ナース・スケジューリングへの再挑戦

池上　敦子，田中　勇真

ナース・スケジューリングは，組合せ最適化問題として解くことが難しいだけでなく，人間が潜在的に考慮している制約や評価尺度の存在から，コンピュータや最適化アルゴリズムにとって扱いにくい問題として考えられてきた．また，現場においては，病棟ナースの勤務表作成が，いまだに組合せ最適化問題としてのナース・スケジューリングにリンクせず，最適化技術が十分に活かされていない状況が続いている．その一方，近年の最適化技術の発展，汎用ソルバーの高性能化に伴い，問題の評価尺度さえ規定できれば，ナース・スケジューリングのインスタンスを解くこと自体はほぼ可能となってきた．著者らは，「最適化技術が，定式化された問題の最適解を与えるだけでなく，真の問題の解決を今まで以上に支援できる」ための方法を探るため，いくつかの取り組みを始めた．本稿では，そのうちの 1 つの研究内容と最新の結果を報告する．具体的には，意思決定者が問題の探索空間や良解空間を把握しやすくするために，1 ナースの実行可能スケジュールのすべてをネットワーク構造で表すことに取り組んだ結果を紹介する．

キーワード：ナース・スケジューリング，解空間，解の可視化，ネットワーク表現，動的計画

1. はじめに

著者（池上）が，「我が国におけるナース・スケジューリング問題」というモデリング論文 [1] を OR 誌に投稿して掲載してもらったのは，1996 年のことである．その後，多くの方がこの問題に興味を持ってくださった．2005 年のモデリング特集では，「モデリングを通して見えた世界」というタイトルで，ナース・スケジューリングとの出会いから，モデリングにおける視点，勤務表作成の流れを紹介させていただいた [2]．2009 年の医療の効率化特集でも，この研究を紹介させていただき [3]，著者のナース・スケジューリングは OR 誌からスタートし，OR 誌に支援してもらっている気がする．

ナース・スケジューリングの歴史は，1970 年代にアメリカで始まり [4]，一時は下火になった時期もある．その詳細については省略するが，1998 年頃から海外でも盛んになっていき [5, 6]，その後は読み切れないほどの論文が出るようになっている [7]．それらの多くは，アルゴリズム構築の論文である．

ナース・スケジューリングは，何をもって最適な解（勤務表）とするかの定義が難しいだけでなく，たとえ，定義できたとしても，解を得ること自体が難しい組合せ最適化問題として知られてきた [7〜9]．しかし，近年の汎用ソルバーの高性能化から，目的関数や制約条件を規定できれば，厳密最適解を得ることも可能になってきている [10, 11]．今後の研究の興味は，アルゴリズムの構築だけでなく，評価尺度（目的関数）をどのように与え，最適解をどう評価するかや，解の修正の可能性を把握するために多様な解を得ることに向かうと考えられる．

さて，本題に入る前に，この研究に再挑戦しようと思った経緯を簡単に紹介させていただきたい．

池上の主たるナース・スケジューリング論文は 2003 年 [8] が最後であり，2005 年の研究詳解論文 [9] は，それまでの成果をまとめたものであった．これらの論文の後は，「達成感」というより「残された問題の厄介さ」から逃げたい気持ちがあり，長い間，この研究を避けていた感がある．最も厄介だったのは，解の評価である．さっさと目的関数を設定し，速くて精度の良いアルゴリズムを適用して「はい，できました！」とすっきりしたいものの，本質を無視するわけにもいかず，何もできないままになってしまった．

その反動で，「人間の評価尺度が存在しない問題」への興味が高まり，たまたま受託研究で舞い込んだ「鉄道ネットワークにおける最安運賃経路探索」研究 [12] に夢中になった．この研究では，最適解を得るアルゴリズムさえ構築できれば，日本全国の鉄道運賃を正しく計算できるようになるので，「なにが最適か」などという哲学的な議論も必要なく，誰の評価も気にしなくていいので，長年のストレスの発散的活動になった．

鉄道ネットワークを扱って，多くのことを知った．首都圏エリアの路線図を見ると，移動の可能性を大まかに知ることができる．しかし，どの 2 駅をとっても，

いけがみ　あつこ
たなか　ゆうま
成蹊大学理工学部
〒 180–8633 武蔵野市吉祥寺北町 3–3–1
E-mail: atsuko@st.seikei.ac.jp，ytanaka@st.seikei.ac.jp

 Copyright ⓒ by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

その間の実行可能経路は数百万の単位で存在し，その中で最安運賃経路を見つけるのは，そんなに簡単ではない．しかし，ある日，逆の発想が湧いた：

2 駅間の実行可能経路を数え上げるのは厄介なのに，それを封じ込めているネットワークはすごい．

さらに，「実行可能経路は数百万の単位」という数も，頭のどこかを刺激した．ナース・スケジューリングの部分問題，つまり，1 ナースの最適スケジュールを見つける問題の実行可能解の数の単位だったのである．そこで，以下の思いが湧いた：

