反射型ランダムウォークの漸近解析

小林　正弘

待ち行列ネットワークや並列型待ち行列モデルにおいて，定常分布が解析的表現で求まるモデルは少ないです．ここで，定常分布が「解析的表現を持つ」とは，モデルのパラメータのみを使って，理論的に定常分布を求めることができることを表します．定常分布が解析的表現で求まらない待ち行列モデルに対しては，裾の漸近解析を行うことにより，性能評価を与えることができます．本稿では，待ち行列モデルの一般形である反射型ランダムウォークの裾の漸近特性について紹介します．

キーワード：反射型ランダムウォーク，待ち行列ネットワーク，最小待ち行列選択式モデル，定常分布，漸近特性

1. はじめに

待ち行列モデルには大きく分けると，単一型待ち行列，つまり待ち行列が1本であるモデルと，待ち行列が複数本あるモデルに分類できます．本稿では，単一型待ち行列ではなく，待ち行列が複数本あるモデルに注目します．待ち行列が複数本あるモデルの代表例としては，待ち行列ネットワークや並列型待ち行列モデルなどが挙げられます．

待ち行列モデルの性能評価をする際には，客の立場で考える性能評価とサービスを提供する側から考える性能評価の2種類があります．客の立場で性能評価を考える場合，到着した直後の客が何分待つかを与えることが重要であり，待ち行列の過渡解析が必要となります．逆に，サービスを提供する側から性能評価をする場合は，システムを稼働している際の性能評価も考えられますが，システムが頻繁に混雑を起こさないように，設計段階での性能評価が重要となってきます．その場合，システムが長時間稼働したときの待ち人数や待ち時間，つまり，平均待ち時間や平均待ち人数が重要な指標となります．待ち行列モデルに対して，系内客数の定常分布もしくはモーメントを求めることができれば，これらの指標は理論的に計算が可能です．本稿では，待ち行列のシステム設計の指標である，系内客数の定常分布（以下，単に定常分布と呼びます）に焦点を当てます．

単一型待ち行列モデルでは，定常分布が解析的表現で求まるモデルも多い（もちろん，解析的表現でも求まらないモデルも存在します）ですが，待ち行列が複数本あるモデルについては，ジャクソンネットワークなどの特殊なモデルを除いて，定常分布を解析的表現で求めることは難しいです．しかし，待ち行列を通信ネットワークや生産工程，身近なところならば空港の待ち行列など，それらに応用する際，待ち行列が複数本あるモデルが必要であり，客の到着過程がポアソン過程，サービス時間分布が指数分布というジャクソンネットワークの仮定を満たさない場合が多いです．つまり，それらのモデルに対しては，定常分布を直接求めることは非常に難しいです．そこで，多くの研究では，定常分布の裾に注目し，その漸近特性を求めています．定常分布の裾の漸近特性を求めることができれば，大きな混雑が起こる確率などを近似的に求めることができ，システム設計の際の性能評価に役立ちます．

多くの待ち行列モデルを部分集合として含む確率過程として，反射型ランダムウォークがあります．反射型ランダムウォークは，待ち行列のみならず，ファイナンスや生物工学などにも応用される，非常に一般性の高いモデルです．本稿では，まず，複数本あるモデルの一般形として，反射型ランダムウォークの漸近解析について取り上げたいと思います．その応用例として，2ノード待ち行列ネットワークと最小待ち行列選択方式待ち行列モデルを例に，定常分布の裾の漸近特性について紹介したいと思います．

2. 裾の漸近特性

本節では，準備として，裾の漸近特性の定義，およびその性質に触れたいと思います．まず，本稿全体で$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$を確率空間とします．本稿における裾の漸近特性は，簡単のため全て非負離散型確率変数を扱いま

こばやし　まさひろ
東京理科大学理工学部情報科学科
〒278–8510 千葉県野田市山崎2641

す．$\mathbb{Z}_+$ を非負整数全体の集合，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{R}_+$ を非負実数全体の集合とします．また，本節では $X:\Omega \to \mathbb{Z}_+$ を確率変数とします．

まず確率変数 X の裾について，「裾が軽い」と「裾が重い」の分類を以下のように与えます．

定義 2.1（軽い裾と重い裾）．非負離散型確率変数 X に対して

(i) $E(e^{\theta X}) < \infty$ を満たす $\theta > 0$ が存在する場合，X は軽い裾を持つという．

(ii) $E(e^{\theta X}) < \infty$ を満たす $\theta > 0$ が存在しない場合，X は重い裾を持つという．

ここで，X の期待値や分散が存在したとしても，X の裾が重い場合があるので，注意が必要です．例えば X がパレート分布に従う場合，期待値や分散は存在しますが，$\theta > 0$ となる積率母関数は存在しないため，裾が重い分布となります．

