# 待ち行列ネットワークの安定性

小沢　利久

ネットワークは OR の様々な分野において重要なモデルの一つであるが，ノード間における相互作用の影響で複雑な性質を示すことが多い．**待ち行列ネットワーク** (queueing network) も例外ではなく，複数の客クラスを導入し，様々なサービス規律を考えることで挙動が複雑になり，モデルが安定であるか否か（定常分布が存在するか否か）を知ることも困難となる場合がある．本稿では，そのような待ち行列ネットワークの複雑な側面を Lu-Kumar network と呼ばれる比較的シンプルな複数クラス待ち行列ネットワークを通して解説するとともに，**流体モデル** (fluid model) と呼ばれる確定的なモデルを用いて待ち行列ネットワークの安定性を解析する方法を紹介する．

キーワード：待ち行列ネットワーク，安定性，正ハリス再帰，流体モデル，流体極限

## 1. はじめに

**待ち行列ネットワーク**（queueing network，以下では QNW と略す）とは，待ち行列がネットワーク状に繋がったモデルである．本稿では図 1 のような複数の客クラスを持つ QNW (multiclass queueing network) について見ていく．この QNW には，幾つかのステーション（ノード）があり，そこに何台かのサーバーが置かれ，客はクラスごとに異なる待ち行列を作り，ある順番に従ってサービスを受ける．サービスが終了した客は定められた確率に従って次の待ち行列へ進むか，あるいはシステムから退去する．クラス $k$ の客の待ち行列を $\mathrm{Q}_k$ とし，$\mathrm{Q}_k$ へは外部から到着率 $\lambda_k$ で客が到着し，$\mathrm{Q}_k$ に並んでいる客は平均サービス時間が $h_k$ のサービスを受けるものとする．$\mathrm{Q}_k$ でのサービスが終了した客は，確率 $r_{kl}$ で $\mathrm{Q}_l$ へ移動し（移動に伴って客クラスが $k$ から $l$ に変わる），確率 $r_{k0}$ でシステムから退去する．サーバーがステーション内のどの待ち行列の客を処理するかは予め定められたサービス規律に従う．図 1 はステーション数が 2，待ち行列数（客クラス数）が 4 のモデルである．

このような複数クラス QNW の例として，一人の作業員が複数種類の作業を分担して行う生産システムが挙げられる．この場合，作業員がステーションに対応し，分担した作業の要求が作業の種類ごとに待ち行列を作ると考える．その他にも文献 [1] で取り上げられている半導体製造システムが例として挙げられる．この文献では，一つの製造機械または複数の製造機械からなるサービス・センターを一つのステーションとし，ジョブがそれらサービスセンターを渡り歩くモデル（同じサービスセンターに戻ってくることもあるため，reentrant line と呼んでいる）を扱っている．

本稿ではこのような複数クラス QNW の安定性について最近の話題（といっても，ここ十数年にわたる研究結果の一部であるが）を解説していく．特に，**Lu-Kumar network**（LK-NW と略す）と呼ばれる最も基本的な reentrant line のモデル（図 1 で $\lambda_3 = 0$, $r_{1,4} = r_{2,0} = 0$, $r_{1,2} = r_{2,3} = 1$ としたモデル）を中心に見ていく．このモデルは，複数の客クラスを持つ QNW の複雑さを端的に表しているモデルの一つとなっている．なお，この段階では，QNW が**安定** (stable) であるとは，時間がいくら経過してもネットワーク内の総滞在客数が発散しないことを意味すると思っていただきたい．

## 2. QNW の安定性と名目条件

到着率を $\lambda$，平均サービス時間を $h$，トラフィック密度を $\rho = \lambda h$ とする M/M/1 の滞在客数過程 $\{X(t)\}$ は，$\rho < 1$ であればマルコフ連鎖として**正再帰的** (positive recurrent) となる．ここで，既約なマルコフ連鎖

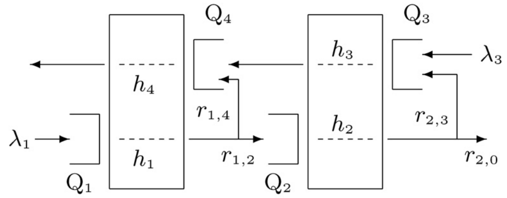


**図 1**　複数クラス QNW

おざわ　としひさ
駒澤大学経営学部
〒 154–8525 東京都世田谷区駒沢 1–23–1

が正再帰的であるとは，どの状態から出発してもその状態に確率 1 で戻ってくる（再帰的）とともに，戻ってくるまでの時間の期待値が有限である場合をいう．$\{X(t)\}$ が正再帰的であれば滞在客数が発散することはないので，待ち行列は安定となる．$\rho < 1$ は，トラフィック密度がサーバー能力（サーバーが単位時間当りに処理できる仕事量）より小さいという条件になっている．