ナース・スケジューリングの部分問題の全実行可能解をネットワークに封じ込めたい．

一方，鉄道ネットワーク研究と並行して取り組んでいたのが，「訪問介護勤務スケジュール作成支援システム」を開発する研究である．ナース・スケジューリングと違って，組合せ最適化問題としての難しさはあまりないものの，スタッフが働くうえでの制約が緩かったり不確かで，解決するには別の難しさを抱えていた．対象とするスタッフ数や利用者数やサービス数が多いこともあり，人手で行うにはミスを避けるためにも負荷的にも厳しく，かといって，支援システムを利用するには，入力の手間や修正の手間が大きな障害になっていた．結局は，最適化技術が活かされにくい対象となっていた．この訪問介護を例にとっても，事業所数は東京だけでも 2,000 を超え，飲食店や販売店やそのほかのサービス業の数は数えきれないほどである．このような現場で，**最適化技術を活かすためには，入力や修正をも含んだ大きな枠組みでの最適化 [13] を考えなくてはいけないことを強く感じた**．入力は，最適化モデルのパラメタでもあるわけだが，現場にとって当たり前なことを入力させるか否か，当たり前なことはほかの現場でも当たり前なのか，潜在的な思いを入力できるようにするのか，等々，議論すべきことは多い．結局は，ナース・スケジューリングで躓いた問題点は，人間の意思決定において必ずついて回る（逃げられない）ことを思い知らされた．

話をまとめると，ナース・スケジューリングから離れた結果，再び湧いてきたこの問題に対する思いは，ナース・スケジューリングの部分問題の実行可能解をネットワーク表現したい，ナース・スケジューリングにおける評価尺度のあり方をとことん考えてみたい，の 2 つであった．

著者らは，これら 2 つに取り組んでいるが，後者はまだ抽象的な段階であり，やはり難しい．本稿では，前者の結果の一部を，論文 [14] を基に紹介したい．この論文は，2012 年 3 月まで研究室に所属していた秋田博紀さんと一緒に行った研究の成果を報告したものである．

実行可能解のネットワーク表現を行った理由は，鉄道ネットワークからの発想だけでなく，ナース・スケジューリングの意思決定を支援するためには，実行可能解空間を直感的に把握でき，その中の良解の分布に関する情報を提供できる仕組みが必要だと考えたからである．

次節以降では，ナース・スケジューリング問題を紹介し，その部分問題として，1 ナースの最適スケジュールを見つける問題を対象に，この問題の解空間を表現するネットワークの構築方法を紹介する．

2. ナース・スケジューリング

ナース・スケジューリングとは，病棟ナースの勤務表を作成する問題である．病棟の交替制勤務には，日勤，準夜勤，深夜勤という 3 つのシフト（勤務時間帯）からなる 3 交替制と，日勤と夜勤の 2 つのシフトからなる 2 交替制があり，それぞれ，各日各シフトに支障のない勤務表が必要とされている．

ナース・スケジューリングを構成する制約条件には，以下の 2 種類のものがある．

シフト制約

毎日のシフトに必要な人数や適切なメンバーを確保するための制約である．必要な合計人数だけでなく，スキルレベルや担当患者等で分けられたナースグループから確保すべき人数の上下限が設定される．ナースグループはナース集合の部分集合のことであり，1 人のナースが複数のグループに所属していることが一般的である．

ナース制約

各ナースの社会的生活や健康を守り，士気を保つために，休みや勤務の希望を考慮したり，無理な勤務形態にならないようにする制約である．

具体的には，各ナースについて大きく以下の 3 つ，そして (iii) についてはさらに詳しく 3 つの条件を考える．

(i) 各シフトの勤務回数や休み回数に上下限を設定
(ii) 確定している勤務，休みや勤務の希望を達成
(iii) 禁止するシフト並びを回避
  a) 同一シフトの連続回数の上下限を設定
  b) 同一シフトの勤務間隔日数の上下限を設定
  c) 異種シフトを含む禁止シフト並びを回避

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

表 1　3 交替制勤務表の例 [8]

(−:日勤, **e**:準夜勤, **n**:夜勤, **+**:その他の勤務, **/**:休み)

