面の話

村松　正和

近年，半正定値計画や共正値計画といった新しい最適化問題が出現しているが，その基礎となるのは凸錐や凸集合といった概念である．凸集合には「面」と呼ばれる概念があるが，それは通常の多面体における面とはやや異なった定義であり，その差異に注意すべき点がある．本稿では，凸集合や凸錐における「面」について，基本的な部分から最新の結果までを，筆者の気の趣くままに紹介する．

キーワード：凸集合，凸錐，面，露出面，面露出，素敵な錐

1. はじめに

面の話をしようと思う．そのきっかけとなったのは徳島で開催されたOR学会における以下の事件である．

懇親会の席でS先生（女性）に「女は40までは面で勝負だけど，その後は中身で勝負．でも男が中身で勝負するのは40までで，40過ぎたら面で勝負．あなたはそういう意味でだめね～」と言われた．ここで言う面とは，端的に言えば顔である．

その言明が正しいのかどうか，そのとき筆者には実感がなかったのだが，後で調べてみると「男は40を過ぎれば自分の面に責任を持たなければならない[1]．」と言ったのはリンカーンであった．ある人を閣僚に入れるように推薦されたのに対し，「彼は顔が悪い」といって断ったことに関連して述べた言葉だそうである．リンカーンは面を表面的なものではなく，中身を映し出すものとして捉えていた．

筆者自身が「面が悪い」と言われるのはそんなものだと思っているし，この年になってはあまり気にもしない．しかし彼女の主張は「筆者は面が悪い ∧（面が悪い → 中身が悪い）」ということなので，それなりにショックであった．しかし同時に，「面が中身を表す」ということは，われわれがよく取り扱っている凸集合の場合でも成り立つことだなあ，一つこれをネタに書いてみよう，と思い立ったのである．

というわけなので，本稿では凸集合の「面 (face)」を扱う．面は表面的なものでなく，中身を映し出すものであること，それは，凸集合においても同じことであることを，本稿では説明したいと思う．

面というと，普通の人は図1のaのようなものを

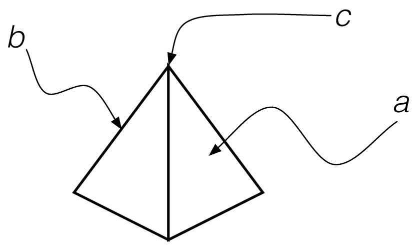

図1　多面体の面

思い浮かべるだろう．もう少し専門で習ったことのある人の中には，bやcも面と言う人がいるかもしれない．それも正解である．多面体は，その名のとおり面によって構成されている．いずれにせよ，オペレーションズ・リサーチの関係者は，主に線形計画の文脈で面を習うことが多いと思うので，面を凸多面体の構成要素として認識している人が多いように思われる．

しかし最近，半正定値計画 (SDP)，2次錐計画 (SOCP) などの錐線形計画が発達するにつれ，「凸集合における面」というものを意識しなければならない場面が増えてきた．特に，私が最近勉強し始めている「共正値計画」に関しては，不思議なこと，未解決なことがたくさんあり，たいへん興味深いと感じている．

この「凸集合における面」は，まじめにRockafellerの本 [5] を勉強した人にはなじみ深い概念かもしれないが，この本は読みこなすのが大変で有名である．また日本語の良い教科書もあまり見当たらない．まして，最新の錐線形計画の枠組みでそれがどうなっているのか，意外に知られていないような気がする．

本稿では，このような「凸集合における面」に関して，散発的なトピックをいくつか紹介する．これにより，「面」に興味を持ってもらえるようになれば幸いである．

むらまつ　まさかず
電気通信大学
〒182–8585 東京都調布市調布ヶ丘1–5–1

[1] “Every man over forty is responsible for his *face*”.

