最小統計量のラプラス極限
—確率ネットワーク算法の話題から—

高田　寛之

本稿では，ネットワーク算法と呼ばれるトラフィック理論から，積率母関数法における最小統計量のラプラス極限の計算法について述べます．また，ネットワーク算法をご存知ない読者の方々のために，その評価法の歴史と本題へ至る道筋を，具体的なモデルを例に解説します．

キーワード：確率ネットワーク算法，最小統計量，大偏差原理

1. はじめに

近年のTCP/IPネットワーク技術の急速な発展とインターネットの爆発的普及によって，インターネットは社会基盤ネットワークとなりつつあります．その過程で固定電話，携帯電話，放送，従来のインターネットサービスは統合ネットワークに混在するようになりました．

従来のインターネットサービスは，比較的遅延に耐性があり，ベストエフォートの通信サービスで対応していましたが，電話や放送のサービスは，非常に厳密な通信品質を要します．固定電話網では呼の発生過程がポアソンでよく近似できるなどの観測から，その特性をベースにした待ち行列理論が発展しました．しかしながら，パケット型ネットワークへ技術が推移し，遅延が発生するようになるとこれらの特性が維持できなくなりました．マルコフ連鎖をベースにした待ち行列理論では，マルコフ変調モデルなどを用いてどのような確率過程でも表現できるように拡張する方向で研究が進みました．

一方，1990年代初頭に，全く異なるアプローチとしてネットワーク算法が生まれました．これにはいくつかの理由が推測できます．通信品質保証が必要なサービスの多くはリアルタイムに制御できなければなりません．したがって，性能評価をするために必要なパラメータを長時間かけて取得するということは非現実的です．マルコフ変調モデルは，少なくとも推移確率行列の要素の数だけパラメータが必要ですので，リアルタイムに制御するにはやや不向きです．ネットワーク算法の入力過程の特徴づけには数個のパラメータしか用いません．もっと深刻なのは，モデルができても，解析が難しくて評価理論が確立しないことです．通信品質保証技術での規格は厳密な値を要求するわけではありません．パケット廃棄確率が 10^{-6} 以下とか，遅延が30 ms以下とか許容される範囲を満たしていれば良いことが多いのです．したがって，上界評価でも構わないので実行可能性の高い評価理論が必要でした．

ネットワーク算法の基礎は，信号理論の $(\min,+)$-代数系のアナロジです．この代数系はトロピカル環と呼ばれることもあるようです．この代数系に従って，性能指標を計算していく方法論は特に確定的ネットワーク算法と呼ばれます [1, 2]．そして後に確定的ネットワーク算法の一部の結果を確率的な構造へ組み込む確率ネットワーク算法へと拡張されました．

確定的ネットワーク算法の特徴は，最悪値評価です．これを達成するために，到着曲線，サービス曲線，そして $(\min,+)$-代数系で重要な基本的な演算子 min，max，+ が重要な役割を果たします．到着曲線は入力過程の定常な上界です．サービス曲線はサービス量の下界を与えます．基本演算子は考慮する混雑指標の定義式に依存して決まりますが，重要な混雑指標であるバックログ（待ち行列長），出力過程（次のノードへの入力過程），遅延はいずれも入力過程，処理率，基本演算子の組み合わせを用いて表現できます．具体的な表現については第2節を参照下さい．

確率ネットワーク算法は，最悪値評価の欠点を補うために考案されました．最悪値評価は，滅多に起こらないようなシナリオでも発生する可能性がある限りは考慮の対象にしてしまいます．ちょうど，海面において波をいろんな方向から発生させたときに一箇所に海面最大箇所が重なりあうと非常に高い波になるのを観

たかだ　ひろゆき
長崎大学大学院工学研究科
〒852–8521 長崎県長崎市文教町1–14

測するようなものです．波が独立に発生したとき，全ての波の最大箇所が一点で重なることは非常に稀です．最悪値評価はそのような状況だけを考えますので，結果としてネットワークの規模に対して指数的に増大する評価を与えてしまいます．10 億年に一度あるかないかの規模の津波（トラフィック）に対してそれを防ぎきる堤防（バッファ）を作るのはコスト的にあまりにも馬鹿げていますから，普通は，堤防建設（バッファ増設）コストとのトレードオフで，100 年に一度あるかないかの規模などコスト的に実現可能な堤防（バッファ）の建設（増設）に留めると思います．なお，400 年に一度の津波に耐えるスーパー堤防建設に対しては反対運動が起きていました．そこで，そのリスク確率を評価するという発想が生まれます．