本稿では，分類 (i) である定常分布が軽い裾を持つ場合を扱います．以下で，確率変数 X に対して，厳密な漸近特性と粗い漸近特性を定義します．

定義 2.2（厳密な漸近特性）．非負離散型確率変数 X に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X=n)}{f(n)} = 1 \tag{2.1}$$

を満たす関数 $f:\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ を確率変数 X に対する厳密な漸近特性と呼ぶ．

定義 2.3（粗い漸近特性）．非負離散型確率変数 X に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(X=n) = -\alpha \tag{2.2}$$

を満たす $\alpha > 0$ を確率変数 X に対する粗い漸近特性または減少率と呼ぶ．

ここで，b を正の定数とし

$$f(n) = be^{-\alpha n} \tag{2.3}$$

が (2.1) を満たす場合，X は幾何漸近特性を持つと呼びます．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f(n) = -\alpha$$

であるので，厳密な漸近特性により，(2.2) の粗い漸近特性も求まります．$M/M/1$ や $M/G/1$ 待ち行列さらにはジャクソンネットワークなどにおいては，定常分布が存在しかつ軽い裾を持てば必ず幾何的に減少します．一方，到着やサービスに背後状態がある待ち行列モデルや一般の待ち行列ネットワークについては，必ずしも幾何漸近特性を持つとは限りません．一般に待ち行列モデルにおいて，定常分布の裾が軽い場合は，$b > 0$ と $\kappa \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(n) = bn^{\kappa} e^{-\alpha n}$$

となる漸近特性が求まることが予想されます（[1] 参照）．

例 2.1（$M/M/1$ 待ち行列）．到着率 λ，平均サービス時間 μ^{-1} である $M/M/1$ 待ち行列において，$\lambda < \mu$ を満たすとき，系内客数の定常分布は存在します．$\rho = \lambda/\mu$ とすると，定常分布 π は

$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

で与えられます．よって，X を $M/M/1$ 待ち行列の定常分布に従う確率変数（定常分布は，時刻に依存しない確率分布であるので，確率変数を用いて定義できることに注意）とすると

$$f(n) = \pi(n) = (1-\rho)\rho^n$$

とすれば，(2.1) を満たすので，この f は $M/M/1$ 待ち行列の厳密な漸近特性となります．

$M/M/1$ 待ち行列のように，定常分布を解析的表現で求めることができれば，もちろん漸近特性も求めることができます．しかし，定常分布が求まらないモデルでは，漸近特性を直接定常分布から求めることができないので，いくつかのアイディアが必要となります．

3. 反射型ランダムウォーク

待ち行列モデルの系内客数は連続時間型確率過程であるのに対して，ランダムウォークは離散時間型確率過程です．これらのモデルは違うモデルに見えますが，連続時間型確率過程から定常分布が一致するような離散時間型確率過程を作ることが可能です．この手法は一様化と呼ばれます（例えば [2] など参照）．また，待ち行列ネットワークの多くは，一様化により反射型ランダムウォークで表現することができます．例えば，ジャクソンネットワークやそれに集団到着や同時到着，協力サービス型サーバなどをモデルの仮定として加えても，それらは反射型ランダムウォークで表現できます（[3〜5] など参照）．つまり，それらの待ち行列ネットワークの定常分布の漸近解析は，反射型ランダムウォークの定常分布の漸近特性を求めることにより実現する

ことができます．よって，多くの待ち行列ネットワークを特殊例として含む反射型ランダムウォークの漸近解析は非常に重要であることが言えます．そこで，本節では反射型ランダムウォークの漸近特性について述べたいと思います．

まず反射型ランダムウォークを簡単に紹介します．整数値をとる離散時間型確率過程に対して，一様な推移確率を持つ確率過程をランダムウォークと呼びます．ランダムウォークに対して，値を非負整数に制限し，境界に反射壁を作る，そしてその反射壁でも一様な推移を持つ場合，その確率過程を反射型ランダムウォークと呼びます．

以下では，反射型ランダムウォークの定義を与えます．d を自然数とし，以下の記号を使います．

- $J = \{1, 2, \ldots, d\}$.
- $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_+^d$: 状態空間.
- $\{\boldsymbol{Z}_\ell = (Z_{\ell 1}, Z_{\ell 2}, \ldots Z_{\ell d}) \in \mathcal{S}; \ell \in \mathbb{Z}_+\}$: 状態空間 $\mathcal{S}$ を持つ離散時間型マルコフ連鎖.