最も基本的な QNW である**ジャクソン・ネットワーク** (Jackson network) は，各ステーションにちょうど一つの待ち行列があるモデルとなっている（よって，客クラスを考える必要がないので単一クラスの QNW という）．ここでは，客がネットワークの外部から入ってきて，幾つかの待ち行列を巡り，外部へ出て行く開放型のネットワークを考える．外部からの到着はポアソン過程に従い，サービス時間は指数分布に従う．各ステーションのサーバー数は 1 台とする．QNW 内の待ち行列の数を $K$（ステーション数に一致），外部または他の待ち行列から待ち行列 $\mathrm{Q}_k$ $(1 \le k \le K)$ へ単位時間あたりに到着する平均客数を $\alpha_k$ とし，$\rho_k = \alpha_k h_k$ とする（$\alpha_k$ は後で述べるトラフィック方程式の解として与えられる）．また，$X_k(t)$ を時点 $t$ で $\mathrm{Q}_k$ にいるサービス中を含めた客数（滞在客数）とし，そのベクトルを $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_K(t))$ とする．このとき，ベクトル過程 $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は既約なマルコフ連鎖となり，すべての $k$ について，$\rho_k < 1$ であれば，そのマルコフ連鎖は正再帰的となり，ジャクソン・ネットワークは安定となる．

さらに，外部から $\mathrm{Q}_k$ への客の到着間隔が独立で同一な一般分布に従うとし，各待ち行列でのサービス時間も一般の分布に従うように拡張した**一般化ジャクソン・ネットワーク** (generalized Jackson network) についても，すべての $k$ について $\rho_k$ を同様に定義し，それが $\rho_k < 1$ を満たせば，その QNW は安定となることがわかっている．この条件も，待ち行列ごとに（ステーションごとに），トラフィック密度がサーバー能力より小さいという条件となっている．

このことを複数クラス QNW の場合に当てはめてみる．ステーション数を $J$ とし，$\mathcal{C}_j$ をステーション $j$ にある待ち行列の集合（客クラスの集合）とする．各ステーションのサーバー数はすべて 1 台とする．その他の記号についてはジャクソン・ネットワークと同じものを用いる．ステーション $j$ のトラフィック密度 $a_j$ は，待ち行列 $\mathrm{Q}_k$ のトラフィック密度 $\rho_k$ を用いて，$a_j = \sum_{k \in \mathcal{C}_j} \rho_k$ で与えられる．サーバーはステーションごとに配置されているので，各ステーションのトラフィック密度がそのステーションのサーバー能力（サーバー数は 1）より小さいという条件

$$a_j < 1, \ 1 \le j \le J, \tag{1}$$

を考え，これを**名目条件** (nominal condition) と呼ぶことにする．ステーションに客がいればサーバーは必ずサービスを行うというルールに従う (**work-conserving**) ならば，すべてのサーバー能力が有効に使用されることになり，直感的には名目条件が，QNW が安定である条件になると予想される．実際，ジャクソン・ネットワークや一般化ジャクソン・ネットワーク（単一客クラスの QNW）については，名目条件が安定であるための十分条件となっている [2, 3]．しかし，複数クラスの QNW では必ずしもそうならない．次節でそのことを見ていく．なお，名目条件を強い意味で満たしていない（$a_j > 1$ となるステーションが少なくとも一つある）ならば，QNW は不安定となる．

## 3. 不安定な複数クラス QNW

複数クラス QNW では，ステーション間の相互作用により各ステーションのサーバー能力を有効に使いきれないという現象が生じ，そのため，名目条件が安定であるための十分条件とはならない場合がある．それを割込み優先権のある LK-NW について見ていく（図 2）．各ステーションのサーバー数を 1 台とし，ステーション 1 ではクラス 4 ($\mathrm{Q}_4$) の客がクラス 1 ($\mathrm{Q}_1$) の客に対して**割込み優先** (preemptive priority) で処理される．ここで，**割込み優先サービス** (preemptive priority service) とは，一般クラスの客のサービス中であっても，優先クラスの客が到着したら，その客のサービスを中断して到着した優先クラスの客を処理する優先権サービスのことである．同じクラスの客は先着順に処理される (FIFO)．ステーション 2 ではクラス 2 ($\mathrm{Q}_2$) の客がクラス 3 ($\mathrm{Q}_3$) の客に対して割込み優先で処理される．外部からは $\mathrm{Q}_1$ へのみポアソン過程に従って客が到着し，到着した客は $\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{Q}_3$，$\mathrm{Q}_4$ の順に待ち行列を巡り，指数分布に従うサービスを受ける．到着率，平均サービス時間，トラフィック密度の記号は前節と同じものを用いる．なお，外部から到着したどの客も各待ち行列をちょうど 1 回だけ訪れるので，待ち行列 $\mathrm{Q}_k$ $(k = 1, \ldots, 4)$ の到着率は $\alpha_k = \lambda_1$ となり，トラフィック密度は $\rho_k = \lambda_1 h_k$ となる．$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_4(t))$ は各待ち行列の滞