Nurse No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30					
	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	/	−	e	n	+
1	e	e	/	−	−	n	n	/	/	/	−	−	e	/	/	−	−	/	−	−	−	e	e	/	−	e	n	n	/	/	10	10	6	4	0
2	n	/	/	/	−	−	−	−	/	e	e	/	+	−	−	n	n	/	/	−	−	−	−	e	e	/	/	−	n	n	9	11	4	5	1
3	−	/	−	−	/	/	−	e	e	n	n	/	/	−	−	−	e	n	n	/	/	/	−	−	−	−	e	/	−	−	9	13	4	4	0
4	/	−	−	e	/	−	e	n	n	/	/	/	−	e	/	/	−	e	/	+	−	−	n	n	/	/	−	−	−	−	10	11	4	4	1
5	−	n	n	/	e	e	/	−	−	−	−	n	n	/	e	e	/	−	−	n	n	/	/	/	/	−	−	/	/	e	10	9	5	6	0
6	/	−	e	n	n	/	/	/	−	−	/	−	−	n	n	/	/	−	e	e	e	/	−	−	n	n	/	e	e	/	10	8	6	6	0
7	/	−	−	−	e	e	/	/	−	−	e	/	n	n	/	/	−	−	/	/	−	−	−	/	−	−	−	e	/	−	10	14	4	2	0
8	−	−	e	/	n	n	/	/	−	+	−	e	/	/	−	−	/	−	n	n	/	/	−	e	/	/	−	−	−	e	10	11	4	4	1
9	/	/	−	e	/	−	−	−	e	e	/	/	−	e	/	−	−	−	e	/	n	n	/	/	−	−	e	/	−	n	10	11	6	3	0
10	+	e	/	−	−	−	e	/	/	/	/	−	e	/	−	+	/	−	−	e	/	−	−	−	e	/	−	n	n	/	10	11	5	2	2
11	e	/	−	−	−	/	−	e	/	−	n	n	/	/	/	+	−	e	/	−	−	−	−	n	n	/	/	−	e	/	10	11	4	4	1
12	/	−	−	/	−	−	/	/	/	−	−	e	/	−	−	+	n	n	/	/	/	−	−	−	−	e	/	−	−	−	10	15	2	2	1
13	−	/	n	n	/	/	+	−	/	/	/	−	−	−	e	e	e	/	−	−	e	e	e	/	/	/	−	−	−	−	10	11	6	2	1
14	−	e	/	−	n	n	/	/	−	+	/	/	/	−	−	−	e	e	/	e	e	/	−	e	n	n	/	/	−	−	10	9	6	4	1
15	−	−	e	/	/	−	e	e	/	−	e	e	e	/	−	−	/	/	n	n	/	/	−	−	−	/	−	−	n	n	9	11	6	4	0
16	/	−	n	n	/	/	−	−	e	e	/	−	+	/	−	e	n	n	/	/	+	−	/	−	e	e	n	n	/	e	9	7	6	6	2
17	e	/	−	e	e	/	−	−	n	n	/	/	+	−	e	/	−	−	e	/	/	−	n	n	/	/	−	−	e	/	10	9	6	4	1
18	/	/	−	−	−	e	n	n	/	/	/	−	−	e	n	n	/	/	−	+	−	e	e	/	/	−	e	e	/	−	10	9	6	4	1
19	−	/	−	−	−	/	+	−	e	/	n	n	/	/	−	+	e	/	−	−	−	−	/	/	/	/	−	−	−	−	10	14	2	2	2
20	−	e	e	e	/	/	−	e	/	−	−	−	/	−	−	−	−	/	/	−	e	/	−	−	/	n	n	/	/	+	10	12	5	2	1
21	n	n	/	/	−	−	e	/	n	n	/	/	−	−	−	e	/	−	−	e	/	−	−	e	e	e	/	/	−	+	9	10	6	4	1
22	+	−	−	−	/	−	−	−	/	e	e	/	/	−	n	n	/	/	/	/	−	e	e	/	−	−	−	−	/	+	10	12	4	2	2
23	−	−	/	−	e	/	n	n	/	/	−	−	−	−	e	/	/	−	e	/	/	/	−	−	−	−	e	/	−	+	10	13	4	2	1
24	e	/	/	−	−	e	/	−	−	−	/	−	e	e	/	−	−	e	/	−	−	n	n	/	/	/	−	−	−	−	9	14	5	2	0
25	n	n	/	/	−	−	/	−	−	/	−	e	n	n	/	/	−	−	−	−	n	n	/	/	−	−	/	e	e	e	9	11	4	6	0
−	9	9	10	11	10	9	8	10	7	8	7	9	7	10	11	8	9	10	8	8	9	10	13	8	9	8	11	11	11	9					
e	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4					
n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3					

3 交替制勤務表の例を表 1 に示す．表中の記号−，e，n，+，/ は，それぞれ日勤，準夜勤，深夜勤，そのほかの勤務，休みを表す．この勤務表作成のための入力データは，ベンチマークサイト [11] でも紹介され，多くの研究者 [15] に取り組まれてきたものである．

現在，2 交替制勤務が主流であるものの，外科など手術後の夜間看護量が多い部署では，3 交替制で看護を行っている場合も多いという．3 交替制はシフトの種類が多く，特に夜勤が 2 種類存在することから，ナース制約の (iii) が細かく設定される傾向があり，組合せ最適化問題としては．2 交替制の問題より解くことが難しくなる．本稿では，この 3 交替制の例を使って説明したい．

ちなみに，シフト制約は，勤務表の各日の縦の並びに対する制約であり，ナース制約は横の並びに対する制約になっている．現場の勤務表を観察すると，一般的に，シフト制約が重視され，ナースの休み希望を諦めるといったナース制約の緩和がみられるが，長期的に看護の質を守るためには，ナースの健康や士気を守ることも非常に重要であり，シフト制約とナース制約の両方を満たすことが必要である．

定式化においては，各ナースの心身の健康状態を十分把握した人間でない限り「適切なナース制約の緩和」ができないことに着目し，ナース制約は必ず守った下で，暫定的な目的関数として「シフト制約を違反する度合いの最小化」を設定している．

1 人のナースの実行可能スケジュールを「そのナースに関するすべてのナース制約を満たすスケジュール」とし，ナース i に実行可能スケジュール p を割当てるときに 1，そうでないときに 0 となる意思決定変数を λ_{ip} とする．そのほかの記号と定式化を以下に示す．

$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ ： ナース番号の集合.

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$： スケジューリング対象日の集合.

$W = \{0, 1, \ldots, w\}$： シフト番号（例，0:休み，1:日勤，2:準夜勤，3:深夜勤）の集合.

$R = \{r |\ r$ はグループ $\}$ ： スキルや担当患者等で分けられたグループ（例，ベテラン，新人，A チーム，B チーム）の集合.

$G_r = \{i |$ ナース i はグループ r に所属 $\}, r \in R$：グループ r に所属するナースの番号の集合.

$a_{rjk}, b_{rjk}, r \in R, j \in N, k \in W$： j 日のシフト k におけるグループ r のナース数の下限値と上限値.

$P_i, i \in M$： ナース i の実行可能スケジュールの集合.

ナース i の実行可能スケジュール $p \in P_i$ は，それぞれ $\delta_{ipjk}, j \in N, k \in W$（ナース i のスケジュール p において j 日がシフト k なら 1，そうでなければ 0）で表現される.

$\alpha^-_{rjk}, \alpha^+_{rjk}, r \in R, j \in N, k \in W$： j 日のシフト k におけるグループ r のナース数が，下限値 a_{rjk} を下回る数と上限値 b_{rjk} を上回る数をそれぞれ表す変数.