ネットワーク算法における問題設定の下では，入力過程の分布情報は陽に与えられません．与えられるのは上界だけです．その制約の下で求めたい混雑指標のリスク確率を計算できなければなりません．例えば，確率変数の X, Y が独立でないときに

$$E\left(\exp\left(X+Y\right)\right)$$

を $E(e^X)$ と $E(e^Y)$ だけを用いて正確に計算することはできません．しかしながら，分布に依存しない評価式はいくつか存在します．例えばブールの不等式，チェビシェフの不等式，マルコフの不等式，期待値の線形性などがこれに該当します．このように限られた評価式を組み合わせて，意味のある上界評価であれば，実行可能性が上がります．

確率ネットワーク算法には二つの流派があります．両者に共通するのは，確定的ネットワーク算法の一部の結果および実効帯域 [3] を用いることです．一つは到着曲線とサービス曲線を拡張した確率到着曲線と確率サービス曲線と呼ばれる概念，確率に関する不等式による評価を用います [4]．もう一方は積率母関数法 [5] と呼ばれます．これは主にチェルノフ限界による評価と積率母関数に関する不等式を組み合わせます．その類似としてフロー数に関する漸近解析法を用いる研究 [6] があります．漸近解析は大偏差理論 [7] および凸解析 [8] の直接的な応用でもあります．

本稿で扱う計算法は，積率母関数法の一種です．その目的は最小統計量の積率母関数，キュムラント母関数またはラプラス極限の評価の改善です．この動機は，基本演算子 max，min，＋ が重要な演算であることと，特に min についての評価に不満をもったことでした．また上界評価には過剰評価の問題がつきまといます．上界があまりに大きすぎるとその評価は無意味になってしまいます．最もわかりやすい例は，パケット損失確率が 2 で抑えられる評価結果です．もともと確率は 1 以下ですので，この上界評価に意味は見いだせません．もう一つの懸念は，無意味ではないにしてもあまりに大きすぎる上界評価は，無駄な資源配分をもたらし，資源枯渇を早めます．このことを直感的に理解するためには，遊園地の入場制限を想像してください．実際にはあまり混雑していないのに過大評価しすぎて混雑と判断してしまい入場制限を行ったらどうなるでしょうか．遠いところから遊びに来たお客さんは「まだ入れるじゃないか」と怒ってしまいます．

本稿は四つの節で構成されます．第 2 節 は，FIFO マルチプレクサのバックログに関する漸近解析を従来の積率母関数法で行います．また改善したい評価箇所を明確にします．第 3 節 では，主要な結果を述べ，得られた上界の性質について述べます．まとめと今後の課題は第 4 節 で述べます．

2. 積率母関数法

この節では，離散時間型 FIFO マルチプレクサの部分バックログのリスク確率を漸近解析法で求めます．

2.1 離散時間型 FIFO マルチプレクサ

離散時間型 FIFO マルチプレクサを定義します．パケットは離散時刻 $t = 1, 2, 3, \ldots$ に到着します．図 1 も参照してください．

ノードには仕事保存サーバが一人いて，その処理率を $c{*}L$ [bps] で表します．仕事保存するとは，バッファにパケットがある限り休まないということです．L はスケールファクタです．ノードへの入力は，パケットです．パケットの流れの単位をフローといいます．このシステムには L 本のタイプ 1 フローと $M * L$ 本のタイプ 2 のフローが存在すると仮定します．全ての入力パケットはシステムに到着したときにその到着時刻を記したタイムスタンプが押されます．サーバはこれらのフローからの入力パケットを FIFO の規則で処理し，出力ラインへ転送しつづけます．FIFO 規則とは，タイムスタンプが最も古いパケットを優先することを意味します．このシステムは離散時間型ですので，同

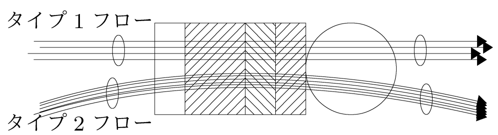

図 1 FIFO マルチプレクサ

時刻に異なるタイプのフローからのパケットが到着することがあります．同時到着したパケットの処理順序は FIFO 規則によって定めることができませんので，タイプ 1 にとって最も悪い状況として，同時刻到着した場合はタイプ 2 のパケットを優先的に処理するように仮定します．もちろんタイムスタンプが古いパケットは，タイプに関係なく，タイムスタンプが新しいパケットよりも優先的に処理されます．