  

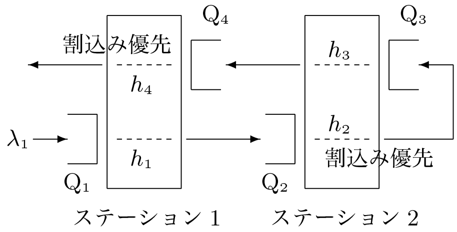


**図 2** 割込み優先権 LK-NW

在客数を要素に持つベクトルである．

この割込み優先権 LK-NW では，少なくともある時間後，$Q_2$ の滞在客数 $X_2(t)$ と $Q_4$ の滞在客数 $X_4(t)$ の少なくとも一方は常にゼロとなることが次の考察からわかる．QNW 内に客が一人もいない状態になった時点から考える．外部から到着した客は $Q_1$ に入り，サービス終了後，$Q_2$ へ移動し，そこでサービスを受け，$Q_3$ へ移動する．ステーション 2 では $Q_2$ の客が割込み優先で処理されるため，$Q_2$ が空きのときしか $Q_3$ の客のサービスは行われない．そのため，$Q_3$ の客はサービスが進まず，しばらくの間はそこに留まり，$Q_4$ は空きのままとなる．やがて，$Q_3$ でのサービスが終了した客は $Q_4$ へ進むが，その瞬間における $Q_2$ の客数はゼロとなっている．さらに，$Q_4$ へ進んだ客は割込み優先でサービスを受けるため，$Q_1$ にいる客のサービスは中断され，今度は $Q_2$ がしばらくの間，空きのままとなる．次に $Q_1$ から $Q_2$ へ客が移動し，$Q_2$ が空きでなくなった時点では，今度は $Q_4$ が空きであり，$Q_3$ の客のサービスは中断されるため，$Q_4$ が空きの状態がしばらく続くことになる．

以下，これが繰り返されるが，いずれの時点でも $Q_2$ または $Q_4$ は空きであり，そこの滞在客数はゼロとなる．これは，二つのステーションで合計 2 台のサーバーがあるが，$Q_2$ と $Q_4$ の客が同時に処理されることはないことを意味しており，サーバー能力を有効に利用できないという現象がネットワークレベルで起きていることを示唆する．これより，割込み優先権 LK-NW が安定であるためには名目条件の他に，$Q_2$ と $Q_4$ のトラフィック密度の和がサーバー 1 台分の処理能力未満であるという条件

$$\rho_2 + \rho_4 < 1 \tag{2}$$

が必要になると予想される．実際，次節で示すように，名目条件とこの条件を満たせば滞在客数過程を表すマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は正再帰的（割込み優先権 LK-NW は安定）になり，逆に $\rho_2+\rho_4 > 1$ であれば名目条件を満たしても $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は一時的（割込み優先権 LK-NW は不安定）になることがわかっている．

このように，複数クラスの QNW では，各ステーションが相互に影響を及ぼし合うため，サーバー能力が有効に利用されず，名目条件だけで安定性を示すことはできない場合が生じる．これは，割込み優先権というサービス規律に特有なことではなく，非割込み優先権（一度開始したサービスは中断せずに最後まで行う優先権）でも $(1, L)$-制限式処理（一方のクラスの客を一人処理したら，もう一方のクラスの客を最大 $L$ 人連続して処理する方式）でも起こりうる．さらに，サービス規律が FIFO（ステーションごとに先着順で処理する）でも起こりうる [4]．よって，複数クラス QNW の設計では，サーバーにこのような隠れた無駄が生じていないかのチェックと，生じている場合にはそれを回避するための制御方法が必要となり，そのような方法の提案も実際にされている [5]．

以上，QNW の安定性が見せる複雑な側面について説明してきたが，次の節ではそれを解析するための数学的な方法について示す．なお，不安定な LK-NW では，両ステーションの滞在客数が交互に増減を繰り返しながら発散していくという現象が見られる（本誌 2014 年 4 月号 p.201 の図 5 に，設定は異なるが，LK-NW の滞在客数のシミュレーション結果が掲載されている）．