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

定式化

$$\text{minimize} \quad \sum_{r\in R}\sum_{j\in N}\sum_{k\in W}(w^-_{rjk}\alpha^-_{rjk}+w^+_{rjk}\alpha^+_{rjk}) \quad (1)$$

subject to

$$a_{rjk}-\alpha^-_{rjk} \le \sum_{i\in G_r}\sum_{p\in P_i}\delta_{ipjk}\lambda_{ip} \le b_{rjk}+\alpha^+_{rjk}, \quad (2)$$
$$r\in R,\ j\in N,\ k\in W,$$

$$\sum_{p\in P_i}\lambda_{ip}=1, \qquad i\in M, \quad (3)$$

$$\lambda_{ip}=0 \text{ or } 1, \qquad i\in M,\ p\in P_i, \quad (4)$$

$$\alpha^-_{rjk},\ \alpha^+_{rjk}\ge 0, \qquad r\in R,\ j\in N,\ k\in W. \quad (5)$$

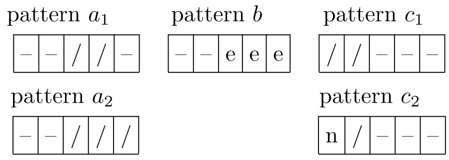
ここで，目的関数 (1) 式の w^-_{rjk} と w^+_{rjk} は，人数の過不足に対する重み付けであり，過不足数 α^-_{rjk}, α^+_{rjk} を (2) 式で規定している．(3) 式は各ナースに実行可能スケジュールをちょうど 1 つ選ぶ制約である．

各ナースの実行可能スケジュール集合 P_i の要素数は数百万と考えられ，陽的に列挙したり保持することは現実的ではないことから，列生成の仕組みを持つアルゴリズムを意識した定式化といえる．

3. 部分問題の設定

部分問題軸アプローチ [8, 9] では，与えられた試行解（勤務表）に対し，対象ナース以外のスケジュールを固定した下で，対象ナースのナース制約を満たしつつ「シフト制約を違反する度合い」を最小化することを部分問題として定義している．そして，1 反復において，ナースごとの部分問題を解き，目的関数値を一番小さくする部分問題の解を用いて試行解を更新する（目的関数値を一番小さくするナースのスケジュールを更新する）．これを，局所探索法やそれに基づく方法（タブ探索など）を使って繰り返し，全体の解を改善していく．論文 [8] では，3 交替制ナース・スケジューリングの部分問題を解くために，スケジュール期間をいくつかの連続した期間に分割し，分割された期間ごとに実行可能部分スケジュールをあらかじめ列挙しておく．例えば，7 日ごとに分割すれば実行可能部分スケジュールは高々1,000 種類程度である．その後，分枝限定法を利用してそれらを組み合わせることにより，質の良い解を与えることに成功している．

ここでは，この分枝限定法で利用した実行可能部分スケジュール（以降，パターン）を基に解空間把握を試みるため，それに対応した新たな定式化を考える．パターンの長さは，隣接する期間のパターンが連結可能か否かでナース制約の (iii) を考慮できるよう 7 日とする．これは，一般的にナース制約 (iii) が対象にする日数が 7 日（1 週間）に収まるからである．



$a_1\to b\to c_1$，$a_2\to b\to c_1$, $a_2\to b\to c_2$ は可能
$a_1\to b\to c_2$ は不可能

- $a_1\to b$ が可能かどうかは，その後のパターンに依存
- $b\to c_2$ が可能かどうかは，その前のパターンに依存

図 1　短すぎるパターンの例

ちなみに，制約で扱わなければならない日数に比べてパターンの長さが短かすぎると，対象とする 2 つのパターンを同時に採用できるかは，さらに前後のパターンの情報がないと判定できない．図 1 に示すパターンは，1 週間に 1 回は休み（/）が入らなくてはいけないという制約があった場合，連続する 2 パターン間だけでは制約を満たすか否か判定できない例である．

もう少し詳しく説明すると，ナース制約 (iii) の対象日数の最大値を $\hat{n}$ とすると，パターン長が $\hat{n}-1$ 以上であれば図 1 の●印で示した状況が発生しないため，隣接期間のパターン間だけで判定できる（最終期間に関しては $\hat{n}-1$ 以上である必要はない）．

適切な長さのパターンを利用した場合の部分問題の定式化を以下に示す（原問題の定式化 [14] は省略）．

スケジュール期間内の週の数を q，h 週に含まれる日の集合を $N_h=\{j_1,\ldots,j_{n_h}\}$，ナース i の h 週のパターンの集合を P_{ih} とし，h 週のパターン $p\in P_{ih}$ を $\delta_{ihpjk}, j\in N_h, k\in W$（$j$ 日の勤務がシフト k なら 1，そうでなければ0）で表現する．また，パターン $p\in P_{ih}$ におけるシフト k の数を $\rho_{ihpk}=\sum_{j\in N_h}\delta_{ihpjk}$ とし，ナース i の 1 カ月におけるシフト k の勤務回数の下限と上限をそれぞれ c_{ik}, d_{ik} とする．さらに，ナース i の h 週のパターン $p\in P_{ih}$ と翌週のパターン $p'\in P_{i\cdot h+1}$ の間の連結可能性を $\theta_{ihpp'}$（可能なら 1，そうでなければ 0）で表すことにする．意思決定変数としては，ナース i の h 週のパターン p を採用するか否かを 1 と 0 で表す λ_{ihp} を使用する．

