしも有限次元ではないため，一般的に適用できる方法ではない．しかし，特殊な遷移構造を持つものに対して適用すると，切断後の遷移確率行列の定常分布が効率よく計算できる場合がある．実際，M/G/1パラダイムを計算機に実装する際には，こちらの方法が用いられる．一方，後者の方法は，効率性はともかく非常に汎用的であり，元の遷移確率行列に特段の構造がない場合でも，定常分布は有限次元連立一次方程式の解として求めることができる．

1.4 「切断誤差」を評価する

遷移確率行列の切断は定常分布の数値計算に向けた実用的な手法であるが，当然のことながら，切断された遷移確率行列の定常分布は元の遷移確率行列の定常分布に対する近似である．したがって，その近似誤差を評価することは応用上極めて重要である．しかしながら，遷移確率行列の切断に関する近似誤差評価の研究はあまりなされておらず，筆者の知る限り，応用に資する理論的結果は，「最終列増大切断 (last-column augmented truncation)」と呼ばれる切断法に関するものに限られる．最終列増大切断の厳密な定義は第3節で与える．

1.5 本稿の構成

次節以降，最終節（第7節）を除く本稿の構成は以下のとおりである．第2節では，待ち行列モデルに関する構造化マルコフ連鎖のうち，最も基本的なものの1つである反射型ランダムウォークを紹介する．第3節では，最終列増大切断の定義を与えたあと，最終列増大切断の近似誤差評価に必要となる「確率行列の単調性」について説明する．第4節および5節では，それぞれ，最終列増大切断の近似誤差に対する上界と，その応用例について議論する．第6節では，関連する結果と今後の研究の展開について言及する．

なお，以下では簡単のため，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ および $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ と表記する．

2. 反射型ランダムウォーク

反射型ランダムウォークとは，次のような遷移確率行列を持つマルコフ連鎖である．

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots \\ y_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ y_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots \\ y_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & \cdots \\ y_{-4} & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし，$y_{-k} = \sum_{l=-\infty}^{-k} x_l$ $(k \in \mathbb{N})$ とし，$(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ および $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ は離散型確率分布とする．式 (1) から明らかなように，境界（状態 0）からのジャンプ幅の分布 $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ は，非境界でのジャンプ幅の分布 $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ と必ずしも同じではない．こうした境界での「例外的」な振る舞いから，式 (1) のような遷移確率行列を持つマルコフ連鎖を「例外挙動を有する反射型ランダムウォーク」と呼ぶこともある [7].

上記の反射型ランダムウォークは，第 1 節で紹介した基本的な待ち行列に関する構造化マルコフ連鎖を特別な場合として含んでいる．例えば，式 (1) において，

$$\begin{aligned} &y_{-k} = x_{-k} = 0 \ (\forall k \ge 2),\\ &y_{-1} = x_{-1},\ \ y_k = x_{k-1} \ (\forall k \ge 0), \end{aligned}$$

とすれば，M/G/1 待ち行列の離脱時点における系内客数過程が従う遷移確率行列と同じ構造になる．また，式 (1) において，

$$y_0 = \sum_{l=-\infty}^{0} x_l, \quad y_1 = x_1, \quad y_k = x_k = 0 \ (\forall k \ge 2),$$

とすると，今度は GI/M/1 待ち行列の到着直前における系内客数過程が従う遷移確率行列と同じ構造になる．

また，詳細は割愛するが，GI/M/c 待ち行列の到着直前における系内客数過程や，1 サービス時間ごとに観測した M/D/c 待ち行列の系内客数過程が従う遷移確率行列は共に，例外挙動を支配する部分，すなわち式 (1) の最上行 $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ に相当する部分が複数行に拡張されたような構造を有している．