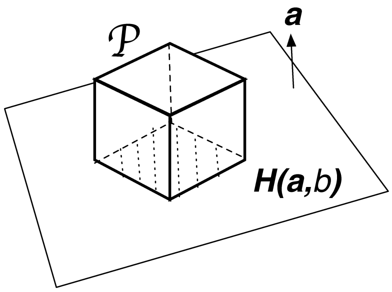

図 2　支持超平面

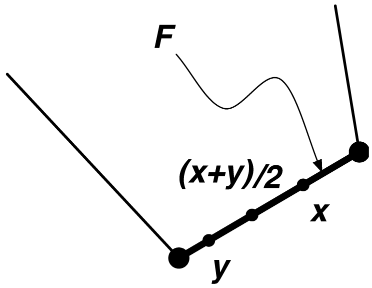

図 3　面 F の定義

2. 凸多面体における面

まず凸多面体とは何だったか，思い出そう．有限本の 1 次等式あるいは（等号付き）1 次不等式を満たす $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{P}$ を凸多面体と呼ぶ．式で書けば，

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_2\}$$

である．線形計画問題の許容集合は凸多面体になっていることはよく知られている．

多面体 $\mathcal{P}$ のすべての点が不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$（ただし $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする）を満たすとき，この不等式を妥当不等式 (valid inequality) と呼ぶ．妥当不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$ に対し，その境界 $H(\boldsymbol{a}, b) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$ が $\mathcal{P}$ と交わりを持つとき，$H(\boldsymbol{a}, b)$ を $\mathcal{P}$ の支持超平面と呼ぶ（図 2）．さらに，多面体と支持超平面の共通集合 $\mathcal{P} \cap H(\boldsymbol{a}, b)$ を $\mathcal{P}$ の面と呼ぶ（便宜上，$\mathcal{P}$ 自身と空集合 $\emptyset$ も $\mathcal{P}$ の面とする）．これがよく使われる多面体における面の定義である．

定義からすぐに，多面体の面はやはり多面体であることがわかる．通常の線形計画の教科書（例えば [4]）では，この後に「線形計画問題の最適解の集合は面になる」というような記述が続くことになる．

多面体の面で重要な性質は，次に紹介する階層構造である．

1. 多面体は内部とその境界に分けられ，境界は 1 次元下の面すべての和集合となっている．
2. 多面体の面は，面の内部とその境界に分けられ，境界は 1 次元下の面の和集合となっている．

つまり，多面体の面はそれより次元が 1 つだけ下の面により囲まれている．これは多面体の面の特徴的な構造である．

3. 凸集合における面

とりあえず最初に，凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ における面の定義を紹介しよう．

定義 1. 集合 $\mathcal{F} \subseteq C$ が**面** (face) であるとは，次が成り立つことである．

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C, ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})/2 \in \mathcal{F} \rightarrow \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}).$$

この定義を読むと，だいたいの人は「？」という感じを持つものと思う．私も最初はそうで，この定義が自分の身に入るまでは結構時間がかかった．

そもそも，多面体における面は「多面体と支持超平面の交わり」であり，支持超平面という概念は凸集合にも自然に定義されるものなのだから，なんで面が「凸集合と支持超平面の交わり」ではいけないのか，疑問に思うのが当然である．「凸集合と支持超平面の交わり」という直感的な物言いに対し，定義 1 はどこか間接的である．

定義 1 を少し噛み砕いてみよう．これは F が面であるとき「もし凸集合の中に 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ があり，これらの中点が F に入っているならば，実は $\boldsymbol{x}$ も $\boldsymbol{y}$ も F に入っている」ことを主張している（図 3 参照）．離散数学や論理学で習ったように，論理式 $A \rightarrow B$ は $\neg A \vee B$ と等価だから，中点が $\mathcal{F}$ に入っていない場合には，何も主張していないことに注意しよう．

実は，「凸集合と支持超平面の交わり」として定義される概念もある．

定義 2. 凸集合とその支持超平面の交わりを**露出面** (exposed face) と言う．

露出「面」というくらいなので，一般に露出面は面である[2]が，その逆は必ずしも正しくない．図 4 を見てみよう．2 次元平面内に，競技場のトラックのような形をしている 凸集合がある．この凸集合に対し，H が支持超平面であるので，凸集合と支持超平面の交わり F_1（左の黒丸から右の黒丸まで）は露出面である．