$A \subset J$ に対して，$\mathcal{S}_A$ を

$$\mathcal{S}_A = \{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}; s_k \geq 1, k \in A, s_{k'} = 0, k' \in J \setminus A\}$$

とします．例えば，$\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}_J$ であるとき，任意の $k = 1, 2, \ldots, d$ に対して，$s_k \geq 1$ を満たします．また，$\mathcal{S}_A$ は $\mathcal{S}$ の有限分割となります．すなわち，$A, A' \subset J$ $(A \neq A')$ に対して，$\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_{A'} = \emptyset$ かつ $\mathcal{S} = \cup_{A \subset J} \mathcal{S}_A$ を満たします．さらに $A \subset J$ に対して，$\boldsymbol{X}^A \equiv (X_1^A, X_2^A, \ldots, X_d^A)$ を互いに独立で，各要素が -1 以上の整数値をとる離散型確率変数ベクトルとします．ここで，$k \in A$ に対して，$X_k^A \geq -1$，$k' \in J \setminus A$ に対して，$X_{k'}^A \geq 0$ であると仮定します．例えば，$\boldsymbol{X}^J$ は，任意の k に対して，$X_k^J \geq -1$ を満たす確率変数ベクトルであり，$\boldsymbol{X}^\emptyset$ は任意の k に対して，$X_k^\emptyset \geq 0$ を満たす確率変数ベクトルとなります．

定義 3.1（反射型ランダムウォーク）**.** $\ell \in \mathbb{Z}_+, A \subset J, \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}_A, \boldsymbol{s}' \in \mathcal{S}$ に対して $\boldsymbol{Z}_\ell$ が

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Z}_{\ell+1} = \boldsymbol{s}' | \boldsymbol{Z}_\ell = \boldsymbol{s}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X}^A = \boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}) \quad (3.1)$$

を満たすとき，離散時間型マルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Z}_\ell\}$ を d 次元反射型ランダムウォークと呼ぶ.

(3.1) は以下の式と同値となります．

$$\boldsymbol{Z}_{\ell+1} = \boldsymbol{Z}_\ell + \sum_{A \subset J} \boldsymbol{X}_\ell^A 1(\boldsymbol{Z}_\ell \in \mathcal{S}_A) \quad (3.2)$$

ただし，$1(\cdot)$ は定義関数であり，$\boldsymbol{X}_\ell^A$ は各々独立であり，$\boldsymbol{X}_\ell^A$ は $\boldsymbol{X}^A$ と同一分布に従う確率変数ベクトル

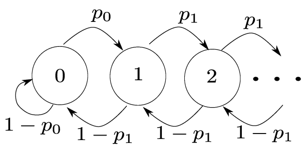

図 1 1 次元反射型ランダムウォークの推移図

とします．(3.2) を満たす $\{\boldsymbol{Z}_\ell\}$ も，反射型ランダムウォークと呼ばれます（詳しくは [1] 参照）．また，反射型ランダムウォークが非周期かつ既約で定常分布が存在する場合，(3.2) を使って，定常方程式

$$\boldsymbol{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \boldsymbol{Z} + \sum_{A \subset J} \boldsymbol{X}^A 1(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_A) \quad (3.3)$$

が求まります．ここで，$\boldsymbol{Z}$ は定常分布に従う確率変数を表し，$\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ は分布の意味での等式を表します．

例 3.1（1 次元反射型ランダムウォーク）**.** $d = 1$ とすると，$\boldsymbol{Z}_\ell = Z_{\ell 1}$，$\boldsymbol{X}^A = X_1^A$ となり，(3.1)（または (3.2)）を満たす $\{Z_{\ell 1}\}$ は 1 次元反射型ランダムウォークとなります．この場合，p_0，$p_1 \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\mathbb{P}(X_1^\emptyset = 1) = p_0, \qquad \mathbb{P}(X_1^\emptyset = 0) = 1 - p_0,$$
$$\mathbb{P}(X_1^{\{1\}} = 1) = p_1, \qquad \mathbb{P}(X_1^{\{1\}} = -1) = 1 - p_1$$