さらに，成分 x_k および y_k をそれぞれブロック行列に拡張すると，GI/G/1 型マルコフ連鎖と呼ばれるブロック構造化マルコフ連鎖の遷移確率行列となる．GI/G/1 型マルコフ連鎖は，先に述べた準出生死滅過程や M/G/1 型マルコフ連鎖などを特別な場合として含む非常に一般的な構造化マルコフ連鎖である．

以上のことから，式 (1) で定義されるマルコフ連鎖は，待ち行列の解析における構造化マルコフ連鎖の基本形ということができる．

3. 確率行列の切断と単調性

本節では，最終列増大切断の定義とその性質を紹介し，そのあと，確率行列の単調性について述べる．

3.1 最終列増大切断

最終列増大切断の定義は以下のとおりである．

定義 3.1（最終列増大切断）**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，${}_{(n)}p_n(k,l)$ $(k,l \in \mathbb{Z}_+)$ を

$$ {}_{(n)}p_n(k,l) = \begin{cases} p(k,l), & 0 \le l \le n-1,\\ \displaystyle\sum_{j=n}^{\infty} p(k,j), & l = n,\\ 0, & l \ge n+1, \end{cases} \tag{2}$$

と定義する．このとき，${}_{(n)}p_n(k,l)$ を成分にもつ確率行列 ${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n := ({}_{(n)}p_n(k,l))_{k,l\in\mathbb{Z}_+}$ を，確率行列 $\boldsymbol{P} := (p(k,l))_{k,l\in\mathbb{Z}_+}$ の最終列増大切断[1]と呼ぶ.

最終列増大切断 ${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ の次元は，元の確率行列 $\boldsymbol{P}$ と同じ可算無限次元である．しかし，定常確率ベクトルを求める際には，左上隅の $(n+1)\times(n+1)$ 正方部分行列だけがそれに寄与する．実際，${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ の定常確率ベクトルを ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n := ({}_{(n)}\pi_n(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ と定義すると，方程式 ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \cdot {}_{(n)}\boldsymbol{P}_n = {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ と式 (2) より，

$${}_{(n)}\pi_n(k) = \sum_{l=0}^{\infty} {}_{(n)}\pi_n(l) \cdot 0 = 0, \quad \forall k \ge n+1,$$

が成り立ち，結局，

$${}_{(n)}\pi_n(k) = \sum_{l=0}^{n} {}_{(n)}\pi_n(l)\,{}_{(n)}p_n(l,k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

となる．したがって，${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ の $(n+1)$ 行目以降または $(n+1)$ 列目以降の成分は，定常確率ベクトル ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ の非ゼロ成分の計算とは実質的に無関係である．

それにもかかわらず，最終列増大切断 ${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ を，行列 $\boldsymbol{P}$ と同次元の確率行列として定義したのは，その方が表記の上で都合の良いことが多いからである．例えば，切断列番を無限に大きくしたとき，最終列増大切断が元の確率行列に「収束」することを，次のように表記することができる．

$$\lim_{n\to\infty} {}_{(n)}\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P} \qquad \text{（収束は各成分ごと）}. \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{\pi}$ を $\boldsymbol{P}$ の定常確率ベクトル，すなわち，$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ を満たす確率ベクトルと定義する．このとき，式 (3) より，

$$\lim_{n\to\infty} {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}, \tag{4}$$

が成り立つことを期待するかもしれないが，一般に式 (3) は式 (4) を意味しない．式 (4) のようなベクトル列 $\{{}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n; n \in \mathbb{N}\}$ の収束性を証明したり，$\boldsymbol{\pi}$ に対す

[1] 記号 ${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ の左右の下添え字 “(n)” と “n” はそれぞれ，“切断列番” と “成分を増大させる列番” を表している．

る ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ の誤差を解析的に評価したりするため，確率行列に関する「単調性」という概念を導入する．