[2] 証明は簡単です．以下，この脚注があるものは，腕に覚えのある人は証明に挑戦してください．理解を深めるのに役立つでしょう．

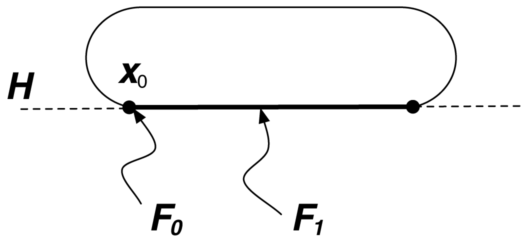

図 4　面と露出面

一方，F_0 は $\boldsymbol{x}_0$ の 1 点からなる集合であるが，実はこれで面になっている．少し考えるとこの凸集合の中で $\boldsymbol{x}_0$ 以外の 2 点を取った場合，その中点が $\boldsymbol{x}_0$ となることはないことが理解されるだろう．

ところが，F_0 は露出面ではない．この凸集合の曲線部分は，丁度 $\boldsymbol{x}_0$ において傾きが 0 になるように取られており，支持超平面 H を $\boldsymbol{x}_0$ を中心に少しでも傾けると，凸集合の内部と交わってしまい，支持超平面ではなくなる．

というわけで，「露出面」と「面」は異なるものであることは納得されたと思う．上記の例はかなり人工的で特殊な例と思われるかもしれないが，本稿の後半では別の「露出面でない面」を見ることになる．「面」と「露出面」が異なるのはありふれた状況であることが理解されるであろう．

さて，凸集合の面を定義 1 とすることの利点はいくつもあるが，中でも特に重要なものの 1 つは，以下に述べるように凸集合を面によって分解できることである．

凸集合 C の面の集合を $\mathcal{F}(C)$ と置く．つまり，

$$F \in \mathcal{F}(C) \Leftrightarrow F \text{ は } C \text{ の面}$$

である．また，凸集合 F の内部（相対内点 (relative interior point) の集合）を $\mathrm{ri}(F)$ と書く．このとき，以下が成り立つ．

定理 3. 1.　相異なる 2 つの面 F_1，$F_2 \in \mathcal{F}(C)$ において，$\mathrm{ri}(F_1) \cap \mathrm{ri}(F_2) = \emptyset$.

2. $C = \cup_{F \in \mathcal{F}(C)} \mathrm{ri}(F)$.
3. 任意の相対的開凸集合 $D \subseteq C$ に対し，$D \subseteq \mathrm{ri}(F)$ となるような $F \in \mathcal{F}(C)$ がただ 1 つ存在する．

この定理は凸集合を，それが含むすべての面の相対内点の和集合として一意に分解できる，ということを表している．まさに面は凸集合そのものを表しているのである．

ここで，面を露出面に変えると，上記定理の 2 は成り立たない．例えば図 4 で $\boldsymbol{x}_0$ は面 F_0 の相対内点で

$$\mathcal{S}_2 \ni \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

図 5　2×2 行列と 3 次元空間の対応

あるが，どの露出面の相対内点でもない．したがって，2 と同様の和を露出面全体で取っても，$\boldsymbol{x}_0$ は含まれず，元の凸集合を復元できないのである．これは美しくない．やはり，中身に対して責任を持つためには，面の定義は定義 1 でなければならない．

4.　半正定値錐の面

$n \times n$ 行列 X において $X^T = X$ が成り立つとき，X は対称行列であると言う．ここで X^T は X の転置行列である．実 $n \times n$ 対称行列の集合を $\mathcal{S}_n$ と書く．

$X \in \mathcal{S}_n$ は，$n(n+1)/2$ 個の実数で定められるので，$n(n+1)/2$ 次元の実ベクトル空間とみなすことができる．図 5 に 2×2 対称行列と $\mathbb{R}^3$ のベクトルの対応を示す．このような対応をもって行列 X を「点」とみなすことにする．右の空間における和やスカラー倍は通常の行列の和やスカラー倍と同様になることに注意しよう．

ただし，内積だけは通常の $\mathbb{R}^n$ の内積と異なり，次のように定義する[3]．

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij}. \qquad (1)$$

2×2 対称行列で図 5 と同様の変数名を用いれば，$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$ となり，確かにこれは通常の $\mathbb{R}^3$ の内積と $x_2 y_2$ の係数が異なっている．$\mathcal{S}_n$ における超平面を，$A \in \mathcal{S}_n$, $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$H(A, b) = \{X \in \mathcal{S}_n \,|\, \langle A, X \rangle = b\}$$

で定義する．ただし A はゼロ行列ではないとする．

ここで集合

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n \,|\, X \text{ は半正定値}^4\}$$