と与えることができます．$\{Z_{\ell 1}\}$ は出生死滅過程とも呼ばれ，$\{Z_{\ell 1}\}$ の推移図は図 1 により与えられます．

3.1 定常分布の漸近解析について

d 次元反射型ランダムウォークの定常分布を解析的表現で求めることは，非常に困難であり，多くの研究では，定常分布の裾の漸近特性を理論的に求めています．では，定常分布が求まらないモデルに対して，漸近解析をどのように行うのでしょうか．ここで，反射型ランダムウォークの定常分布の漸近解析について，代表的な手法を紹介したいと思います（詳しくは [1] 参照）．

(i) 大偏差理論

[6, 7] などで紹介されている大偏差理論を用いて，定常分布の減少率を求める手法です．大偏差理論を使った漸近解析では，より一般的な確率過程や待ち行列モデルを対象に扱うことができます．一方，大偏差理論における率関数が非常に複雑になる場合が多く，理論的にはもちろん数値計算でも率関数が解けない場合があります．

(ii) 行列解析法

反射型ランダムウォークの変化量に関するベクトル $\boldsymbol{X}^A$ に対して，全ての要素が 1 以下と仮定すると，準出生死滅過程（準出生死滅過程については [2, 8] など

参照）でも表現することが可能です．この，準出生死滅過程の定常分布は率行列によって決まることが知られています（[2, 8] など参照）．この「定常分布が率行列で表現できる」という特性を使うと，定常分布の幾何漸近特性が求まる場合があります．ただし，パラメータの条件によっては，行列解析法では定常分布の漸近特性が求まらない場合もあります．

(iii) マルコフ加法過程

反射型ランダムウォークにおける定常分布の漸近解析の難しさは，境界において推移確率が変化することにあり，その境界が可算無限集合であることが一つの要因となります．そこで，一部境界を取り除くことにより，いったん簡単なモデルで漸近特性を求め，それを元のモデルの漸近解析に利用する方法があります．境界を取り除いた反射型ランダムウォークをマルコフ加法過程と呼び，そのマルコフ加法過程の定常分布に相当する，占有測度の漸近特性により，反射型ランダムウォークにおける定常分布の減少率の下界を求めることができます（[4, 5] 参照）．

(iv) 積率母関数の収束領域

反射型ランダムウォークの定常分布の積率母関数が収束する領域を求めることにより，定常分布の減少率の上界を求めることができます（[1, 4] などを参照）．この収束領域は，定常方程式 (3.3) から求まる定常不等式（[1] の式 (6.3) など参照）と (i) の大偏差理論を使うことにより，求めることができます．

(v) 複素関数解析

(3.3) より，定常分布の積率母関数に関する定常方程式を求めることが可能です．この積率母関数に関する定常方程式を複素平面に拡張し，解析接続等を使うことにより，(iv) より求めた収束領域の特異点を分類することができ，定常分布の厳密な漸近特性を求めることができます（[3] 参照）．この手法は現在，$d=2$ かつ $\boldsymbol{X}^A$ の各要素が 1 以下の反射型ランダムウォークのみに適用されており，$d \geq 3$ の場合や $\boldsymbol{X}^A$ が有界でない場合には適用が難しいです．

以上が定常分布の漸近特性を求める際，主に使われている手法です．これらの手法は，現在 $d=2$，つまり 2 次元の反射型ランダムウォークに適用されている場合が多く，2 次元反射型ランダムウォークの漸近特性については，多くの研究があります．そこで，以下では 2 次元反射型ランダムウォークの結果について述べたいと思います．

以下では，2 次元反射型ランダムウォークが非周期かつ既約であり，定常分布が存在すると仮定します．2 次元反射型ランダムウォークの定常分布が存在する条件，つまり安定条件については，[4, 9] などで知られています．

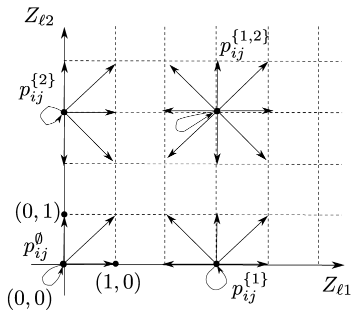

図 2　2 次元反射型ランダムウォークの推移図の例

$d=2$ であるので，状態空間は $\mathcal{S}=\mathbb{Z}_+^2$ で与えられ，$\boldsymbol{Z}_\ell=(Z_{\ell 1}, Z_{\ell 2})$, $\boldsymbol{X}^A=(X_1^A, X_2^A)$ となります．また，集合 A は，$A \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ を満たします．ここで，$i, j=-1,0,1,2,\ldots$ に対して

$$p_{ij}^A = \mathbb{P}(\boldsymbol{X}^A = (i,j))$$

とします．このとき，$\boldsymbol{X}^A \leq (1,1)$, つまり各要素の変化量を 1 以下に制限したとき，$\{\boldsymbol{Z}_\ell\}$ の推移図は図 2 により与えられます．