3.2 単調性

単調性の定義は以下のとおりである．

定義 3.2（単調性）**.** 確率行列 $\boldsymbol{P}=(p(k,l))_{k,l\in\mathbb{Z}_+}$ が次式を満たすとき，単調であるという．

$$\sum_{j=l}^{\infty} p(k,j) \le \sum_{j=l}^{\infty} p(k+1,j), \quad \forall (k,l)\in\mathbb{Z}_+^2. \tag{5}$$

次の 2 つの補題は単調性に関する重要な結果である．

補題 3.1 ([8, Theorem 2])**.** 確率行列 $\boldsymbol{P}$ が単調であるとする．このとき，$\boldsymbol{P}$ を遷移確率行列とする 2 つのマルコフ連鎖 $\{X_n^{(1)};n\in\mathbb{Z}_+\}$ と $\{X_n^{(2)};n\in\mathbb{Z}_+\}$ を次式が成り立つようにして，同一の確率空間上に構築することができる．

$$X_0^{(1)} \le X_0^{(2)} \Longrightarrow X_n^{(1)} \le X_n^{(2)},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

補題 3.2 ([9, Proposition 2.3, Lemma 3.2])**.** 確率行列 $\boldsymbol{P}$ が単調であるとき，以下の主張は全て真である．

(i) $\boldsymbol{P}^m$ と $({}_{(n)}\boldsymbol{P}_n)^m$ $(\forall m\in\mathbb{N})$ は共に単調である．

(ii) $\boldsymbol{P}$ が既約ならば，$\boldsymbol{P}$ は非周期である．

(iii) $\boldsymbol{P}$ が既約かつ正再帰的ならば，最終列増大切断 ${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ は正再帰的な既約クラスを 1 つだけ持ち，それは状態 0 を含む．

ここで，確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約かつ正再帰的であるとする．このとき，補題 3.2 (iii) より，${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ は $\boldsymbol{P}$ と同様に唯一の定常確率ベクトルを持つ（[10, Chapter 3, Theorem 3.1] 参照）．さらに $\boldsymbol{P}$ の単調性を仮定すると，補題 3.2 (ii) より，$\boldsymbol{P}$ は非周期的となり，$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{P}^m=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}$ が成り立つ（[10, Chapter 4, Theorem 2.1] 参照）．ただし，$\boldsymbol{e}$ は全ての成分が 1 に等しい列ベクトルである．

次に，$\{{}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n;n\in\mathbb{N}\}$ の収束性に関する定理を紹介する．そのため，全変動ノルム $\|\cdot\|$ を導入する．

$\mathbb{F}_1$ と $\mathbb{F}_2$ を適当な可算集合とする．このとき，行列 $\boldsymbol{M}:=(M(i,j))_{(i,j)\in\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2}$ に対し，その全変動ノルム $\|\boldsymbol{M}\|$ は次式で定義される．

$$\|\boldsymbol{M}\| = \sup_{i\in\mathbb{F}_1}\sum_{j\in\mathbb{F}_2}|M(i,j)|.$$

命題 3.1 ([11, Theorem 4.1])**.** 確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約かつ正再帰的で，さらに単調であるとき，$\lim_{n\to\infty}\|{}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n-\boldsymbol{\pi}\|=0$ が成り立つ．

命題 3.1 は，単調な確率行列 $\boldsymbol{P}$ の定常確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が，${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n$ の定常確率ベクトル ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ で近似できることを示唆しているが，近似誤差については何も主張していない．次節ではその誤差評価について述べる．

4. 切断誤差評価

まず最初に，いくつか記号を定義する．任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して，$p^m(k,l)$ と ${}_{(n)}p_n^m(k,l)$ はそれぞれ，$\boldsymbol{P}^m$ と $({}_{(n)}\boldsymbol{P}_n)^m$ の (k,l) 成分を表す．また，$\boldsymbol{p}^m(k)=(p^m(k,l))_{l\in\mathbb{Z}_+}$ と ${}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(k)=({}_{(n)}p_n^m(k,l))_{l\in\mathbb{Z}_+}$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ はそれぞれ，$\boldsymbol{P}^m$ と $({}_{(n)}\boldsymbol{P}_n)^m$ の k 番目の行ベクトル（確率ベクトル）を表すものとする．なお，$m=1$ のとき，上添字 “1” は省略する．