を考える．$\mathcal{S}_n^+$ は半正定値錐と呼ばれ，半正定値計画で用いられる重要な錐である．半正定値錐に関する以下の性質はよく知られている．

[3] これが内積の性質を持つことは各自確かめられたい．
[4] X が半正定値とは任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}^T X \boldsymbol{x} \geq 0$ となることである．これは，X の固有値がすべて非負であることと等価である．

定理 4. 1. $\mathcal{S}_n^+$ は閉凸錐である．

2. 双対錐 $(\mathcal{S}_n^+)^* = \{\, Y \in \mathcal{S}_n \mid \langle X, Y\rangle \geq 0\ (\forall X \in \mathcal{S}_n^+) \,\}$ が自分自身である．すなわち，$(\mathcal{S}_n^+)^* = \mathcal{S}_n^+$．

それでは，$\mathcal{S}_n^+$ の面はどのようなものだろうか．それを語る前に，次を定義しよう．

定義 5. 閉凸錐 C の任意の面（ただし C と空集合を除く）が露出面であるとき，C は**面露出** (facially exposed) であると呼ぶ．

例えば多面体の錐は面露出であるが，実は $\mathcal{S}_n^+$ も面露出であることが知られている．そのため，以下では $\mathcal{S}_n^+$ の露出面に関してのみ考えることにする．

$\mathcal{S}_n^+$ が錐で，O（ゼロ行列）を含むことを考えると，その支持超平面は $H(A,0)$ の形をしており，露出面は

$$F(A) = \mathcal{S}_n^+ \cap H(A,0) = \left\{ X \in \mathcal{S}_n^+ \mid \langle A, X\rangle = 0 \right\} \quad (2)$$

と表されることがわかる．以下，さまざまな A に関して，$F(A)$ がどのようになるかを調べてみよう．

まず，もし A が半正定値でなければ，$H(A,0)$ は $\mathcal{S}_n^+$ の内部と交わり，支持超平面にはならない[5]．

次に A として正定値行列を選ぶと，$F(A) = \{O\}$ となり，これは 1 点だけからなる面である．

最後に A としてランク $r < n$ の半正定値行列を選んでみよう．半正定値行列 A は，直交行列 Q を用いて $A = QDQ^T$ と分解できることは広く知られている．ここで

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

は対角行列であり，$r \times r$ 対角行列 D_1 の対角要素はすべて正である．また，O は（それぞれ適当なサイズの）ゼロ行列である．すると，$k = n - r$ として

$$F(A) = \left\{ Q\tilde{X}Q^T \;\middle|\; \tilde{X} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}, A_3 \in \mathcal{S}_k^+ \right\}$$

となる[6]．

$A = O$ のときは $F(O) = \mathcal{S}_n^+$ とみなせることを考慮すると，$\mathcal{S}_n^+$ の面は

空集合，および $F(A)$（A は半正定値）

であり，これですべてである．

ここで気がつくのは，面 $F(A)$ の次元が $k(k+1)/2$ $(0 \leq k \leq n)$ となることである．多面体のときには，ある面の境界はそれより 1 次元低い面によって構成されていたが，$\mathcal{S}_n^+$ の場合には，「1 次元低い面」というのは一般に存在しない．よってその階層構造は多面体のときと少し異なるものになる．

1. $\mathcal{S}_n^+$ はその内部と境界に分けられ，境界は次元が $n(n-1)/2$ の面全体の和集合である．
2. 任意の $k(k+1)/2$ 次元の面はその内部と境界に分けられ，境界は $k(k-1)/2$ 次元の面の和集合である．
3. ある整数 $0 \leq k \leq n$ に対し $k(k+1)/2$ と表せないような次元では，$\mathcal{S}_n^+$ の面は存在しない[7]．

5. 共正値錐の面

最近，共正値錐を用いた最適化問題が理論的に展開され，さまざまな研究が行われている．これは半正定値計画の先を行く最先端の研究なので，なかなか日本語の情報も少なく難しいと思うが，やはり凸錐の話であるので，少しだけ噛み砕いて「面」という観点から説明しよう．なお，この章で扱う行列の共正値性，完全正値性に関しては入門書 [1] が読みやすく，お薦めする．

再び対称行列空間 $\mathcal{S}_n$ を考える．内積は (1) で定義する．

定義 6. $X \in \mathcal{S}_n$ が**共正値** (copositive) であるとは，任意の非負ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x}^T X \boldsymbol{x} \geq 0$$