タイプ i の第 k 番目のフローの時刻 t における入力量を $a_{i,k}(t)$ と記します．$A_{i,k}(s,t)$ はタイプ i の第 k 番目のフローの時刻 $s+1$ から時刻 t までの累積入力量とします．すなわち

$$A_{i,k}(s,t) = \sum_{u=s+1}^{t} a_{i,k}(u)$$

と定義されます．

全てのフローの入力過程は互いに独立と仮定します．この独立性は異なるユーザが通信フローを発生していてお互いが独立に動いているということを想定したものです．

タイプ i のフローは全て以下の仮定を満たすとします．$0 \le s \le t$ のとき

$$A_{i,k}(s,t) \le \alpha_i(t-s), \tag{1}$$
$$\mathrm{E}\left[A_{i,k}(s,t)\right] \le \beta_i(t-s). \tag{2}$$

これらの仮定は，全てのフローがなんらかの制御装置で流量制御されていることを示します．α_i，β_i をそれぞれ到着曲線と平均到着曲線と呼びます．到着曲線の具体的な例は線形到着曲線 $\alpha_i(t) = r_i t + b_i$ や区分的線形到着曲線 $\alpha_i(t) = \min(R_i t, r_i t + b_i)$ です．これを実現するための装置はトークンバケツです．トークンバケツは Linux や Cisco ルータにソフトウェアとして実装されています．トークンバケツにはピークレート R_i [bps] とトークンレート r_i [bps]，バケツサイズ b_i [bits] が設定できます．ピークレートは回線の帯域に置き換えることもできますしそれ以下の値にすることもできます．トークンバケツのアルゴリズムの概要は次のとおりです．

- $1/r_i$ 秒おきにトークンがバケツに追加されます．
- バケツは最大で b_i ビット分保持できます．あふれたトークンは破棄されます．
- データパケットはパケットサイズに応じたトークンを消費して通過できます．このときにパケットヘッダに，契約を守っている旨が記されます．もしトークンが足りない場合には，パケットヘッダには契約違反の印がつきます．なお，契約違反分をキューイングするケースもあります．

平均到着曲線は例えば平均保証するフィルタを通すか，もしくは $A_{i,k}$ が定常でエルゴード的ならば，線形到着曲線に関する仮定 (1) から $\beta_i(t) = r_i t$ が導かれることを用います．このようなフィルタを通ったフローに関する入力過程には，独立増分性が期待できません．

この仮定では，タイプが同じフローは同じ到着曲線で特徴づけしています（同一性）．一般にはフローごとに到着曲線が異なっても構いませんが，その場合は漸近解析は利用できません．代わりに [5] の非漸近解析法を用いる必要があります．同一性は，プロバイダが予め設定したサービスタイプに応じて決め打ちするような実装に適しています．

最後に安定条件として $\lim_{t\to\infty} \alpha_i(t)/t \le c_i$ とします．線形または区分的線形な到着曲線の場合は，$r_i \le c_i$ と同値です．

2.2　バックログと部分バックログ

ここでは，タイプを区別しない時刻 t のバックログ $Q^L(t)$ およびタイプ i の時刻 t の部分バックログ $Q_i^L(t)$ を定義し，基本演算子を用いた表現に直します．$Q^L(t)$ はサービス規律に依存せずに決まり，部分バックログを定義するため必要な量です．

タイプを区別しないときの時刻 t の入力量は $a^L(t)$ で表します．すなわち，$a^L(t) = \sum_{k=1}^{L} a_{1,k}(t) + \sum_{k=1}^{ML} a_{2,k}(t)$ と表せます．初期時刻 $t=0$ でバックログは空であると仮定します．$Q^L(t)$ はリンドリーの公式により再帰的に定義されます．

$$Q^L(0) = 0,$$
$$Q^L(t) = (Q^L(t-1) + a^L(t) - cL)^+ \quad (t \ge 0),$$

ここで $x^+ = \max(0,x)$ です．帰納法により，

$$Q^L(t) = \max_{0\le u\le t} \left(A^L(u,t) - cL(t-u)\right), \tag{3}$$

という表現が得られます．ここに

$$A^L(s,t) = A_1^L(s,t) + A_2^L(s,t),$$
$$A_1^L(s,t) = \sum_{k=1}^{L} a_{1,k}(s,t),$$
$$A_2^L(s,t) = \sum_{k=1}^{ML} a_{2,k}(s,t),$$