2 次元反射型ランダムウォークに対し，[6] では，(i) の手法である大偏差理論と (iii) の手法であるマルコフ加法過程を使って，定常分布の減少率を得ています．しかし，その減少率の計算は，数値計算すら困難な形となっています．そこで，[5] では，変化量を 1 以下に限定した（つまり，$\boldsymbol{X}^A \leq (1,1)$ を満たす）2 次元反射型ランダムウォークに対して，(i)–(iii) を使い，モデルパラメータのみを使って，定常分布の厳密な漸近特性を理論的に求めています．ここで，$\boldsymbol{X}^A \leq (1,1)$ を満たす 2 次元反射型ランダムウォークを 2 重出生死滅過程と呼ぶことにします．その漸近特性は，定常分布に従う確率変数 $\boldsymbol{Z}=(Z_1, Z_2)$ と，$i=1,2$ に対して，$f(n)=c_{ik} n^{-\kappa} e^{-n\alpha_i}$，つまり

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_i = n, Z_{3-i} = k)}{c_{ik} n^{-\kappa} e^{-n\alpha_i}} = 1 \qquad (3.4)$$

で与えられます．ここで，$c_{ik}>0$ は i と k に依存する定数，κ はモデルパラメータにより，$\kappa=0, 1/2, 3/2$ に分類することができます．また，α_i は定常分布の減少率であり，[5] では定常分布の減少率に関しても，モデルパラメータのみを使って表現しています．

[3] では，[5] と同じモデル，つまり 2 重出生死滅過程

に対して，その結果と (iv) および (v) の手法を使って，これらの結果を拡張させています．[3] では，任意方向の定常分布の厳密な漸近特性を求めています．ここで，任意方向の漸近特性とは，$c_1, c_2 \geq 0$ かつ $c_1^2 + c_2^2 = 1$ を満たす定数に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(c_1 Z_1 + c_2 Z_2 \geq n)}{g(n)} = 1$$

を満たす g を任意方向の漸近特性と呼びます．

[10] では，[5] のモデルを拡張させ，$Z_{\ell 1}$ および $Z_{\ell 2}$ が有限次元ベクトルであるような，2 次元反射型ランダムウォークに対して，漸近解析を行っています．このモデルを，背後過程のある 2 重準出生死滅過程と呼び，到着やサービスに背後状態がある待ち行列ネットワークなどに適用ができます．[10] では，基本行列における行列 2 次方程式の最小非負解を計算することにより，定常分布の漸近特性が求まる仕組みとなっています．

[4] では，$\boldsymbol{X}^A \leq (1,1)$ という仮定を取り除く，つまり変化量が上に有界でない 2 次元反射型ランダムウォークに対して，定常分布の漸近特性を求めています．[4] では，主に粗い漸近特性

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_i = n, Z_{3-i} = k) = -\alpha_i \quad (3.5)$$

を満たす α_i をモデルパラメータのみで表現しています．また，任意方向の漸近特性と厳密な漸近特性の一部も同時に求めています．

4. 待ち行列モデルへの応用

本節では，反射型ランダムウォークの漸近特性を待ち行列モデルに応用します．

4.1 協力サービスジャクソン型ネットワーク

待ち行列ネットワークの代表例であるジャクソンネットワークの定常分布は，解析的表現を持ち，定常分布を求めることが可能です．そのジャクソンネットワークのサービスに関して，片方のノードが空のときに，もう一方のサーバを協力するモデルに拡張すると，もはや定常分布は解析的表現を持ちません．では，サーバが協力するモデルは定常分布に対してどのような影響を与えるのでしょうか．本節では，定常分布の漸近特性への影響を紹介したいと思います．