## 4. 流体モデルによる安定性の解析

### 4.1 複数クラス QNW

ここでは，ステーション数を $J$，客クラス数を $K$ とする一般の開放型複数クラス QNW を改めて定義する（図 1 を参照）．クラス $k$ の客は待ち行列 $Q_k$ に並び，そこでサービスを受ける．$\mathcal{C}_j$ は，ステーション $j$ でサービスを受ける客クラスの集合である．各ステーションのサーバー数はすべて 1 としておく．外部から $Q_k$ への客の到着は到着率 $\lambda_k$ の確率過程に従い，$Q_k$ でのサービス時間は平均 $h_k$ の独立同分布に従うものとする．$Q_k$ でのサービスを終了した客は確率 $r_{kl}$ でクラス $l$ の客となり，$Q_l$ に並ぶか，確率 $r_{k,0} = 1-\sum_{l=1}^{K} r_{kl}$ でネットワークの外部へ去る．ルーティング確率 $r_{kl}$ の行列を $R = (r_{kl}, k, l = 1, \ldots, K)$ とする．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$ とし，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}(I-R)^{-1}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ は**トラフィック方程式** (traffic equations) [6]

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\alpha} R \tag{3}$$

の解であり，その要素 $\alpha_k$ は $Q_k$ へ到着する単位時間当りの平均客数である．$\rho_k = \alpha_k h_k$ とすると，ステー

ション $j$ のトラフィック密度は $a_j = \sum_{k \in \mathcal{C}_j} \rho_k$ で与えられる．

時点 $t$ における各待ち行列の滞在客数を要素に持つベクトルを $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_K(t))$ とする．安定性とはベクトル値確率過程 $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の長時間挙動に関する性質であるが，ここでは次のように定義する．$\boldsymbol{X}(t)$ に補助的な $m$ 個の状態 $\boldsymbol{Y}(t) = (Y_1(t), \ldots, Y_m(t))$ を付け加えて，確率過程 $\{(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t))\}$ がマルコフ過程となるようにできるものとする．例えば，外部からの到着間隔が独立同分布に従う場合は，到着が発生するまでの残余時間を補助的な状態に加える．サービスについては残余サービス時間を加えればよい．サービス規律についても同様とする．例えば，非割込み優先権では，サービス中の客のクラスを状態として持てばよい．QNW の安定性は次で定義する [2, 4, 7]．

**定義 1**（安定な QNW）**．** マルコフ過程 $\{(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t))\}$ が**正ハリス再帰** (positive Harris recurrent) のとき，QNW は**安定** (stable) であるという．

**定義 2**（不安定な QNW）**．** $t \to \infty$ として，総滞在客数 $\sum_{k=1}^{K} X_k(t)$ が確率 1 で発散するとき，QNW は**不安定** (unstable) であるという．

正ハリス再帰は，既約なマルコフ連鎖における正再帰の概念を連続な状態を取る確率過程（マルコフ過程）に拡張したものである [4]．マルコフ連鎖の場合と同様，正ハリス再帰であればマルコフ過程は唯一の定常分布を持つ．なお，$\boldsymbol{Y}(t)$ が離散的な値を取り，$\{(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t))\}$ が可算な状態空間を持つ既約なマルコフ連鎖となっている場合，QNW が安定であることはそのマルコフ連鎖が正再帰的であることに対応し，QNW が不安定であることは，マルコフ連鎖が一時的であることに対応する．

### 4.2　待ち行列ネットワーク等式

まず，次を定義する．

- $T_k(t)$: $\mathrm{Q}_k$ に滞在した客が時点 $t$ までに受けた累積サービス時間，$\boldsymbol{T}(t) = (T_1(t), \ldots, T_K(t))$
- $E_k(t)$: 時点 $t$ までに外部から $\mathrm{Q}_k$ へ到着した累積客数，$E_k(0) = 0$
- $S_k(s)$: $\mathrm{Q}_k$ での累積サービス時間が $s$ のときに，そこでのサービスを終了した累積客数
- $I_j(t)$ : ステーション $j$ にあるサーバーの，時点 $t$ までの累積空き時間（単位行列 $I$ と混同しないこと）
- $\Phi_k^l(n)$: $\mathrm{Q}_l$ からの最初の $n$ 人の退去客のうち，$\mathrm{Q}_k$ へ移動した客の人数

**待ち行列ネットワーク等式**（queueing network equations; QNW 等式と略す）とは，QNW が満たす式であり，その基本となる式（基本 QNW 等式）は次で与えられる（添字 $k$ は待ち行列の番号，$j$ はステーションの番号を表す）．

$$X_k(t) = X_k(0) + E_k(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l(T_l(t))) - S_k(T_k(t)) \tag{4}$$

$$I_j(t) = t - \sum_{l \in \mathcal{C}_j} T_l(t) \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \sum_{l \in \mathcal{C}_j} X_l(t)\, dI_j(t) = 0 \tag{6}$$