とおきました．

$B^L(0,t) = A^L(0,t) - Q^L(t)$ とおきます．$B^L(0,t)$

は時刻 1 から時刻 t までの累積出力量を表します．

ここで，時刻 t 以前に最後にバッファが空になった時刻を u_t，時刻 t において完全に出力されているパケットのタイムスタンプのうち最も大きいものを v_t とおきます．ここで完全に出力されたとは，バッファに同じタイムスタンプがついたパケットの一部が存在しないことを意味します．

$$u_t = \max\{u \in \mathbb{N}; u \le t, Q^L(u) = 0\},$$
$$v_t = \max\{v \in \mathbb{N}; v \le t, B^L(0,t) \ge A^L(0,v)\}.$$

これらの記号を用いると，次の表現ができます．

$$Q^L(t) = A^L(u_t, t) - cL(t - u_t), \tag{4}$$
$$A^L(0, v_t) \le B^L(0,t), \tag{5}$$
$$B^L(0,t) < A^L(0, v_t + 1). \tag{6}$$

$v_t + 1$ は時刻 t にバッファに残ったパケットの中で最も古いタイムスタンプを表します．

以上の記号を用いると，$Q_1^L(t)$ と $Q_2^L(t) = Q^L(t) - Q_1^L(t)$ が定義できます．

$$Q_1^L(t) = \min\begin{pmatrix} A_1^L(v_t, t), \\ A_1^L(u_t,t) + A_2^L(u_t, v_t+1) \\ -cL(t-u_t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

(7) の第一項は，時刻 $v_t + 1$ のタイムスタンプをもつタイプ 1 のパケットが全く処理されなかった場合のバッファに残留しているタイプ 1 のパケットの総量を表します．(7) の第二項は，時刻 $v_t + 1$ のタイムスタンプをももつタイプ 1 のパケットが一部処理されている場合を表しています．

次の結果は連続時間型 FIFO マルチプレクサの部分バックログ [9] の類似結果です．

補題 1 ([10])**.**

$$Q_1^L(t) = \max_{v=0}^{t} \max_{u=0}^{v} \min\begin{pmatrix} A_1^L(v,t), \\ A_1^L(u,t) \\ +A_2^L(u, v+1) \\ -cL(t-u) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

補題 1 の証明の概要は，次のとおりです．$0 \le u_t \le v_t \le t$ から $\le$ 方向の不等式が導かれます．一方，$\ge$ についての不等式は，次のように求めます．(8) の右辺の max の範囲を $0 \le u \le t$ に広げてから，(3) を適用します．したがって，(8) の右辺は次の上界で抑えられます．

$$\max_{0 \le v \le t} \min(A_1^L(v,t), Q^L(t) - A_2^L(v+1,t)).$$

v の範囲を $0 \le v \le v_t - 1$, $v = v_t$, $v_t + 1 \le v \le t$ に分け，(4)，(5)，(6) を使って評価すると $v = v_t$ の項だけが残ります．すなわち $(u,v) = (u_t, v_t)$ がこの最大化問題の解になっています．

このように $Q_1^L(t)$ は $(t+1)(t+2)/2$ 個の max，一つの min，二つの $+$ を使って表現できます．ここで，$-$ の符号は $+$ の一種と考えます．

2.3 部分バックログのリスク確率評価

ここでは $Q_1^L(t)$ の大偏差上極限

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \mathrm{P}\left[Q_1^L(t) > Lx\right]$$

の上界を求めます．もし

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \mathrm{P}\left[Q_1^L(t) > Lx\right] \le -\gamma(x).$$

を満たす $\gamma(x) > 0$ が求められたなら，近似式として

$$\mathrm{P}\left[Q_1^L(t) > x\right] \lesssim \exp(-L\gamma(x/L))$$

を得ます（L は十分大）．したがって近似的にリスク確率の上界を求めることができます．

この評価は，チェルノフ限界の導出，最大統計量，最小統計量に関するラプラス極限の評価法則の適用，実効帯域の適用の三段階によって行われます．

チェルノフ限界 ([7]) は

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \mathrm{P}\left[Q_1^L > Lx\right]$$
$$\le \inf_{\theta>0}\left[\left(\limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \mathrm{E}\left[\exp(\theta Q_1^L(t))\right]\right) - \theta x\right].$$

によって与えられます．

表記上の簡単さのために $Q_1(t) = (Q_1^L(t); L \in \mathbb{N})$,

$$\mathcal{L}\left[Q_1(t)\right](\theta) = \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \mathrm{E}\left[\exp(\theta Q_1^L(t))\right]$$

と記します．

定義 1 (ラプラス極限)**.** 確率変数列 $X = (X^L; L \in \mathbb{N})$ に対して，

$$\mathcal{L}\left[X\right](\theta) = \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log E\left[\exp(\theta X^L)\right]$$