三角不等式より，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}\|{}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n-\boldsymbol{\pi}\| &\le \|\boldsymbol{p}^m(0)-{}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0)\| \\ &\quad + \|\boldsymbol{p}^m(0)-\boldsymbol{\pi}\| \\ &\quad + \|{}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0)-{}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n\|, \end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つ．まず，式 (7) の右辺第 1 項を評価する．m に関する帰納的議論により，以下の不等式が示される（[11, 式 (18)] 参照）．

$$\|{}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0)-\boldsymbol{p}^m(0)\| \le \sum_{h=0}^{m-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+} {}_{(n)}p_n^h(0,l)\Delta_n(l), \quad \forall (m,n)\in\mathbb{N}^2. \tag{8}$$

ただし，$\Delta_n(k)$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ は次式で定義される．

$$\Delta_n(k) = \|\boldsymbol{p}(k)-{}_{(n)}\boldsymbol{p}_n(k)\| = 2\sum_{l=n+1}^{\infty} p(k,l).$$

上式と式 (2) より，$\Delta_n(k)\le 2\cdot{}_{(n)}p_n(k,n)$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ となるので，これを式 (8) に代入すると，

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{p}^m(0)-{}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0)\| \\ &\quad\le 2\sum_{h=0}^{m-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}_+} {}_{(n)}p_n^h(0,l)\,{}_{(n)}p_n(l,n) \\ &\quad= 2\sum_{h=0}^{m-1} {}_{(n)}p_n^{h+1}(0,n), \end{aligned} \tag{9}$$

を得る．再び式 (2) より，任意の $k,h\in\mathbb{Z}_+$ に対して，${}_{(n)}p_n^{h+1}(k,n)=\sum_{j=n}^{\infty}{}_{(n)}p_n^{h+1}(k,j)$ となるので，補題 3.2 (i) と定義 3.2 から，任意の $k,h\in\mathbb{Z}_+$ に対

して，

$$ {}_{(n)}p_n^{h+1}(0,n) = \sum_{j=n}^{\infty} {}_{(n)}p_n^{h+1}(0,j) \le \sum_{j=n}^{\infty} {}_{(n)}p_n^{h+1}(k,j) $$
$$ = {}_{(n)}p_n^{h+1}(k,n), $$

が成り立つ．この不等式の両辺に ${}_{(n)}\pi_n(k)$ を掛け，$k \in \mathbb{Z}_+$ について和を取ると，次のようになる．

$$ {}_{(n)}p_n^{h+1}(0,n) \le \sum_{k=0}^{\infty} {}_{(n)}\pi_n(k) {}_{(n)}p_n^{h+1}(k,n) = {}_{(n)}\pi_n(n). \tag{10} $$

ただし，式 (10) の導出にあたり，$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{(n)}\pi_n(k) = 1$ と ${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \cdot ({}_{(n)}\boldsymbol{P}_n)^{h+1} = {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ を用いた．さらに，式 (10) を式 (9) に代入し，次式を得る．

$$ \| {}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0) - \boldsymbol{p}^m(0) \| \le 2m \cdot {}_{(n)}\pi_n(n). \tag{11} $$

つづいて，式 (7) の第 2 項および第 3 項 $\|\boldsymbol{p}^m(0) - \boldsymbol{\pi}\|$, $\| {}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(0) - {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \|$ の評価を行う．そのため，確率行列 $\boldsymbol{P}$ に関する幾何的ドリフト条件を導入する．

条件 4.1（幾何的ドリフト条件）**.** ある非負列ベクトル $\boldsymbol{v} := (v(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$，ならびに，ある $\gamma \in (0,1)$ および $b \in (0,\infty)$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$ \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \le \gamma \boldsymbol{v} + b\mathbb{1}_0. \tag{12} $$