さらに，定式化をシンプルに示すため，与えられた試行解でナース i 以外のスケジュールを固定したとき（つまり，$\lambda_{i'hp'}$, $i'\in M$, $i'\ne i$, $h=1,\ldots,q$, $p'\in P_{i'h}$ を定数とみなす）を考え，ナース i の h 週のパターン p のコスト f_{ihp} を以下のように求めておく．

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$$f_{ihp} = \sum_{j\in N_h}\sum_{k\in W}\sum_{r\in G}\max\{\,0,$$

$$w^-_{rjk}(a_{rjk} - g_{ir}\delta_{ihpjk} - \sum_{\substack{i'\in G_r\\ i'\neq i}}\ \sum_{p'\in P_{i'h}}\delta_{i'hp'jk}\lambda_{i'hp'}),$$

$$w^+_{rjk}(g_{ir}\delta_{ihpjk} + \sum_{\substack{i'\in G_r\\ i'\neq i}}\ \sum_{p'\in P_{i'h}}\delta_{i'hp'jk}\lambda_{i'hp'} - b_{rjk})\,\}$$

ここで，g_{ir} は，ナース i がグループ r のメンバーであれば 1，そうでなければ 0 である定数とする（$g_{ir} = |G_r \cap \{i\}|$）．

部分問題 i（ナース i）の定式化

$$\text{minimize}\ \sum_{h=1}^{q}\sum_{p\in P_{ih}} f_{ihp}\lambda_{ihp} \qquad (6)$$

subject to

$$c_{ik} \le \sum_{h=1}^{q}\sum_{p\in P_{ih}}\rho_{ihpk}\lambda_{ihp} \le d_{ik},\quad k\in W, \qquad (7)$$

$$\lambda_{ihp} + \lambda_{i\cdot h+1\cdot p'} \le 1 + \theta_{ihpp'}, \qquad (8)$$

$$h = 1,\ldots,q-1, p\in P_{ih},\, p'\in P_{i\cdot h+1},$$

$$\sum_{p\in P_{ih}}\lambda_{ihp} = 1,\quad h = 1,\ldots,q, \qquad (9)$$

$$\lambda_{ihp} = 0 \text{ or } 1,\quad h = 1,\ldots,q,\ p\in P_{ih}. \qquad (10)$$

f_{ihp} を利用することにより，ナース i 以外のナースのスケジュールが固定された下での (6) 式は，2 節の定式化の (1) 式と (2) 式に対応するようになっている．(9) 式は，(3) 式に対応し，(7) 式と (8) 式は，各週のパターン $p\in P_{ih}$ を組み合わせてできたスケジュールが実行可能スケジュール集合 P_i に含まれることを保証するためのものである．

本稿では，この部分問題における実行可能解（実行可能スケジュール）を把握することに焦点を絞る．

4. 動的計画法に基づくネットワーク

3 節の部分問題の定式化には，パターンの長さを 1 週間と設定することにより，すべてのパターンの列挙を容易にすると同時に，ナース制約 (iii) の「連続勤務回数」,「勤務間隔日数」,「禁止されるシフト並び」といった局所的だが扱いにくい条件を，隣接するパターンを参照するだけで考慮できる利点がある．

1 週間分のパターンは，表 1 の例においても各ナース高々1,000 程度なので，それらのパターンが連結可能か否かは容易にチェックすることができ，$\theta_{ihpp'}$ をあらかじめマトリックスなどに保持しておくことが可能である．

この問題を解くにあたり，2 つの方針が考えられる．1 つ目は，(7) 式（休みやシフトの回数の制約）を緩和した最短路問題を利用する方法 [14]，2 つ目は，部分問題を直接動的計画法で解く方法である．ここでは，後者について詳しく述べる．

まず，「h 週の子問題」として，ナース i の h 週のパターンが p，1 週から h 週までのシフト $k\in W$ の累積回数が e_{ihk} であるという条件の下で，1 週から $h-1$ 週までの最適なスケジュールを決定する問題を考え，以下のように表す．

h 週のパターンが p，累積回数が $e_{ihk}, k\in W$ であるときの「1 週から $h-1$ 週までの最適なスケジュール」を決定する問題

$$g^*_h(p, e_{ihk}, k\in W) = \min\sum_{h'=1}^{h-1}\sum_{p'\in N_{h'}} f_{ih'p'}\lambda_{ih'p'} \qquad (11)$$

subject to

$$\sum_{h'=1}^{h-1}\sum_{p'\in P_{ih'}}\rho_{ih'p'k}\lambda_{ih'p'} = e_{ihk} - \rho_{ihpk},\quad k\in W, \qquad (12)$$

$$\lambda_{ih'p'} + \lambda_{i\cdot h'+1\cdot p''} \le 1 + \theta_{ih'p'p''}, \qquad (13)$$

$$h' = 1,\ldots,h-2, p'\in P_{ih'}, p''\in P_{i\cdot h'+1},$$

$$\lambda_{i\cdot h-1\cdot p'} \le \theta_{i\cdot h-1\cdot p'p},\quad p'\in P_{i\cdot h-1}, \qquad (14)$$

$$\sum_{p'\in P_{ih'}}\lambda_{ih'p'} = 1,\quad h' = 1,\ldots,h-1, \qquad (15)$$

$$\lambda_{ih'p'} = 0 \text{ or } 1,\ \ h' = 1,\ldots,h-1,\ p'\in P_{ih'}. \qquad (16)$$

したがって，$g^*_h(p, e_{ihk}, k\in W)$ は，

任意の $1 < h \le q$，$p\in P_{ih}$，$e_{ihk}, k\in W$ に関して，

$$g^*_h(p, e_{ihk}, k\in W) =$$

$$\min_{\substack{p'\in P_{i\cdot h-1}\\ \theta_{i\cdot h-1\cdot p'p}=1}}\{g^*_{h-1}(p', e_{ihk} - \rho_{ihpk}, k\in W) + f_{i\cdot h-1\cdot p'}\}, \qquad (17)$$