ここで，$X_k(t) \geq 0$，$T_k(t)$ は単調非減少で，$T_k(0) = 0$ であり，$I_j(t)$ も単調非減少である．式 (4) は，$\mathrm{Q}_k$ の滞在客数 $X_k(t)$ が，初期値 $X_k(0)$，外部からの累積到着客数 $E_k(t)$ と他の待ち行列からの累積到着客数 $\sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l(T_l(t)))$ の和から $\mathrm{Q}_k$ の累積退去客数 $S_k(T_k(t))$ を引いたものであることを表している．式 (5) は，ステーション $j$ にあるサーバーの累積空き時間と累積サービス時間の関係を表している．式 (6) は，ステーション $j$ に客が滞在している間はサーバーの累積空き時間が増加しないことを表しており，サービスが work-conserving であることを示す．

基本 QNW 等式の他に，サービス規律の特徴を表す一連の式（補助 QNW 等式）がある．例えば，ステーション 1 にクラス 1 ($\mathrm{Q}_1$) とクラス 2 ($\mathrm{Q}_2$) の二つの客クラスがあり，クラス 2 の客がクラス 1 の客に対して割込み優先で処理されるならば次の式を満たす．

$$\int_0^\infty X_2(t)\, dT_1(t) = 0 \tag{7}$$

これは，クラス 2 の滞在客数 $X_2(t)$ が正の間は，クラス 1 の累積サービス時間 $T_1(t)$ は増加しないことを表している．様々なサービス規律の特徴を表すためには，それに対応した式を用意する必要があり，場合によっては QNW の挙動を記述する新たな確率過程を追加することも必要となる．

### 4.3　流体モデル

**流体モデル方程式** (fluid model equations) とは，QNW の平均的な挙動を表す確定的な方程式であり，QNW 等式に対応する形で与えられる．以下では，確率過程に対応する確定的な過程（時間の関数）を同じ記号にバーを付けて表す．例えば，$\mathrm{Q}_k$ の滞在客数過程 $\{X_k(t)\}$ に対応する実数値関数は $\bar{X}_k(t)$ と表す．

  

基本 QNW 等式 (4)〜(6) に対応する流体モデル方程式（基本流体モデル方程式）は次で与えられる．

$$\begin{aligned}\bar{X}_k(t) &= \bar{X}_k(0) + \lambda_k t \\ &\quad + \sum_{l=1}^{K} r_{lk} \bar{T}_l(t)/h_l - \bar{T}_k(t)/h_k \end{aligned} \tag{8}$$

$$\bar{I}_j(t) = t - \sum_{l \in \mathcal{C}_j} \bar{T}_l(t) \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \sum_{l \in \mathcal{C}_j} \bar{X}_l(t)\, d\bar{I}_j(t) = 0 \tag{10}$$

ただし，$\bar{X}_k(t) \geq 0$, $\bar{T}_k(t)$ は単調非減少で，$\bar{T}_k(0) = 0$ とし，$\bar{I}_j(t)$ も単調非減少とする．式 (8) では，時点 $t$ までに外部から $\mathrm{Q}_k$ へ到着した平均累積客数を $\lambda_k t$ で表し，$\mathrm{Q}_k$ から退去した平均累積客数を $\bar{T}_k(t)/h_k$ で表している（$\bar{T}_k(t)$ は $\mathrm{Q}_k$ での累積サービス時間に対応している）．$\bar{X}_k(t)$ と $\bar{T}_k(t)$ のベクトルを $\bar{\boldsymbol{X}}(t) = (\bar{X}_1(t), \ldots, \bar{X}_K(t))$, $\bar{\boldsymbol{T}}(t) = (\bar{T}_1(t), \ldots, \bar{T}_K(t))$ とする．サービス規律を表す流体モデル方程式（補助流体モデル方程式）も，補助 QNW 等式に対応して得られる．

基本と補助を合わせた流体モデル方程式を単に流体モデル方程式と呼ぶことにする．流体モデル方程式は確定的な方程式であり，その解（方程式を満たすベクトル値関数の組 $(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{T}}(t))$ ）の性質を調べることは，QNW の挙動を表す確率過程 $\{\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t)\}$ を直接調べるより一般的には容易である．流体モデル方程式の解集合を**流体モデル** (fluid model) という．流体モデルの安定性は次で定義する [2, 4, 7].