ただし，任意の $K \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$\mathbb{1}_K := (1_K(j))_{j\in\mathbb{Z}_+}$ は，$1_K(j) = 1$ $(j = 0,1,\dots,K)$ かつ $1_K(j) = 0$ $(j = K+1, K+2, \dots)$ を満たす列ベクトルとする．

確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約かつ非周期的であるとき，上記の幾何的ドリフト条件が満たされるなら，ある $r > 1$ と $C \in (0,\infty)$ に対し，

$$ \sum_{m=1}^{\infty} r^m \|\boldsymbol{p}^m(k) - \boldsymbol{\pi}\| \le C v(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{13} $$

が成り立ち，$\boldsymbol{P}$ は幾何的エルゴード性を有する（[12, Theorem 15.0.1] 参照）．

式 (13) に現れる $r > 1$ および $C \in (0,\infty)$ は陽には与えられないため，$\|\boldsymbol{p}^m(k) - \boldsymbol{\pi}\|$ の評価としては不十分である．証明は割愛するが，いくつかの付加的な条件が満たされれば，$\|\boldsymbol{p}^m(k) - \boldsymbol{\pi}\|$ だけでなく，$\| {}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(k) - {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \|$ の上界式が得られる．

補題 4.1 ([9, Lemma 3.3])**.** 確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約かつ単調であるとする．さらに，$v(0) \ge 1$ かつ $v(k) \le v(k+1)$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ を満たす非負列ベクトル $\boldsymbol{v} = (v(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ に対して，条件 4.1 が満たされるとき，以下の不等式が成立する．

$$ \|\boldsymbol{p}^m(k) - \boldsymbol{\pi}\| \le 2\gamma^m C(k), \qquad \forall m \in \mathbb{N}, $$
$$ \| {}_{(n)}\boldsymbol{p}_n^m(k) - {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \| \le 2\gamma^m C(k), \qquad \forall m \in \mathbb{N}. $$

ただし，$C(k) = (1 - 1_0(k))v(k) + b/(1-\gamma)$ とする．

補題 4.1 と式 (11) を式 (7) 適用すると，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，次式を得る．

$$ \| {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n - \boldsymbol{\pi} \| \le 4\gamma^m \frac{b}{1-\gamma} + 2m \cdot {}_{(n)}\pi_n(n). \tag{14} $$

補題 4.1 の条件を満たす非負列ベクトル $\boldsymbol{v}$ は，${}_{(n)}\boldsymbol{P}_n \boldsymbol{v} \le \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \le \gamma\boldsymbol{v} + b\mathbb{1}_0$ を満たす．この不等式と，${}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \cdot {}_{(n)}\boldsymbol{P}_n = {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n$ および ${}_{(n)}\pi_n(n)v(n) \le {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n \boldsymbol{v}$ より，${}_{(n)}\pi_n(n) \le b/\{(1-\gamma)v(n)\}$ が成り立つので，これを式 (14) に代入し，次の定理を得る．

定理 4.1 ([11, Theorem 4.2])**.** 補題 4.1 の条件が満足されるとする．このとき，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，次の不等式が成立する．

$$ \| {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n - \boldsymbol{\pi} \| \le \frac{b}{1-\gamma} \left(4\gamma^m + \frac{2m}{v(n)} \right). \tag{15} $$

$\{v(n); n \in \mathbb{Z}_+\}$ が非減少列であるため，式 (15) の右辺は n に関して非増加であるが，$n \to \infty$ としても 0 に収束しない．しかし，$\lim_{n\to\infty} v(n) = \infty$ である場合には，$n \to \infty$ としたあと，$m \to \infty$ とすれば，式 (15) の右辺は 0 に収束する．これより，誤差 $\| {}_{(n)}\boldsymbol{\pi}_n - \boldsymbol{\pi} \|$ を所望の値以下に抑えるような切断列番 n は，例えば，以下に示す手順 (i), (ii) によって求められる．ただし，許容誤差を $\varepsilon > 0$ とする．