$h = 1$ の $p\in P_{i1}$（$e_{i1k} = \rho_{i1pk}, k\in W$）に関して，

$$g^*_1(p, e_{i1k}, k\in W) = 0 \qquad (18)$$

と表現でき，元の部分問題は，以下のように表せる．

$$\min_{\substack{c_{ik}\le e_{iqk}\le d_{ik}\\ k\in W}}\ \min_{p\in P_{iq}}\{g^*_q(p, e_{iqk}, k\in W) + f_{iqp}\} \qquad (19)$$

この問題記述に従って，動的計画法が利用できるネッ

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

トワーク構築を考える．

ネットワークを構成するノードは，各週 h の「パターン p と累積回数 $e_{ihk}, k \in W$」（以降，$\underline{p, e_{ihk}}$ と記述する）に対応させ，ソースノードとシンクノードを加える．ソースノードからは 1 週のノード $\underline{p, e_{i1k}}$ すべてにアークを設定する．シンクノードへは，$c_{ik} \le e_{iqk} \le d_{ik}, k \in W$ を満たす q 週のノード $\underline{p, e_{iqk}}$ からアークを設定する．さらに，h 週のノード $\underline{p, e_{ihk}}$ から $h+1$ 週のノード $\underline{p', e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ へは，$\theta_{ihpp'} = 1$，かつ，$e_{ihk} = e_{i\cdot h+1\cdot k} - \rho_{i\cdot h+1\cdot p'k}, k \in W$ が成り立つ場合のみアークを設定する．

これらにより，できあがったネットワーク上のソースノードからシンクノードまでのすべての経路がナース i の部分問題の実行可能解になるとともに，すべての実行可能解が経路としてこのネットワークに含まれることになる．さらに，ソースノードから出るアークに 0，$\underline{p, e_{ihk}}$ から出るアークに f_{ihp} をコストとして設定すれば，ソースノードから各ノード $\underline{p, e_{iqk}}$ までの最短路の長さは，$g_h^*(p, e_{ihk}, k \in W)$ となり，対応する h 週までのスケジュールのコストは，$g_h^*(p, e_{ihk}, k \in W) + f_{ihp}$ となる．つまり，ソースノードがらシンクノードまでの最短路は部分問題における最適解となる．

ちなみに，$e_{ihk}, k \in W$ の値によっては，前後の週にアークが設定されない場合があるので，ソースノードからの経路やシンクノードへの経路が存在しないノードやアークを取り除く工夫 [14] が必要である．

5. ネットワークの構築

具体的な実装方法についても簡単に紹介しておく．その理由としては，ネットワークを構成するノード数やアーク数が膨大になるため，効率の悪い構築方法を採用すると非常に時間がかかってしまうからである．例えば，ノードの実行可能性を判定して生成しながら構築する方法では，翌週のノードを生成する際に無駄な列挙と判定が必要となり，1 ナースのネットワークの構築だけでも数時間から数十時間を要してしまう．そこで，数十秒程度での構築を目指し，初めにノードを縮約したネットワークを構築し，その縮約ネットワークを利用して，目指すネットワークに展開する．

まず，パターン内のシフト回数 $\rho_{ihpk}, k \in W$ が等しいノード $\underline{p, e_{iqk}}$ をまとめて 1 つのノード $\underline{\hat{\rho}_{ihk}, e_{ihk}}$ として考える．h 週のノード $\underline{\hat{\rho}_{ihk}, e_{ihk}}$ から $h+1$ 週のノード $\underline{\hat{\rho}_{i\cdot h+1\cdot k}, e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ へは，$e_{ihk} = e_{i\cdot h+1\cdot k} - \hat{\rho}_{i\cdot h+1\cdot k}$ が成り立つ場合のみアークを設定する．ソースノードからは 1 週のすべてのノードにアークを設定し，シンクノードへは，q 週の e_{iqk} が，$c_{ik} \le e_{iqk} \le d_{ik}, k \in W$ となるノードからのみアークを設定する．このように生成されたネットワークのソースノードからシンクノードへの経路は，週を重ねるごとの各シフトの勤務累積数推移を表しており，実行可能な勤務累積数推移のすべてがこのネットワークの経路として含まれる．

別の考え方をすると，1 つのノード $\underline{\hat{\rho}_{ihk}, e_{ihk}}$ には，$\rho_{ihpk} = \hat{\rho}_{ihk}, k \in W$ となるパターン p がすべて含まれているので，このノードから出るアークのコストを $\min\{f_{ihp} | \rho_{ihpk} = \hat{\rho}_{ihk}, k \in W\}$ と設定すれば，このネットワーク上で最短路を求める問題は，部分問題の定式化の (8) 式を緩和した問題を解くことに等価である．ここでは，このノードを縮約したネットワークのことをシフト回数推移ネットワークと呼ぶ．

表 1 のデータを対象に，25 名のナースのシフト回数推移ネットワークを構築してみると，シフトの勤務回数の上下限が大きく異なるナースを除けば，ほぼ同じ大きさのものが構築できた．平均ノード数は約 2 万，平均アーク数は約 33 万である．