となることである．$\mathcal{S}_n$ における共正値な行列の集合を共正値錐と呼び，$\mathcal{C}_n$ と書く．

この定義は半正定値性の定義と非常によく似ているが，半正定値性においては $\boldsymbol{x}$ は任意のベクトルでよかったのに対し，共正値では $\boldsymbol{x}$ に非負であるという条件を課している．よって，X が半正定値ならば，それは共正値である．つまり，$\mathcal{C}_n \supseteq \mathcal{S}_n^+$ が成り立つ．

次に完全正値性を紹介する．

定義 7. 対称行列 $X \in \mathcal{S}_n$ が**完全正値** (completely positive) であるとは，いくつかの非負ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ を用いて

$$X = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j^T$$

と書けることである．$n \times n$ 完全正値行列の集合を完

[5] 証明は簡単です．
[6] 証明は簡単です．
[7] 空集合は例外とする．

全正値錐と呼び，$\mathcal{K}_n$ と書く．

実際，$\mathcal{C}_n$ も $\mathcal{K}_n$ も閉凸錐になる．また，$\mathcal{C}_n$ と $\mathcal{K}_n$ は互いに双対な錐であることが知られている．すなわち，$\mathcal{K}_n=\mathcal{C}_n^*$ が成り立つ．さらに，完全正値行列は半正定値である[8]ので，

$$\mathcal{K}_n \subset \mathcal{S}_n$$

が成り立つし，また一般に等号は成り立たない．

半正定値錐 $\mathcal{S}_n^+$ に比べ，$\mathcal{C}_n$ や $\mathcal{K}_n$ の面構造についてはまだあまりよくわかっていないが，1 次元の面に関する次のことは知られている．

1. 任意の非負ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\{\alpha \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \,|\, \alpha \geq 0\}$ は $\mathcal{K}_n$ の 1 次元の露出面である．
2. $\mathcal{K}_n$ の任意の 1 次元の面はある非負ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いて $\{\alpha \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \,|\, \alpha \geq 0\}$ と書ける．
3. $\{\alpha \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T \,|\, \alpha \geq 0\}$ は $\mathcal{C}_n$ の 1 次元面である．ここで，$\boldsymbol{e}_i$ は i 番目の要素が 1 でほかが 0 の n 次元ベクトルである．
4. $\{\alpha(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T) \,|\, \alpha \geq 0\}$ は $\mathcal{C}_n$ の 1 次元の面である．
5. 正と負の両方の成分を含むベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$\{\alpha \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \,|\, \alpha \geq 0\}$ は $\mathcal{C}_n$ の 1 次元の面である．

上記より，$n \geq 2$ のとき，$F_0=\{\,\alpha \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T \,|\, \alpha \geq 0\,\}$ は $\mathcal{C}_n$ の面であるが，露出面ではないことがわかる．実際，F_0 が露出面であると仮定してみよう．すると，ある $Y \in \mathcal{S}_n$ が存在して

$$F_0=\{X \in \mathcal{C}_n \,|\, \langle X, Y\rangle = 0\}$$

が成り立つはずである．右辺の露出面を F_1 と置く．ここでもし $Y \notin \mathcal{K}_n$ であると，超平面が $\mathcal{C}_n$ の内部と交わるので、F_1 は面にならない．よって F_1 が露出面であるためには $Y \in \mathcal{K}_n$ でなければならない．内積の定義より，

$$\langle \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T, Y\rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T Y) = \boldsymbol{e}_i^T Y \boldsymbol{e}_i = 0$$

が得られ，完全正値行列 Y は半正定値であることに注意すると，$Y\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$ が得られる．すると，任意の $j \neq i$ に対して

$$\langle \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i, Y\rangle = 2\boldsymbol{e}_j^T Y \boldsymbol{e}_i = 0$$

であるので，$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T$ は F_1 に含まれることがわかる．明らかに $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T \notin F_0$ であるので，これは $F_0=F_1$ に矛盾している．