モデルの仮定は以下のとおりです（図 3，図 4 参照）．

- 2 ノードの待ち行列ネットワーク
- 客は率 λ_i $(i = 1, 2)$ のポアソン過程でノード i に到着する．

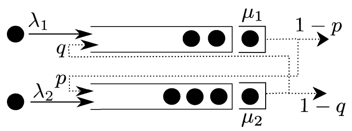

図 3　協力サービスジャクソン型ネットワーク

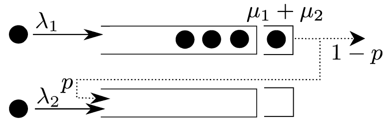

図 4　ノード 2 に客がいない場合

- 各ノードのサービス時間分布はそれぞれ平均 μ_i^{-1} $(i = 1, 2)$ の指数分布に従う．
- ノード 1 でサービスを終えた客は，確率 p でノード 2 に移り，確率 $1-p$ でネットワークから退去する．ノード 2 でサービスを終えた客は，確率 q でノード 1 に移り，確率 $1-q$ でネットワークから退去する．
- 片方のノードに客がいない場合，サーバ 2 台で客がいるノードをサービスする．つまり，平均サービス時間が $(\mu_1 + \mu_2)^{-1}$ となる．

この待ち行列ネットワークを協力サービスジャクソン型ネットワークと呼びます．もちろん，協力サービスジャクソン型ネットワークは 2 次元反射型ランダムウォークで表現可能であり，さらに，任意の $A \subset J$ に対して，$\boldsymbol{X}^A \leq (1,1)$ を満たすため，2 重出生死滅過程であると言えます．また，このネットワークの安定条件は，ジャクソンネットワークの安定条件と同様に

$$\rho_1 \equiv \frac{\lambda_1 + \lambda_2 q}{\mu_1(1-pq)} < 1, \quad \rho_2 \equiv \frac{\lambda_2 + \lambda_1 p}{\mu_2(1-pq)} < 1$$

で与えられます．

以下では，安定条件を仮定します．3 節で述べたように 2 重出生死滅過程の定常分布の漸近特性は [3, 11] などで求まっています．その漸近特性は積率母関数の収束領域の最大点で与えられます．また，収束領域は変化量の積率母関数によって決定されます（詳しくは [1, 3] 参照）．ここで，協力サービスジャクソン型ネットワーク（そのネットワークを一様化した反射型ランダムウォーク）の変化量の積率母関数を γ とします．つまり，$A \subset J = \{1.2\}$ に対して

$$\gamma_A(\boldsymbol{\theta}) = E(e^{\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}^A \rangle}), \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$$

です．ここで $\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}^A \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{X}^A$ の内積を

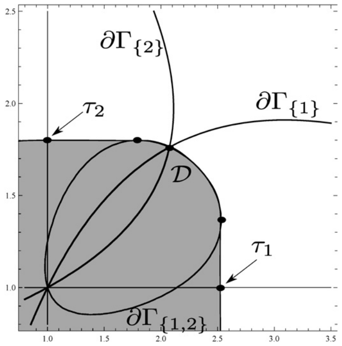

図 5　協力サービスジャクソン型ネットワーク収束領域の例

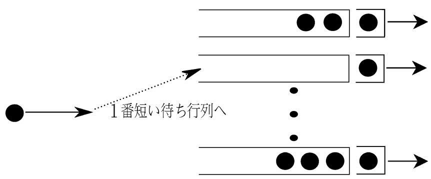

図 6　最小待ち行列選択式モデルの例

表します．$\partial\Gamma_A = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 : \gamma_A(\boldsymbol{\theta}) = 1\}$，収束領域を $\mathcal{D}$ とすると，収束領域は図 5 のように与えられます．

協力サービスジャクソン型ネットワークの漸近特性の特徴として，ノード i の減少率を τ_i とすると，ジャクソンネットワークのノード i の減少率 $\log \rho_i^{-1}$ より大きい，すなわち，$\tau_i > \log \rho_i^{-1}$ が必ず成り立ちます．ジャクソン型ネットワークは，ノードが空のときのみ協力するだけでも，その性能評価量は漸近特性という意味においても改善するという結果を得ることができます．

4.2　最小待ち行列選択式モデル

並列型待ち行列において，到着した客が最小待ち行列を選択するモデルを最小待ち行列選択式モデルと呼びます（図 6 参照）．

最小待ち行列選択式モデルにおいて，各待ち行列の系内客数からなるマルコフ連鎖は，反射型ランダムウォークになりません．それでも，状態空間を上手く取ることによって，最小待ち行列選択式モデルは反射型ランダムウォークで表現可能です．