と記します．$\mathcal{L}[X](\theta)$ を X のラプラス極限と呼びます．

$\mathcal{L}[Q_1(t)](\theta)$ の計算準備をします．フィドラ [5] は，最大統計量および最小統計量の積率母関数の評価に次

の不等式を用いました．

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\theta \max_{i=1}^{d} X_i\right)\right] \le d * \max_{i=1}^{d} \mathrm{E}\left[\exp(\theta X_i)\right], \quad (9)$$

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\theta \min_{i=1}^{d} X_i\right)\right] \le \min_{i=1}^{d} E[\exp(\theta X_i)], \quad (10)$$

また (10) の評価と同様の手順で

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\theta \max_{i=1}^{d} X_i\right)\right] \ge \max_{i=1}^{d} E[\exp(\theta X_i)], \quad (11)$$

も得られます．これらの不等式に $X_i = X_i^L$ を代入して，両辺の対数をとる，$1/L$ 倍する，L について極限をとる，などの操作は不等式の向きを変えませんので，

$$\mathcal{L}\left[\max_{i=1}^{d} X_i\right](\theta) = \max_{i=1}^{d} \mathcal{L}\left[X_i\right](\theta), \quad (12)$$

$$\mathcal{L}\left[\min_{i=1}^{d} X_i\right](\theta) \le \min_{i=1}^{d} \mathcal{L}\left[X_i\right](\theta), \quad (13)$$

が導かれます，ここに (12)，(13) の中にある記号 X_i，$\max_{i=1}^{d} X_i$，および $\min_{i=1}^{d} X_i$ は，

$$\begin{aligned} X_i &= (X_i^L; L \in \mathbb{N}), \\ \max_{i=1}^{d} X_i &= \left(\max_{i=1}^{d} X_i^L; L \in \mathbb{N}\right), \\ \min_{i=1}^{d} X_i &= \left(\min_{i=1}^{d} X_i^L; L \in \mathbb{N}\right), \end{aligned}$$

とおいています．

本テーマの直接的な動機は，(13) が不等式であることに不満をもったことによります．等号成立条件や，(13) の左辺の正体がわかりませんでした．もしこの不等式が過剰であるなら，第 1 節で述べました過剰配分の問題に繋がります．

精度の問題はいったん保留して，従来法で解析を進めます．

$$\begin{aligned} A_i(s,t) &= (A_i^L(s,t); L \in \mathbb{N}), \\ S(s,t) &= (cL(t-s); L \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

とおきます．(12) と (13) から，

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[Q_1(t)\right](\theta) \\ &= \mathcal{L}\left[\max_{0\le v\le t}\max_{0\le u\le v}\min\begin{pmatrix} A_1(v,t), \\ A_1(u,t) \\ +A_2(u,v+1) \\ -S(u,t) \end{pmatrix}\right](\theta) \\ &\le \max_{0\le v\le t}\max_{0\le u\le v}\min\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left[A_1(v,t)\right](\theta), \\ \mathcal{L}\begin{bmatrix} A_1(u,t) \\ +A_2(u,v+1) \\ -S(u,t) \end{bmatrix}(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得ます．$A_1(u,t)$ と $A_2(u,v+1)$ は独立で，$S(u,t)$ は定数ですから，

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[A_1(u,t) + A_2(u,v+1) - S(u,t)\right](\theta) \\ &= \mathcal{L}\left[A_1(u,t)\right](\theta) + \mathcal{L}\left[A_2(u,v+1)\right](\theta) - c\theta(t-u), \end{aligned}$$

と計算できます．したがって，

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[Q_1(t)\right](\theta) \\ &\le \max_{0\le v\le t}\max_{0\le u\le v}\min\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left[A_1(v,t)\right](\theta), \\ \mathcal{L}\left[A_1(u,t)\right](\theta) \\ +\mathcal{L}\left[A_2(u,v+1)\right](\theta) \\ -c\theta(t-u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

と評価できました．

$\mathcal{L}\left[A_i(s,t)\right](\theta)$ の評価を行います．フロー間の独立性により

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[A_i(s,t)\right](\theta) \\ &= \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} \log \mathrm{E}\left[\exp\left(\theta A_{i,k}(s,t)\right)\right] \end{aligned}$$

となります．ここで [3] によれば，(1)，(2) の下で，

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\exp\left(\theta A_{i,k}(s,t)\right)\right] \\ &\le q_i(t-s) + p_i(t-s)\exp\left(\theta\alpha_i(t-s)\right) \end{aligned}$$