よって以下のことがわかった．

命題 8. 共正値錐は面露出ではない．

[8] 証明は簡単です．

なお，筆者の知る限り，完全正値錐 $\mathcal{K}_n$ が面露出か否かは未解決問題である[9]．

6. 素敵な錐

半正定値計画では，主問題と双対問題の最適値が一致しない，すなわち双対ギャップが存在することがある [4]．半正定値計画における主流の解法である主双対内点法は，主問題と双対問題の目的関数の差をゼロにすることを目指すので，解くべき問題に双対ギャップが存在すると挙動が不安定になることがある．

このとき，通常の双対問題ではなく，ある種拡張された双対問題を構成すると，その拡張双対問題 (Extended Lagrange-Slater Dual; ELSD) と主問題の最適値は等しくなることが知られている [3]．

次に紹介する性質は，その性質を持つ錐を用いた錐線形計画問題については，半正定値計画と同様に ELSD が定義できる，という意味で重要とされている．

定義 9. 閉凸錐 $\mathcal{C}$ の任意の面 F に対してミンコフスキ和 $\mathcal{C}^*+F^\perp=\{\,Z+W \,|\, Z \in \mathcal{C}^*, W \in F^\perp\,\}$ が閉集合になるとき，$\mathcal{C}$ は**素敵である** (nice) と言う．
ここで

$$F^\perp=\{\boldsymbol{x} \,|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0 \ (\forall \boldsymbol{y} \in F)\}$$

は F の直交補空間である．

例として 2×2 半正定値錐に関して考えてみよう．面 F を

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\, a \geq 0\right\}$$

とするとき，

$$\begin{aligned} Z \in F^\perp \Leftrightarrow & \left\langle \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \ (\forall a \geq 0) \\ \Leftrightarrow & a z_1 = 0 \ (\forall a \geq 0) \\ \Leftrightarrow & z_1 = 0. \end{aligned}$$

半正定値錐は自己双対錐であるので，

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_n^+)^* + F^\perp = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2+z_2 \\ x_2+z_2 & x_3+z_3 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \Big|\, x_1, x_2 \geq 0,\ x_1x_3 - x_2^2 \geq 0,\ z_2, z_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} |\, x_1 \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

[9] 1 次元の面がすべて露出面であることは，すべての面が露出面であることを意味しない．

となる．3 次元空間の集合として，これは明らかに閉集合である．特に，一般の n に対して $\mathcal{S}_n^+$ は素敵であることが知られている．

錐が素敵であることと，面露出であることの間には以下の包含関係がある．

定理 10. 閉凸錐が素敵であれば面露出であるが，面露出であっても素敵とは限らない．

証明に興味のある方は，前半は Pataki [2]，後半は Roshchina [6] を参照されたい．特に [6] では，面露出なのに素敵ではない錐を具体的に構成している．それまでなんとなく「素敵な錐と面露出な錐は同じものかもしれない」と考えていた筆者には非常な驚きだった．

したがって，例えば共正値錐は面露出ではないので素敵ではない．このような錐に対しては，ELSD はうまく定義できないと思われ，やはり共正値錐を用いた錐線形計画の難しさを表している．

7. 終わりに

凸集合の面に関して，いろいろなトピックを紹介した．通常の多面体における面とは異なり，奇妙なことがいろいろと起こること，しかしやはり「面は凸集合自身を表す」ことは変わらないことなどがわかっていただけたかと思う．

今回は（主に錐の）「面」に絞って紹介したが，「錐線形計画」にするとまたいろいろと複雑な状況が生まれる．こういう分野に興味を持っていただければ幸いである．

謝辞　英語 nice に対する「素敵」という素敵な訳語を教えてくれた岡本吉央先生に感謝する．また，「面は中身を表す」ことを気づかせてくれた S 先生に感謝したい．筆者もこれからは面を磨くよう，努力します．

参考文献

[1] A. Berman and N. Shaked-Monderer, *Completely Positive Matrices*, World Scientific (2003).
[2] G. Pataki, “On the connection of facially exposed and nice cones,” *J. of Mathematical Analysis and Applications*, **400** (2103), 211–221.
[3] V. M. Ramana, “An exact duality theory for semidefinite programming and its complexity implications,” *Mathematical Programming*, **77** (1997), 129–162.
[4] 田村和久，村松正和，「最適化法」（工系数学講座 17），共立出版 (2002).
[5] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
[6] V. Roshchina, “Facially exposed cones are not always nice,” Manuscript, arXiv: 1301.1000v3 (2013).