(i) 以下の不等式を満たす最小の $m \in \mathbb{N}$ を求め，それを m_* とする．

$$ 4\gamma^m \frac{b}{1-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2} \iff m > \frac{\log \dfrac{\varepsilon(1-\gamma)}{8b}}{\log \gamma}. $$

(ii) 以下の不等式を満たす最小の $n \in \mathbb{N}$ を求める．

$$ \frac{b}{1-\gamma} \frac{2m_*}{v(n)} < \frac{\varepsilon}{2} \iff v(n) > \frac{b}{1-\gamma} \frac{4m_*}{\varepsilon}. $$

定理 4.1 は最終列増大切断の誤差評価に関する基本定理であるが，待ち行列モデルから作られる構造化マルコフ連鎖に応用しようとするとき，条件 4.1 の不等式 (12) の右辺にある $\mathbb{1}_0$ が $\mathbb{1}_K$（K はある非負整数）

のようになっていると都合の良いことが多い．そこで，定理 4.1 の修正版である次の定理を紹介する．

定理 4.2 ([9, Theorem 4.2])**.** $v'(0) \geq 1$ かつ $v'(k) \leq v'(k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) を満たす非負列ベクトル $\boldsymbol{v}' = (v'(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ と，ある $K \in \mathbb{Z}_+$，$\gamma' \in (0,1)$，$b' \in (0,\infty)$ に対して，以下の不等式が成り立つとする．

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}' \leq \gamma'\boldsymbol{v}' + b'\mathbb{1}_K, \tag{16}$$

$$p(K,0) > 0. \tag{17}$$

このとき，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，式 (15) が成立する．ただし，γ，b，および $\boldsymbol{v}$ は $B > b'/p(K,0)$ を満たす実数を用いて次のように定義される．

$$\gamma = \frac{\gamma' + B}{1 + B}, \tag{18}$$

$$b = b' + B, \tag{19}$$

$$v(k) = \begin{cases} v'(0), & k = 0, \\ v'(k) + B, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{20}$$

付加的な条件 (17) があるため，定理 4.2 は定理 4.1 の拡張ではない．しかし，待ち行列モデルに関する構造化マルコフ連鎖の多くは，条件 (17) を満たすので，定理 4.2 は応用上有用である．次節では，定理 4.2 の応用例として，第 2 節で紹介した反射型ランダムウォークを考える．

5. 応用例

本節では，式 (1) で与えられる確率行列 $\boldsymbol{P}$ を考え，さらに以下の仮定をおく．

仮定 5.1.

(i) $\boldsymbol{P}$ は既約である．
(ii) $\sum_{j=l}^{\infty} y_j \leq \sum_{j=l}^{\infty} x_j$ ($\forall l \in \mathbb{Z}_+$).
(iii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_k < 0$.
(iv) $\theta = \sup\{z > 0; \sum_{k=0}^{\infty} z^k x_k < \infty\} > 1$.

仮定 5.1 の条件 (i)–(iii) より，確率行列 $\boldsymbol{P}$ は正再帰的となる（[2, 例 8.4.1] 参照）．

さて，$\widehat{x}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k x_k$ とおくと，定義より，$\widehat{x}(1) = 1$ であり，さらに，仮定 5.1 の条件 (iii) から，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\widehat{x}(z)|_{z=1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x_k < 0$ となる．よって，仮定 5.1 の条件 (iv) より，

$$\widehat{x}(z) < 1, \quad 1 < \forall z < z_0, \tag{21}$$

を満たす $z_0 \in (1,\theta)$ が存在する．

区間 $(1, z_0)$ から適当に正の実数 $\alpha \in (1, z_0) \subset (1,\theta)$ を選んで，$\boldsymbol{v}' = (v'(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ を

$$v'(k) = \alpha^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

と定義する．明らかに，$v'(0) = 1$ であり，任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$v'(k) \leq v'(k+1)$ となる．また，式 (1) と (22) から，次式を得る．

$$\sum_{l=0}^{\infty} p(0,l)v'(l) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l y_l =: w(0), \tag{23}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} p(k,l)v'(l) = y_{-k} + \alpha^k \sum_{l=-k+1}^{\infty} \alpha^l x_l =: w(k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