が成立します．ここで $q_i(t) = 1 - p_i(t)$, $p_i(t) = \beta_i(t)/\alpha_i(t)$ とおきました．この不等式の導出は指数関数についてマクローリン展開した後に各項の積率の上界を (1) と (2) によって求め，再び指数関数のマクローリン展開によって指数関数に戻します．まとめますと，

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[A_i(s,t)\right](\theta) \\ &\le q_i(t-s) + p_i(t-s)\exp\left(\theta\alpha_i(t-s)\right) \end{aligned}$$

という評価ができます．注意事項として右辺はパラメータ $p_i(t-s)$ のベルヌーイ確率変数の $\alpha_i(t-s)$ 倍された確率変数の積率母関数になっています．

以上の計算から，

$$\begin{aligned} &\limsup_{L\to\infty}\frac{1}{L}\log \mathrm{P}\left[Q_1^L(t) > Lx\right] \\ &\le \inf_{\theta>0}\max_{0\le v\le t}\max_{0\le u\le v} \\ &\min\begin{pmatrix} q_1(t-v) + p_1(t-v)e^{\theta\alpha_1(t-v)}, \\ q_i(t-u) + p_i(t-u)e^{\theta\alpha_1(t-u)} \\ \quad +Mq_2(v+1-u) \\ \quad +Mp_2(v+1-u)e^{\theta\alpha_2(v+1-u)} \\ \quad -c\theta(t-u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

と評価されます．

この最大化最小化問題を代数的に解くことは非常に

困難ですが，数値計算は少なくとも可能です．

3. 最小統計量のラプラス極限の評価改善

この節では，最小統計量のラプラス極限

$$\mathcal{L}\left[\min_{i=1}^{d} X_i\right](\theta)$$

の評価について考えます．

第 2 節 の応用例では min の作用を受けた項は

$$A_1(v,t), \quad A_1(u,t)+A_2(u,v+1)-S(u,t)$$

でしたので，

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1(v,t) \\ X_2 &= A_1(u,t)+A_2(u,v+1)-S(u,t) \end{aligned}$$

として解釈します．つまり第 2 節の応用例では $d=2$ における最小統計量のラプラス極限を (13) によって評価しました．

第 2 節 で考慮したスケールファクタ L はここでは n にします．

これまで考えたラプラス極限は一変数でしたが，多変数のラプラス極限に拡張して考えることもできます．これは積率母関数 $\mathrm{E}\left[\exp(\theta X)\right]$ に対して，結合積率母関数 $\mathrm{E}\left[\exp(\theta_1 X_1+\cdots+\theta_d X_d)\right]$ に拡張することと同じです．

この拡張のために対応する確率変数ベクトル列を考えます．$I \equiv \{1,\ldots,d\}$ とします．任意の $i \in I$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して， X_i^n を確率変数とします．$i \in I$ に対して $X_i = (X_i^n; n \in \mathbb{N})$ は一次元確率変数の列です．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$X^n = (X_i^n; i \in I)$ は d 次元確率変数ベクトルです．$X = (X^n; n \in \mathbb{N})$ は d 次元確率変数ベクトルの列です．X は $(X_i; i \in I)$ とも同一視します．そして $\min_{i\in I} X_i \equiv (\min_{i=1}^{d} X_i^n; n \in \mathbb{N})$ と定めます．

定義 2. d 次元確率ベクトルの列 X に対するラプラス極限は次のように定義されます．

$$\mathcal{L}\left[X\right](\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log E\left[\exp\left(\sum_{i\in I} \lambda_i X_i^n\right)\right],$$

ここで $\lambda = (\lambda_i; i \in I)$ は d 次元実数値ベクトルです．

定義 1 は定義 2 の $d=1$ の場合ということに注意してください．$\mathcal{L}\left[\min_{i\in I} X_i\right](\theta), \theta \in \mathbb{R}$ は，$\min_{i\in I} X_i$ が一次元確率変数列ですので，定義 1 によって定義されます．

定理の記述に必要ないくつかの定義を与えます．

定義 3. 任意に与えられた関数 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対し，ルジャンドル–フェンシェル変換（LF 変換）を施したものを f^* で表します．具体的に次のように定義します．

$$f^*(x) \equiv \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i - f(\lambda)\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

定義 4. 任意に与えられた確率変数ベクトル X^n が良い率関数 $\gamma(x)$ を伴う大偏差原理を満たすとは，$\gamma(x)$ のレベル集合がコンパクトかつ，次の二つの不等式が成立することを意味します．