**定義 3**（安定な流体モデル）**.** ある $N > 0$ が存在して，流体モデル方程式のすべての解が

$$t \geq N \sum_{k=1}^{K} \bar{X}_k(0) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

を満たすならば，流体モデルは**安定** (stable) であるという．

**定義 4**（弱不安定な流体モデル）**.** $\bar{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，ある $N > 0$ が存在して，流体モデル方程式のすべての解が

$$t \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \bar{X}_k(t) > 0 \tag{12}$$

を満たすならば，流体モデルは**弱不安定** (weakly unstable) であるという．

すなわち，流体モデルにおいて，どのような初期状態から始めてもある時間後に QNW 内の滞在客数がゼロになればその流体モデルは安定，QNW 内にだれもいない状態から始めて，ある時間後に QNW 内の滞在客数が正になればその流体モデルは弱不安定と定義する．ところで，定義 3 において，$\bar{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{0}$ を仮定したときに式 (11) の条件を満たす流体モデルを**弱安定** (weakly stable) ということがある [8]．弱不安定はそれに対応する形で定義されている．

### 4.4 流体極限

ここでは，QNW の挙動を表す確率過程として滞在客数過程と累積サービス時間過程の組 $\{(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{T}(t))\}$ に注目する（それ以外の確率過程を含める場合もある）．この確率過程の組に対し，スケール変換 $(\boldsymbol{X}(st), \boldsymbol{T}(st))/s$ の $s \to \infty$ とした極限（大数の法則が基になる）を考え，それによって得られる確定的な過程 $(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{T}}(t))$ をその QNW の**流体極限** (fluid limits) と呼ぶことにする [2, 4, 7].

極限は，$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ を満たす数列 $\{s_n\}$ またはその部分列を用いて，標本 $\omega$ ごとに取る．すなわち，

$$(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{T}}(t)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} (\boldsymbol{X}(s_n t; \omega), \boldsymbol{T}(s_n t; \omega))$$

の形の極限を考える．よって，一つの QNW に対して複数の流体極限が存在しうる．確率 1 の範囲で得られる流体極限の集合を**流体極限モデル** (fluid limit model) と呼ぶことにする．

極限の取り方は，滞在客数，到着までの残余時間，残余サービス時間それぞれの初期値の与え方によって二つに分かれる．一つ（タイプ A）はそれら初期値の値を数列 $\{s_n\}$ に合わせて増加させながら極限を取るものであり，もう一つ（タイプ B）はそれら初期値を固定して極限を取るものである．安定な QNW では，滞在客数ベクトル $\boldsymbol{X}(t)$ は確率 1 で有限なので，$\boldsymbol{X}(s_n t)/s_n$ の極限 ($n \to \infty$) は基本的にゼロベクトルとなり，有益な情報は得られない．タイプ A の極限は，初期値を増大させることでそれを回避し，極限に意味を持たせたものと考えることができる．タイプ B の極限は主に不安定な QNW に対して用いる．この場合は $\boldsymbol{X}(t)$ が発散するので初期値を固定しても，$\boldsymbol{X}(s_n t)/s_n$ の極限が意味のある値を持つと期待される．

この流体極限によって QNW 等式と流体モデル方程式が結びつけられ，流体極限モデルが満たす方程式としての流体モデル方程式が得られる．この対応が成立するかは個々の QNW について検証する必要があるが，例えば，各クラスの客の外部からの到着間隔が独立同分布に従い，サービス時間も独立同分布に従う場合は，

他に若干の仮定が必要となるが，成り立つものと考えてよい．QNW と流体モデルの対応は，“QNW → 流体極限モデル → 流体モデル方程式 → 流体モデル”という図式で表される．すなわち，QNW から流体極限モデルが得られ，流体極限モデルの満たす式として流体モデル方程式が得られ，流体モデル方程式の解集合として流体モデルが得られる．なお，この図式から，流体極限モデルは対応する流体モデルに包含されることがわかる．

### 4.5 QNW の安定性

流体極限モデルの安定性は流体モデルの安定性とまったく同様に定義される．ただし，定義 3（安定なモデルの定義）に対してはタイプ A の極限を，定義 4（弱不安定なモデルの定義）に対してはタイプ B の極限を適用する．QNW の安定性は流体極限モデルの安定性によって示すことができるが，十分条件の範囲で流体極限モデルを流体モデルに置き換えた次の定理が成立する [2, 4, 7]．