シフト回数推移ネットワークが構築されたら，縮約された各ノードを，対応する元のノード $\underline{p, e_{ihk}}$ に展開する．このとき，縮約されたノード $\underline{\hat{\rho}_{ihk}, e_{ihk}}$ と $\underline{\hat{\rho}_{i\cdot h+1\cdot k}, e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ の間にアークが設定されていたならば，$\underline{\hat{\rho}_{ihk}, e_{ihk}}$ から展開されたすべてのノード $\underline{p, e_{ihk}}$ と $\underline{\hat{\rho}_{i\cdot h+1\cdot k}, e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ から展開されたすべてのノード $\underline{p', e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ に対して，アークが設定できるか調べる．もし，$\underline{p, e_{ihk}}$ と $\underline{p', e_{i\cdot h+1\cdot k}}$ に対して，$\theta_{ihpp'} = 1$ だったならば，展開したネットワークにもアークを設定し，そうでなければアークを設定しない．このようにノードを展開し，アークを設定し直すことにより，4 節のネットワークを構築することができる．完成したネットワークを実行可能パターンネットワークと呼ぶ．

入力データによっては，ナースごとに，休み希望やセミナなどの予定が異なり，ネットワークのサイズに大きなばらつきがでることもある．表 1 のデータに対し，実行可能パターンネットワークを構築したときの各ナースのネットワークサイズ（ノード数とアーク数）を，図 2 にグラフで示す．

このデータでは，ナース制約 (iii) が対象とする日数の最大が 7 日だったため，パターンの長さは 6 日でも可能である．6 日パターンでネットワークを構築すると，7 日パターンに比べて，ノード数が 6 割程度，アーク数が 4 割程度に縮小できる [14]．

1 つのネットワークの構築には，20〜30 秒程度を要

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

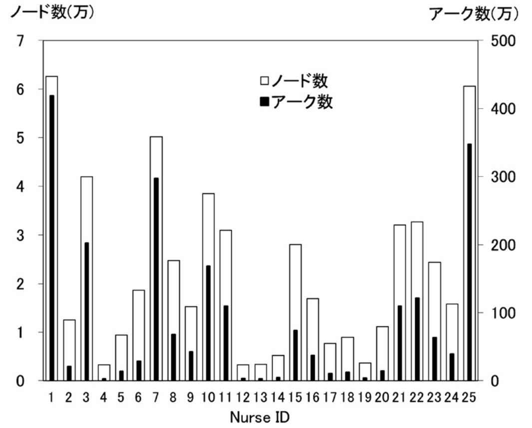


図 2 実行可能パターンネットワークのサイズ（パターンは 7 日ごとに分割されたもの）

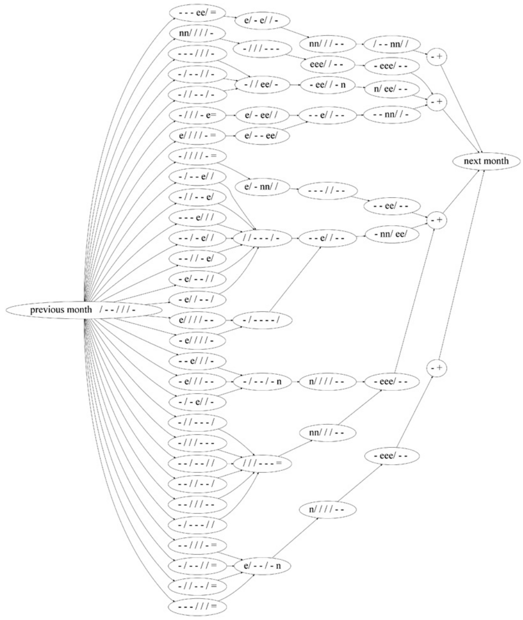


図 3 k 最短路で絞り込んだネットワーク

し[1]，構築アルゴリズムのデータ構造や実装方法にさらなる工夫が必要だが，これまで知りえなかった情報を生み出すという意味では，現時点では十分な速さと考える．なお，2 交替制のデータについても同様なネットワーク構築に成功している．

6. ネットワークの利用

これまでの研究では，1 ナースの実行可能スケジュールを全列挙したり，その空間がどの程度の大きさであるか把握することが不可能だった．これに対し，提案する実行可能パターンネットワークは，各ナースの実行可能スケジュールを全列挙したのと同等な情報を持つことができる．ネットワークのサイズの違いは，実行可能スケジュール数の違いを正確に示すわけではないが，大きな依存関係は存在すると考えられ，各ナースのスケジュールの自由度を大まかに捉えることができる．また，各ナースに対する条件の緩和や追加による，実行可能スケジュール集合の大きさや特徴の変化も把握できる．

5 節で構築したネットワークにおいて，ある試行解（あるコスト設定）に対し最短路を得るための実行時間の平均は，7 日パターンのネットワークで 0.065 秒，6 日パターンのネットワークで 0.046 秒であった [1]．この時間も実装の工夫により短縮が可能だと考える．

部分問題の最適解が最短路問題を解くことによって高速に得られれば，論文 [8] のアルゴリズムの「部分問題を解く分枝限定法」をこれに置き換えることにより，全体の勤務表作成も可能になる．

一方，実行可能パターンネットワークのサイズは膨大であり，実際にネットワークを表示して視覚的に把握することは難しい．しかし，本来，われわれの興味は，現在の勤務表を改善する可能性のある優れたスケジュール群であると考えられる．そこで，実行可能パターンネットワークに含まれる良解のみを抽出し，それを構成するノードやアークを表示して，良解空間を提供することを考えた．具体的には，実行可能パターンネットワーク上で k 最短路 [16] を求め，最適スケジュールを 1 つ得るだけでなく複数の良解を得ることにより，勤務表の改善案を提案することや，各ナースにおける勤務変更の可能性の把握を支援するのである．

実行可能パターンネットワーク上の k 最短路で採用されたノードとアークで構成されるネットワークのイメージを，図 3 に示す（ベスト 30 の解を含んでいる）．

このように良解を含んだ縮小したネットワークを，アルゴリズム中で有効に利用すれば，探索空間は狭まり，高速なスケジューリングも可能になると考える．

7. おわりに

最適化技術においては，一般に，目的関数を一意に設定することが求められるが，ナース・スケジューリングのように，人命にもかかわり，働く人間の生活にも影響する問題においては，潜在的な評価尺度が複数存在する場合も多く，目的関数の設定は困難な課題と

[1] Intel(R) Xeon(R) CPU E5335 Quad Core @2.00GHz, Memory 24G.