さらに，式 (24) の右辺は次のように上から評価できる．

$$w(k) \leq \alpha^k(\alpha^{-k} y_{-k} + \widehat{x}(\alpha)), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

ここで，$\lim_{k\to\infty} \alpha^{-k} y_{-k} = 0$，式 (21)，および $\alpha \in (1, z_0)$ より，任意に固定された $\gamma' \in (\widehat{x}(\alpha), 1)$ に対して，自然数 k_* を次のように定義することができる．

$$k_* = \min\{k \in \mathbb{N}; \alpha^{-k} y_{-k} + \widehat{x}(\alpha) < \gamma'\}. \tag{26}$$

最後に，式 (22)，(25)，(26) を式 (24) に適用し，次式を得る．

$$\sum_{l=0}^{\infty} p(k,l)v'(l) \leq \gamma'\alpha^k = \gamma' v'(k), \quad \forall k \geq k_*. \tag{27}$$

以上の議論により，定理 4.2 から次の結果が得られる．

定理 5.1 ([9, Theorem 5.1])**.** 仮定 5.1 が満たされるとし，$\boldsymbol{v}'$ を式 (22) で定義する．さらに，$\gamma' \in (\widehat{x}(\alpha), 1)$ を適当に選び，$k_* \in \mathbb{N}$ を式 (26) で定義する．このとき，$K \geq k_* - 1$ を満たす非負整数 K に対して，$y_{-K} = p(K,0) > 0$ であるなら，不等式 (15) が成り立つ．ここで，$\gamma \in (0,1)$，$b \in (0,\infty)$，および $\boldsymbol{v} = (v(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ は式 (18)–(20) を満たし，b' は次式で与えられる．

$$b' = \inf\{x > 0; x \geq w(k) - \gamma'\alpha^k \ (0 \leq \forall k \leq K)\}.$$

上の定理で与えられる誤差上界は陽公式ではないが，その値は比較的容易に数値計算が可能である．

6. 関連する結果と今後の展開

本節では関連する結果を紹介するが，紙面に限りがあるため，具体的な結果の記述は避け，その概要のみ

述べるに留める．

文献 [13] では，幾何的ドリフト条件の代わりに，劣幾何的ドリフト条件の一種である多項式的ドリフト条件が仮定され，単調な確率行列の最終列増大切断による定常分布の誤差上界が示されている．この誤差上界は，定理 4.1 で示されているものとは異なり，切断列番の増加に伴い冪的に値が減少する．

文献 [7] では，本稿第 2 節で紹介した反射型ランダムウォークに限定されるが，単調性がない場合について議論がなされている．そこでは，幾何的ドリフト条件を仮定した下で，最終列増大切断や「増分切断[2]」による定常分布の誤差上界が与えられている．また，切断列番を無限に大きくするだけで，ゼロに収束する誤差上界も導出している．