**定理 1．** 流体モデルが安定ならば，対応する QNW は安定である．

**定理 2．** 流体モデルが弱不安定ならば，対応する QNW は不安定である．

流体極限モデルそのものを扱うよりも流体モデル方程式の解集合である流体モデルを扱うほうが容易であり，これら定理の利点もそこにある．また，複数の流体極限モデルが同じ流体モデル方程式を満たしている場合，対応する流体モデルの安定性を示すことで，複数の QNW の安定性を示すこともできる．例えば，補助流体モデル方程式として様々なサービス規律が共通に持つ関係式のみを与えた流体モデルを考え，それが安定であることが示せれば，サービス規律に依存せず，QNW が安定であることを示せる（このような性質は global stability と呼ばれている [4]）．ただし，定理 1 と 2 の間にはギャップもある．すなわち，安定でも弱安定でもない流体モデルが存在する．

### 4.6 LK-NW の安定性

3 節で示した割込み優先権 LK-NW の安定性について，流体モデルを用いて考察する（到着過程やサービス時間分布は一般化できるが，ここでは 3 節のままとする）．以下では，名目条件 ($\rho_1+\rho_4<1, \rho_2+\rho_3<1$) を仮定する．式 (8)〜(10) より，基本流体モデル方程式は次のようになる．

$$\bar{X}_1(t)=\bar{X}_1(0)+\lambda_1\,t-\bar{T}_1(t)/h_1 \tag{13}$$

$$\bar{X}_k(t)=\bar{X}_k(0)+\bar{T}_{k-1}(t)/h_{k-1}-\bar{T}_k(t)/h_k,\quad k=2,3,4 \tag{14}$$

$$\bar{I}_1(t)=t-\bar{T}_1(t)-\bar{T}_4(t) \tag{15}$$

$$\bar{I}_2(t)=t-\bar{T}_2(t)-\bar{T}_3(t) \tag{16}$$

$$\int_0^\infty(\bar{X}_1(t)+\bar{X}_4(t))\,d\,\bar{I}_1(t)=0 \tag{17}$$

$$\int_0^\infty(\bar{X}_2(t)+\bar{X}_3(t))\,d\,\bar{I}_2(t)=0 \tag{18}$$

ただし，$k=1,\dots,4$ に対して，$\bar{X}_k(t)\ge 0$，$\bar{T}_k(t)$ は単調非減少で $\bar{T}_k(0)=0$ とし，$j=1,2$ に対して $\bar{I}_j(t)$ は単調非減少とする．補助流体モデル方程式は，

$$\bar{T}_2(t)+\bar{T}_4(t)\le t \tag{19}$$

を考える．3 節で示したように，割込み優先権 LK-NW では $Q_2$ の客と $Q_4$ の客が同時に処理されることはないので，両者の累積サービス時間の和は $t$（サーバー数 1 台分）以下となる．式 (19) はそれを表している．なお，補助流体モデル方程式はサービス規律を表すものであるが，どのような関係式を用いるかには自由度がある．目的とする安定性を示すのに十分な関係式を盛り込めばよい．

少し複雑なので詳細は文献 [9] に譲るが，$\rho_2+\rho_4<1$ であれば，基本流体モデル方程式だけからなる流体モデルは安定であることが示せる．基本流体モデル方程式はサービス規律についての関係式を含んでいないので，定理 1 より，work-conserving であるどのようなサービス規律に対しても（もちろん割込み優先権であっても），$\rho_2+\rho_4<1$ であれば LK-NW は安定であることがわかる．

割込み優先権 LK-NW が $\rho_2+\rho_4>1$ のとき不安定となることは次のように示せる．$\bar{X}_k(0)=0, k=1,\dots,4$, と仮定し，基本流体モデル方程式と補助流体モデル方程式 (19) からなる流体モデルを考える．$k=1,\dots,4$ に対して，

$$\bar{Z}_k(t)=\sum_{l=1}^{k}\bar{X}_l(t)=\lambda_1 t-\bar{T}_k(t)/h_k$$

と定義する．仮定から，式 (19) がすべての $t\ge 0$ に対して成り立つ．よって，$t>0$ に対して $\rho_2+\rho_4>1$ ならば，

$$\begin{aligned}h_2\bar{Z}_2(t)+h_4\bar{Z}_4(t)&=(\rho_2+\rho_4)t-(\bar{T}_2(t)+\bar{T}_4(t))\\&\ge(\rho_2+\rho_4)t-t\\&>0\end{aligned}$$

  

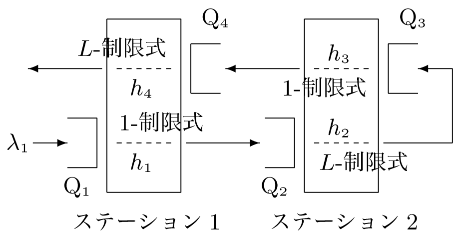


**図 3** $(1, L)$-制限式 LK-NW

となる．$h_2\bar{Z}_2(t) + h_4\bar{Z}_4(t) > 0$ であれば，QNW 内の総滞在客数も正となる $(\sum_{l=1}^{4} \bar{X}_l(t) > 0)$ ことから，$\rho_2 + \rho_4 > 1$ であれば定義 4 より流体モデルは弱不安定となり，定理 2 より，割込み優先権のある LK-NW は不安定となる．