モデルの仮定は以下のとおりです．

- k (≥ 2) 本の並列型待ち行列モデル．
- 客は率 λ のポアソン過程で到着し，到着した客は 1 番短い待ち行列を選ぶ．
- 待ち行列 i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ のサービス時間分布はそれぞれ平均 μ_i^{-1} の指数分布に従う．

$L_i(t)$ を時刻 t における i 番目の待ち行列の系内客数とします．$M(t)$ を時刻 t における最小待ち行列長，$Y_i(t)$ を i 番目の待ち行列長と最小待ち行列長の差，$\boldsymbol{Y}(t)$ を $Y_i(t)$ からなる確率変数ベクトルとします．つまり

$$M(t) = \min(L_1(t), L_2(t), \ldots, L_k(t)),$$
$$\boldsymbol{Y}(t) = (L_1(t) - M(t), \ldots, L_k(t) - M(t))$$

とします．$\{\boldsymbol{Z}(t); t \in \mathbb{R}_+\} = \{(M(t), \boldsymbol{Y}(t)); t \in \mathbb{R}_+\}$ は連続時間型マルコフ連鎖であり，それを一様化した離散時間型マルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Z}_\ell; \ell \in \mathbb{Z}_+\} = \{(M_\ell, \boldsymbol{Y}_\ell); \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ は，$d = k+1$ である反射型ランダムウォークとなります（詳しくは [12] 参照）．

ここで，表記の都合上，$J = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ として新たに定義し直します．すると，$Z_{\ell 0}$ は最小待ち行列長を表す確率変数となり，$Z_{\ell i} (i = 1, 2, \ldots, k)$ は i 番目の待ち行列長と最小待ち行列長の差を表す確率変数となります．また $\boldsymbol{Y}_\ell$ の i 番目の要素を $Y_{\ell i}$ とすると，$Y_{\ell i} = 0$ となる i が必ず存在するため，$\{\boldsymbol{Z}_\ell\}$ は境界のみを滞在する特殊な反射型ランダムウォークになります．また各状態の特徴についてですが，例えば $A = J \setminus \{1\}$ としたとき，$\mathcal{S}_{J\setminus\{1\}}$ という状態空間は，最小待ち行列長が 1 以上でありかつ待ち行列 1 のみが最小待ち行列であることを表します．そのときの変化量 $\boldsymbol{X}^{J\setminus\{1\}}$ の確率分布は

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}^{J\setminus\{1\}} = (j, \boldsymbol{v})) = \begin{cases} \lambda, & (j, \boldsymbol{v}) = (1, -\mathbf{1} + \mathbf{e}_1), \\ \mu_m, & (j, \boldsymbol{v}) = (0, -\mathbf{e}_m), \\ \mu_1, & (j, \boldsymbol{v}) = (-1, \mathbf{1} - \mathbf{e}_1), \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となります．ただし，$m \neq 1$，$\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 である k 次元の行ベクトルであり，$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ は i 番目の要素が 1 で他は 0 である k 次元の行ベクトルです．他の変化量についても，同じような推移確率を持ちます（詳しくは [12] 参照）．また，$\{\boldsymbol{Z}_\ell\}$ の定常分布の存在条件は

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i} < 1$$

として知られています（[13] 参照）．

$\boldsymbol{Z} = (M, \boldsymbol{Y})$ を最小待ち行列選択式モデルにおける反射型ランダムウォークの定常分布に従う確率変数とします．最小待ち行列選択式モデルの最小待ち行列長における定常分布の漸近特性は

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{P}(M = n, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{h})}{c_{\boldsymbol{h}} \rho^{kn}} = 1 \qquad (4.1)$$

であることが予想されてきました．ここで，$\boldsymbol{h} \in \mathbb{Z}_+^k$ であり，$c_{\boldsymbol{h}} > 0$ は $\boldsymbol{h}$ に依存した定数です．この予想は，待ち行列を 1 本にしたときの漸近特性と一致する，すなわち $M/M/k$ 待ち行列と同じであることを表しています（ただし，定数項は一致しない）．

(4.1) は，[14] で最初に証明されました．[14] では，待ち行列の本数が 2 本であること，サービス率が同じであること（つまり，$\mu_1 = \mu_2$）を仮定し，(4.1) が成立することを証明しています．