(i) 任意の閉集合 $F \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(X^n \in F\right) \le -\inf_{x\in F} \gamma(x).$$

(ii) 任意の開集合 $G \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(X^n \in G\right) \ge -\inf_{x\in G} \gamma(x).$$

定義 4 は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(X^n \in A) = -\inf_{x\in A} \gamma(x) \tag{14}$$

または十分大きい n に対して，

$$P(X^n \in A) \sim e^{-n \inf_{x\in A} \gamma(x)}$$

をより弱い形（より一般的な形）で表現したものです．ですので，厳密な記述よりも直感的理解を優先されるときは，この等式または近似式を，大偏差原理として読み替えられると見通しがよくなるかもしれません．例えば，$A = (x, x+dx]$ とおいて

$$P(x < X^n \le x+dx) \sim e^{-n\gamma(x)} dx, \quad (n \text{ は十分大}), \tag{15}$$

という粗い評価ができます．

これで最小統計量のラプラス極限についての主要な結果の一つを記述する準備ができました．

定理 1. (i) X^n の分布が良い率関数 $\mathcal{L}_X^*(x)$ を伴う大偏差原理を満たし，(ii) 各 n に対して，X^n の取りうる値が有界であるならば，以下の等式が成立します．

$$\mathcal{L}\left[\min_{i\in I} X_i\right](\theta) = \inf_{\lambda\in C(I)} \mathcal{L}\left[X\right](\theta\lambda), \quad \theta \ge 0,$$

$$C(I) \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{R}^d; \forall i \in I, \lambda_i \ge 0, \sum_{i\in I} \lambda_i = 1\right\}.$$

定理 1 の証明の概要は，次のとおりです．証明は以下の三つのステップによって構成されます．

(i) ヴァラッドハンの定理 ([7] Section4.3) の適用

(ii) ミニマックス定理（[8]7 章）の適用

(iii) 計算可能な項の整理

確率変数の世界における演算子 min はその最小統計量を構成する確率変数群の結合ラプラス極限の $C(I)$ 上での最小値という形に変形できます．もし $X_1, \ldots, X_d$ が互いに独立な一次元確率変数列である場合，

$$\inf_{\lambda\in C(I)} \mathcal{L}\left[X\right](\theta\lambda) = (\mathcal{L}[X_1]\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}[X_d])(\theta)$$

と書けます．ここで $\otimes$ は $(min, +)$-代数下における畳込み演算を表します．

$$(f\otimes g)(x) = \min_{0\le y\le x} f(x-y)+g(y).$$

このように，$\inf_{\lambda\in C(I)} \mathcal{L}\left[X\right](\theta\lambda)$ は，畳込み演算の一般化としてみることもできますので，d 変数関数 F に対しての単項作用素 $\otimes$ を次のように表します．

$$(\otimes\circ F)(x) = \inf_{\lambda\in C(I)} F(x\lambda).$$

また

$$\min_{i\in I} X_i = \min\circ X$$

と形式的な表記をします．これらの記号を用いると，定理 1 の結果は

$$\mathcal{L}\circ\min = \otimes\circ\mathcal{L}$$

と書けます．この式の意味するのはラプラス極限作用素と最小作用素の順番を入れ替えると最小作用素は一般化畳み込み作用素に変化することです．

定理 1 の結果は，λ として d 次元単位ベクトル

$$(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$$

だけを選ぶようにすると従来法における上界より良いか等しいことは明らかです．特に $d=2$ のとき，

$$f(\theta) = \inf_{0\le\lambda\le 1} \mathcal{L}\left[X\right](\theta\lambda, \theta(1-\lambda)),$$
$$g(\theta) = \min(\mathcal{L}\left[X_1\right](\theta), \mathcal{L}\left[X_2\right](\theta))$$

が一致するための必要十分条件は f の最適解 $\lambda=\lambda^*$ が $(0,1)$ の外にあることです．$\lambda^*\in(0,1)$ のときは真に f の方が g より良い評価になります．

定理 1 の条件 (i) は例えば X^n が n 個の独立で同一な確率変数の標本平均のときはクラメールの定理によって保証されます．したがって，標本平均からなる最小統計量のラプラス極限は正確に計算できます．

定理 1 はラプラス極限を求めるだけの定理でしたが，$(\otimes\circ\mathcal{L}[X])$ がゲルトナー–エリスの定理の仮定を満たす場合，その LF 変換 $(\otimes\circ\mathcal{L}[X])^*$ を率関数とする大偏差原理が成立することもわかりますので，正確に漸近対数補分布が求められます．したがって，$(\otimes\circ\mathcal{L}[X])$ の凸性と本質的な滑らかさを調べることはとても重要な問題です．