ところで，基本流体モデル方程式のみからなる流体モデルは $\rho_2+\rho_4 > 1$ のとき，安定でも弱安定でもない（定理 1 と定理 2 のギャップ部分）．これは，$\rho_2+\rho_4 > 1$ のとき，サービス規律によって安定になる LK-NW と不安定になる LK-NW が存在することを示唆する（実際に存在する）．

## 5. おわりに

流体モデルによる方法は，複数クラス QNW の安定性解析に最も有効な方法の一つとされている．しかし，複数クラス QNW の挙動は複雑であり，流体モデルではカバーするのが難しい領域もある．例えば，$\rho_2+\rho_4 > 1$ のとき，どのようなサービス規律なら LK-NW が安定になるかは個別のサービス規律ごとに解析する必要があり，流体モデルによる方法が適用しにくい場合もある．

ここでは，$Q_1$ と $Q_3$ が 1-制限式，$Q_2$ と $Q_4$ が $L$-制限式で処理される $(1, L)$-制限式 LK-NW を考える（図 3 を参照）．$n$-制限式とは，そのクラス（待ち行列）の客を最大 $n$ 人続けて処理してから他のクラスの客のサービスへ移るサービス規律である．サーバーはステーション内の各待ち行列を順番に廻る．$(1, L)$-制限式 LK-NW は，$L = \infty$ とすると非割込み優先権 LK-NW（$Q_2$ と $Q_4$ が優先待ち行列）に一致する．外部からの客の到着はポアソン過程に従い，サービス時間は指数分布に従うとする．さらに，名目条件を仮定しておく．

4.6 節で示したように，$\rho_2 + \rho_4 < 1$ ならば $(1, L)$-制限式 LK-NW も安定となる．しかし，割込み優先権 LK-NW とは異なり，$(1, L)$-制限式 LK-NW では，$\rho_2+\rho_4 > 1$ であっても $L$ の値により，安定の場合と不安定の場合がある．例えば，$\lambda_1 = 1$，$h_1 = h_3 = 1/5$，$h_2 = h_4 = 5/9$ としたとき，$\rho_2 + \rho_4 = 10/9 > 1$ となるが，$2 \le L \le 5$ ならば LK-NW は安定となり，$L \ge 6$ ならば不安定となる．このモデルの安定性は**マルコフ変調反射型ランダムウォーク** (Markov modulated reflecting random walk) を用いた方法で解析できるが [10, 11]，流体モデルを用いた方法では適切な補助流体モデル方程式の導入が困難と考えられる．この辺りが，定理 1 と定理 2 のギャップ部分に相当するところであり，研究対象として面白いところでもある．

### 参考文献


[1] P. R. Kumar, “Re-entrant lines,” *Queueing Systems*, **13**, 87–110, 1993.

[2] J. G. Dai, “On positive Harris recurrence of multi class queueing networks: A unified approach via fluid limit models,” *The Annals of Applied Probability*, **5**, 49–77, 1995.

[3] S. P. Meyn and D. Down, “Stability of generalized Jackson networks,” *The Annals of Applied Probability*, **4**, 124–148, 1994.

[4] M. Bramson, “Stability of queueing networks,” *Probability Survey*, **5**, 169–345, 2008.

[5] J. G. Dai and W. Lin, “Maximum pressure policies in stochastic processing networks,” *Operations Research*, **53**, 197–218, 2005.

[6] 紀一誠，『待ち行列ネットワーク（経営科学のニューフロンティア 13）』，朝倉書店，2002.

[7] J. G. Dai, “A fluid limit model criterion for instability of multiclass queueing networks,” *The Annals of Applied Probability*, **6**, 751–757, 1996.

[8] H. Chen, “Fluid approximations and stability of multiclass queueing networks: Work-conserving disciplines,” *The Annals of Applied Probability*, **5**, 637–665, 1995.

[9] J. G. Dai and G. Weiss, “Stability and instability of fluid models for reentrant lines,” *Mathematics of Operations Research*, **21**, 115–134, 1996.

[10] G. Fayolle, V. A. Malyshev and M. V. Menshikov, *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains*, Cambridge University Press, 1995.

[11] T. Ozawa, “Positive recurrence and transience of a two-station network with server states,” preprint (arXiv: 1308.6104), 2013.