多くの研究が [14] の結果を拡張しています．[15] では，$\mu_1 = \mu_2$ を仮定しない，つまり，$\mu_1 \neq \mu_2$ と拡張したモデルについて，(4.1) を証明しています．[16] と [17] では，到着とサービスに背後状態が存在するモデルに対して，(4.1) を得ています．また，[11] や [13] では，最小待ち行列を選ぶ客のほかに，待ち行列を選べない客が存在する，一般化最小待ち行列選択式モデルに対して，漸近特性を得ています．[11] と [13] では，最小待ち行列を選ぶ客と待ち行列を選べない客の比率によって，(4.1) が成り立つ場合と成り立たない場合があることを示しています．ここまで紹介したモデルは，待ち行列が 2 本，つまり $k = 2$ であることを前提としています．一方，[12] では，待ち行列が一般の本数である場合にも，(4.1) が成立することを証明しています．

5. 終わりに

待ち行列ネットワークや並列型待ち行列において，漸近特性を求めることは非常に重要であることを述べてきました．しかし，漸近特性が求まっているモデルは限定されています．例えば，3 次元反射型ランダムウォークや行列 k 本である一般化最小待ち行列選択式モデルの漸近特性など未だ解決していない問題はたくさんあります．通信ネットワークなどの応用を考えますと，より高次元の反射型ランダムウォーク，到着やサービスを一般化したモデル，さらには客の振る舞いを一般化したモデルの解析が必要となります．本特集号の読者が漸近解析に興味を持っていただき，より一般化されたモデルの漸近解析について挑戦していただけると幸いです．また，定常分布の漸近解析を行うときには，(3.4)，(3.5)，さらには (4.1) のように，モデルパラメータのみを使って漸近特性を得ることが重要であることを強調し，本稿を終えたいと思います．

参考文献

[1] M. Miyazawa, “Light tail asymptotics in multidimensional reflecting processes for queueing networks,” *Top*, **19**, 233–299, 2011.

[2] 牧本直樹，『待ち行列アルゴリズム—行列解析アプローチ—』，朝倉書店，2001.

[3] M. Kobayashi and M. Miyazawa, “Revisit to the tail asymptotics of the double QBD process: Refinement and complete solutions for the coordinate and diagonal directions,” *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*, G. Latouche et al. (eds.), Springer, 145–185, 2013.

[4] M. Kobayashi and M. Miyazawa, “Tail asymptotics of the stationary distribution of a two dimensional reflecting random walk with unbounded upward jumps,” *Advances in Applied Probability*, **46**, 365–399, 2014.

[5] M. Miyazawa, “Tail decay rates in double QBD processes and related reflected random walks,” *Mathematics of Operations Research*, **34**, 547–575, 2009.

[6] A. A. Borovkov and A. A. Mogul’skii, “Large deviations for Markov chains in the positive quadrant,” *Russian Mathematical Surveys*, **56**, 803–916, 2001.

[7] P. Dupuis and R. S. Ellis, *A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.

[8] M. F. Neuts, “*Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*,” Johns Hopkins University Press, 1981.

[9] G. Fayolle, V. A. Malyshev, M. V. Menshikov, *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains*, Cambridge University Press, 1995.

[10] T. Ozawa, “Asymptotics for the stationary distribution in a discrete-time two-dimensional quasi-birth-and-death process,” *Queueing Systems*, **74**, 109–149, 2013.

[11] M. Miyazawa, “Two sided DQBD process and solutions to the tail decay rate problem and their applications to the generalized join shortest queue,” *Advances in Queueing Theory and Network Applications*, W. Yue et al. (eds.), Springer, 3–33, 2009.

[12] M. Kobayashi, Y. Sakuma and M. Miyazawa, “Join the shortest queue among k parallel queues: Tail asymptotics of its stationary distribution,” *Queueing Systems*, **74**, 303–332, 2013.

[13] R. D. Foley and D. R. McDonald, “Join the shortest queue: Stability and exact asymptotics,” *Annals of Applied Probability*, **11**, 569–607, 2001.

[14] J. F. C. Kingman, “The similar queues in parallel,” *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 1314–1323, 1961.

[15] Y. Takahashi, K. Fujimoto and N. Makimoto, “Geometric decay of the steady-state probabilities in a quasi-birth-and-death process with a countable number of phases,” *Stochastic Models*, **17**, 1–24, 2001.

[16] Y. Sakuma, “Asymptotic behavior for MArP/PH/2 queue with join the shortest queue discipline,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54**, 46–64, 2011.

[17] Y. Sakuma, M. Miyazawa and Y. Q. Zhao, “Decay rate for a PH/M/2 queue with shortest queue discipline,” *Queueing Systems*, **53**, 189–202, 2006.