定義 5 ([7] Section 2.3)**.** 凸関数 $f:\mathbb{R}^d\to(-\infty,\infty]$ が本質的に滑らかとは，次の三条件を満たすことを言います．

(i) $\{\lambda\in\mathbb{R}^d; f(\lambda)<\infty\}$ の内部が空ではない

(ii) f は $\{\lambda\in\mathbb{R}^d; f(\lambda)<\infty\}$ の内部において微分可能

(iii) f は急勾配 (*steep*)，すなわち $\lim_{n\to\infty}|\nabla f(\lambda_n)|=\infty$，ここで $\{\lambda_n\}$ は $\{\lambda\in\mathbb{R}^d; f(\lambda)<\infty\}$ の内部に対する境界に収束する点列とします

次の定理も証明可能です．

定理 2. $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ が凸かつ本質的に滑らかであるとき，$(\otimes\circ F)$ も凸かつ本質的に滑らかです．

$\otimes\circ F$ の凸性は F 自身の凸性と min の性質を組み合わせることで導けます．$\otimes\circ F$ の本質的滑らかさの確認のうち条件 (i)(iii) は $\otimes\circ F$ が F の一部から作られていて θ_n を ∞ への点列としたときに，F の構造をそのまま引き継げるために言えます．条件 (ii) は陰関数定理によります．

4. おわりに

本稿では，FIFO マルチプレクサの部分バックログの確率ネットワーク算法を紹介し，特に最小統計量のラプラス極限の評価を改善しました（定理 1，定理 2）．和の統計量については，それ自身が結合ラプラス極限になるため計算は不必要です．最大統計量のラプラス極限は従来法ですでに等式による評価が与えられていますが，定理 2 に相当する議論は行われていません．実は，F が凸，微分可能，急勾配であったとしても $\max\circ F$ の微分可能性は必ずしも保存されません．したがって，大偏差原理を満たすためのより強い条件を見つける必要があります．

本稿では，従来法の実効帯域の多変数拡張については述べませんでした．この拡張を伴って初めて従来法の精度と提案手法の精度が比較できるようになります．多変数化することで精度が上がることは十分期待できま

すが，実際に比較してみなければそれはわかりません．

本稿では FIFO マルチプレクサの部分バックログの問題のみを考えましたが，出力過程は次のノードの入力過程になるため，出力過程についても考慮する必要があります．出力過程は $A_1^L(0,t) - Q_1^L(t)$ ですから，やはり基本演算子で表現されます．しかも min 演算子の数が $(t+1)(t+2)/2$ 個になります．本稿の定理 1 はそのような場合にも適用できます．

多変数化拡張において，$X_1, \ldots, X_d$ 間の独立性は特に必要としません．独立性が仮定から排除されていることは非常に強力です．解析上，独立性がない部分の評価は困難を伴うことが多いのですが，それを乗り越えることができる糸口として，期待しています．特にループ構造を伴うネットワークモデルの解析では，この問題に多くぶつかります．

謝辞　執筆にあたり，佐久間大先生，小沢利久先生から非常に参考になるコメントをいただきました．ここに深く感謝の意を表明したいと思います．

参考文献

[1] C. S. Chang, *Performance Guarantees in Communications Networks*, Springer, 2000.
[2] J. Y. Le Boudec and P. Thiran, *Network Calculus: A Theory of Deterministic Queueing Systems for the Internet*, Springer, 2004.
[3] F. Kelly, "Notes on effective bandwidths," *Stochastic Networks: Theory and Applications*, Oxford University Press, 141–168, 1996.
[4] Y. Jiang and Y. Liu, *Stochastic Network Calculus*, Springer, 2008.
[5] M. Fidler, "An end-to-end probabilistic network calculus with moment generating functions," *Proc. of IEEE IWQoS 2006*, 261–270, 2006.
[6] K. Kobayashi, Y. Takahashi and H. Takada, "A stochastic network calculus with many flows," *Proc. of ITC 21*, 10 pages, 2009.
[7] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett, 1993.
[8] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
[9] R. Cruz, "A calculus for network delay, part I: Network elements in isolation," *IEEE Transactions on Information Theory*, **37**, 114–131, 1991.
[10] 高田寛之，小林和朝，"FIFO マルチプレクサにおける部分待ち行列長の陽表現，" 待ち行列シンポジウム報文集, 230–236, 2008.