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

いえる．

このような問題に最適化技術の適用を考えた場合，暫定的に設定した目的関数に対する最適解が実際に利用されるためには，潜在的な制約や評価尺度に対し，なんらかの修正作業が必要となる．効率の良い，満足のいく修正を可能にするには，最適化アルゴリズムが与えた最適解と，本来目指していた解との関係を直感的に把握しやすい形で情報提供する必要がある．最適解とほぼ等しい評価の解が膨大に存在する場合もあれば，最適解が非常に特異な解である場合，さらには，その特異さが現実的に好ましい場合もあれば，不自然な場合もあり得る．

本稿では，これらの情報の把握を支援する数理的な仕組みの１つとして，実行可能解空間のネットワーク表現に取り組んだ結果を紹介した．構築したネットワークを人間にとって視覚的にも把握しやすいよう，意味のある部分に絞り込んで提供するなど，良解の分布に対する情報提供についても簡単に紹介した．紙面の関係上，端折った部分も多いが，新たな挑戦に取り組み始めたことを理解していただけたら幸いである．

さらに，著者らは，対象問題に最適化アルゴリズムを適用する前に，潜在的な制約や評価尺度について，過去の勤務表から多くの情報を取り出せると考えている．それらの情報により，実行可能解の空間を絞り込んでおくことや，目的関数をより意味のあるものにできる可能性があると考える．これは，1 節で述べたわれわれのもう１つの取り組みである．

これら両方の取り組みは，これまでの意思決定において，潜在的に考慮していた制約や評価尺度をあらためて意識できる「人間の思考に調和する最適化」，さらには，「人間の暗黙知に対してロバスト性を持つ最適化」の研究につながると考えている．

謝辞　JST/CRDS システム科学技術俯瞰検討会最適化分科会において，「潜在的な評価尺度や制約をも意識した最適化モデリング技術とそれと連動するアプローチの研究」について議論させていただく機会をくださった杉原正顯先生，土谷　隆先生，そして，委員の方々に深く感謝いたします．

参考文献

[1] 池上敦子，丹羽明，大倉元宏，我が国におけるナース・スケジューリング，オペレーションズ・リサーチ，**41**, 436–442, 1996.

[2] 池上敦子，モデリングを通して見えた世界，オペレーションズ・リサーチ，**50**, 564–567, 2005.

[3] 池上敦子，ナース・スケジューリング，オペレーションズ・リサーチ，**54**, 401–407, 2009.

[4] D. M. Warner, Scheduling nursing personnel according to nursing preference: A mathematical programming approach, *Operations Research*, **24**, 842–856, 1976.

[5] K. A. Dowsland, Nurse scheduling with tabu search and strategic oscillation, *European Journal of Operational Research*, **106**, 393–407, 1998.

[6] H. H. Millar and M. Kiragu, Cyclic and non-cyclic scheduling of 12 h shift nurses by network programming, *European Journal of Operational Research*, **104**, 582–592, 1998.

[7] E. K. Burke, P. De Causmaecker, G. V. Berghe and H. V. Landeghem, The state of the art of nurse rostering, *Journal of Scheduling*, **7**, 441–499, 2004.

[8] A. Ikegami and A. Niwa, A Subproblem-centric Model and Approach to the Nurse Scheduling Problem, *Mathematical Programming*, **97**, 517–541, 2003.

[9] 池上敦子，ナース・スケジューリング—調査・モデリング・アルゴリズム—，統計数理，**53**, 231–259, 2005.

[10] 乾伸雄，池上敦子，ナーススケジューリング問題における混合整数線形計画問題と充足性判定問題による厳密解法の比較，オペレーションズ・リサーチ，**55**, 706–712 2010.

[11] University of Nottingham, Personnel Scheduling Data Sets and Bench-marks (2006). http://www.cs.nott.ac.uk/~tec/NRP/

[12] 池上敦子，森田隼史，山口拓真，菊地丞，中山利宏，大倉元宏，鉄道運賃計算のための最安運賃経路探索—複数の鉄道会社を含む場合—，OR 学会和文論文誌，**51**, 1–24 2008.

[13] 池上敦子，宇野毅明，足立幸子，村野真悟，佐藤広幸，吉田勇人，軍司奈緒，内山広紀，運用コストを重視した最適化—小規模な事業所で運用可能なシステムを考える—，オペレーションズ・リサーチ，**57**, 695–704, 2012.

[14] 秋田博紀，池上敦子，ナース・スケジューリングにおける部分問題実行可能解空間のネットワーク表現，統計数理，**61**, 79–95, 2013.

[15] J. Métivier, P. Boizumault and S. Loudni, Solving Nurse Rostering Problems Using Soft Global Constraints, *Lecture Notes in Computer Science* (*Principles and Practice of Constraint Programming*), **5732**, 73–87, 2009.

[16] E. Q. V. Martins, M. M. B. Pascoal and J. L. E. Santos, The k shortest paths problem, Research Report, The University of Coimbra, 1998.

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.