文献 [9] は，幾何的ドリフト条件を仮定し，「ブロック単調」な構造化マルコフ連鎖の「最終ブロック列増大切断」による定常分布の誤差評価を行っている．ここで，「ブロック単調性」と「最終ブロック列増大切断」は共に文献 [14] で導入された概念であり，それぞれ，「単調性」および「最終列増大切断」をブロック構造化マルコフ連鎖に対応すべく拡張したものである．なお，本稿の第 3，4，および 5 節で紹介した補題および定理は全て，文献 [9] にてブロック構造化マルコフ連鎖へと拡張されており，そこで示された誤差上界は，MAP/G/1 待ち行列や離散時間マルコフ変調型 G/G/1 待ち行列などに応用できる．ちなみにマルコフ変調型 G/G/1 待ち行列は，それぞれ独立同一な分布に従う到着時間間隔とサービス時間を持つ GI/G/1 待ち行列の拡張であり，到着時点で埋め込まれたマルコフ連鎖の状態に応じて，到着時間間隔とサービス時間の分布が決まる待ち行列モデルである．

最後に，今後の研究の展開について述べる．現在，筆者は，ブロック単調性と一般的な劣幾何的ドリフト条件を仮定した下で，最終ブロック列増大切断による定常分布の誤差上界を導く研究に取り組んでおり，これまでに一定の成果を上げている．

一方，ブロック単調性を仮定しない場合については，まだ解決すべき課題が多い．まずは文献 [7] の結果をブロック構造化マルコフ連鎖へ拡張することを検討しているが，現状ではある程度強い技術的な条件を課さないと，切断誤差の上界を導くのは難しいと考えている．特に幾何的ドリフト条件を仮定しない場合については，全く見通しが立っていない．しかし，ブロック単調性という条件を外すことができれば，誤差上界式の適用範囲が大きく広がるので，挑戦的な課題である．

[2] ランダムウォークの増分が有界になるよう遷移確率行列を切断する手法．

7. おわりに

本稿では，待ち行列モデルに関する構造化マルコフ連鎖の切断とその近似誤差評価について述べた．当該研究分野について，筆者がまだ深い造詣を得るに至っていないため，本稿は結果の羅列に終始してしまった感がある．それでも，読者の方々にとって，得るところがあれば幸いである．

最後に，拙稿に目を通し，貴重なご意見をくださった小沢利久氏，佐久間大氏，境谷秀作氏に感謝の意を評したい．

参考文献

[1] D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson and C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, 4th ed., Wiley & Sons, 2008.

[2] 宮沢政清，『待ち行列の数理とその応用（数理情報科学シリーズ）改訂版』，牧野書店，2013.

[3] J. F. C. Kingman, “On the algebra of queues,” *Journal of Applied Probability*, **3**, 285–326, 1966.

[4] S. Asmussen and G. Koole, “Marked point processes as limits of Markovian arrival streams,” *Journal of Applied Probability*, **30**, 365–372, 1993.

[5] 牧本直樹，『待ち行列アルゴリズム―行列解析アプローチ―』，朝倉書店，2001.

[6] 滝根哲哉，“M/M/1 を越えて―準出生死滅過程への招待―，” オペレーションズ・リサーチ，**59**, 179–184, 2014.

[7] 境谷秀作，“例外的な境界挙動を有する反射型ランダムウォークの切断近似，” 特別研究報告書（京都大学工学部），2014.

[8] T. Kamae, U. Krengel and G. L. O’Brien, “Stochastic inequalities on partially ordered spaces,” *The Annals of Probability*, **5**, 899–912, 1977.

[9] H. Masuyama, “Error bounds for augmented truncations of discrete-time lock-monotone Markov chains under geometric drift conditions,” to appear in *Advances in Applied Probability*, **47**, 2015.

[10] P. Brémaud, *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer, 1999.

[11] R. L. Tweedie, “Truncation approximations of invariant measures for Markov chains,” *Journal of Applied Probability*, **35**, 517–536, 1998.

[12] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2009.

[13] Y. Liu, “Augmented truncation approximations of discrete-time Markov chains,” *Operations Research Letters*, **38**, 218–222, 2010.

[14] H. Li and Y. Q. Zhao, “Stochastic block-monotonicity in the approximation of the stationary distribution of infinite Markov chains,” *Stochastic Models*, **16**, 313–333, 2000.