

リスク評価にCVaRを用いた保険料決定の最適化モデル

柴崎 佑翔, 南條 慶輔, 高野 祐一, 水野 眞治

1. はじめに

生命保険とは人間の疾病や死亡に関する保障であり、万が一の保障として多くの人が加入している。この生命保険の保険料を適切な値に設定することは、保険会社が健全な経営を続けていくうえで非常に重要である。

保険会社では、加入者数を増やすためになるべく保険料を低く設定したいが、低すぎる保険料では多額の損失を被るリスクが生じる。このような背景から本論では、死亡保障のみを対象とした生命保険の保険料最適化モデルを提案し、損失リスクを抑えながらどの程度まで保険料を低く設定できるかを分析する。

事務費などを除いた保険料（純保険料）は、死亡率と運用利回りがわかれば、保険会社の収入現価と支出現価を等しくすること（収支相等の原則）により算出することができ（例えば文献 [2, 8, 15] などを参照）、性別と年齢ごとに保険料は計算される。しかし、将来の死亡率や運用利回りの値は現時点では不確実なので、実測値が予測値（期待値）より悪ければ保険会社は損失を被ることになる。

このようなリスクを回避するために、死亡率や運用利回りを確率変数とみなして保険料を算出する方法が提案されている。効用関数を用いた保険料の算出（例えば文献 [2, 10, 15] などを参照）はその一つであるが、効用関数は推定すること自体が難しく実用的とは言えない。そのため実務上は割増した死亡率を用いて、収支相等の原則により保険料を算出することが一般的である。例えば文献 [11] では、死亡率の標準偏差に基づいて死亡率を割増する方法が示されているが、保険会社の運用利回りの不確実性については考慮されていない。

より高度な手法として、文献 [7] では死亡率と運用利回りを確率変数としたシミュレーションによって保険料を決定する手法が提案され、文献 [3, 10, 15] ではリスク分の付加保険料を決定するためのさまざまな保険料計算原理が紹介されている。しかし、これらはすべて保険（性別と年齢）ごとにリスクを評価して保険料を決定するものであり、保険全体の損失から生じるリスクを正確に把握したうえで保険料を決定するものではない。また、文献 [7] のようなシミュレーションを行えば、設定した保険料に対して保険全体の損失から生じるリスクを計測することは可能だと考えられるが、そこから性別と年齢ごとに適切な保険料を決定していくことは難しい。

本論では、上述のような保険数理上の保険料評価（決定）モデルではなく、保険会社による保険料制御モデルという立場から、最適化モデルを利用した新しい保険料決定手法を提案する。提案モデルでは、想定する確率分布から多数のシナリオを生成することによって死亡率と運用利回りの不確実性を表現する。そして、ファイナンス分野のリスク指標 Conditional Value-at-Risk (CVaR) [13] によって損失リスクを定量化し、損失リスク額の上限制約のもとで適切な保険料を決定する。ファイナンス分野のリスク指標は保険の文脈でもすでに利用されているが（例えば文献 [14] など）、そのなかでも CVaR は一定の確率で生じる多額の損失を定量化する下方リスク指標であり、損失の確率分布が非対称であっても適切に損失リスクを評価することができる。また、CVaR はリスク指標として理論的に好ましい性質を備えていることが知られており [1, 12]、これらの理由から本論では数多くあるファイナンス分野のリスク指標（例えば文献 [4] などを参照）のなかから CVaR を利用している。また、本論では保険会社（供給側）のリスク管理を目的に CVaR を利用しているが、文献 [5, 6] では保険加入者（需要側）のリスク管理のために CVaR が利用されている。さらに提案モデル

しばさき ゆうと, なんじょう けいすけ, たかの ゆういち, みずの しんじ
 東京工業大学大学院社会理工学研究科経営工学専攻
 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
 受付 12.11.7 採択 13.5.27

では、死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮し、保険全体の損失リスクを制御しながら、すべての性別・年齢の保険料を同時に決定することが可能である。

本論では、提案モデルを凸2次計画問題として定式化し、ある保険会社から提供された実際のデータを用いて数値実験を行った。まず、提案モデルが算出する保険料の標本誤差が十分に小さいことを検証し、それから死亡率と運用利回りの不確実性が最適保険料に与える影響を調べ、許容可能な損失額の上限值と最適保険料の関係についても考察した。これらの分析は、損失リスクを制御しながら死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮して最適な保険料を決定する提案モデルだからこそ可能な分析であると言える。さらに、既存の保険料計算手法との比較を通して、提案モデルの特徴と有用性を明らかにした。

2. 保険料の算出方法

本節では、まず今回想定する生命保険の前提を説明し、その生命保険の保険料の算出方法について述べる。その後、保険料の算出方法の問題点について言及する。

2.1 設定

今回想定する死亡保障のみを対象とした生命保険は、以下の前提に従うとする：

- ある一定の契約期間が存在する
- 契約期間内の毎年初めに契約者は保険料を支払う
- 支払う保険料は每期一定金額
- 新規契約者、継続契約者ともに保険料は同額
- 被保険者が死亡した場合のみ受取人に保険金が支払われる
- 保険金は即時払いとするが、モデル上は簡単のために各年度の中央で保険金が支払われることとして即時払いを近似する
- 途中解約はないものとする

ここからは契約期間を T 年、保険金額を M 円とし、これらは所与の値とする。そして、文献 [2, 8, 15] を一部参考にして以下の表記法を用いる：

- $\mathcal{X} := \{X_L, X_{L+1}, \dots, X_{U-1}, X_U\}$: 年齢の集合
- $\mathcal{G} := \{\text{男性}, \text{女性}\}$: 性別の集合
- $\mathcal{B} := \{\text{新規}, \text{継続}\}$: 契約種別の集合
- $F_{x,g,b}$: 加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳、性別 $g \in \mathcal{G}$ 、契約種別 $b \in \mathcal{B}$ の保険の加入者数（本論では加入者数は保険料に依存しないこととする）
- $P_{x,g}$: 加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳、性別 $g \in \mathcal{G}$ の保険の年額保険料（決定変数）

死亡率と運用利回りについては不確実性を考慮する

ために、以下のように多数のシナリオを想定する：

- $\mathcal{S} := \{1, 2, \dots, S\}$: 想定する（死亡率と運用利回りの）シナリオの集合
- $p^{(s)}$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ の生起確率
- ${}_t q_{x,g,b}^{(s)}$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ のもとでの、現在 $x \in \mathcal{X}$ 歳、性別 $g \in \mathcal{G}$ 、契約種別 $b \in \mathcal{B}$ の加入者の t 年後 $\sim t+1$ 年後の間の死亡率
- $i_t^{(s)}$: シナリオ $s \in \mathcal{S}$ のもとでの、現在から $t+1$ 年後までの運用利回りの年率の平均

2.2 収支相等の原則

事務費などを除いた保険料（純保険料）を算出する際には、収支相等の原則が用いられる（例えば文献 [2, 8, 15] を参照）。収支相等の原則では、収入現価（保険会社が保険契約者から集める保険料）と支出現価（保険会社が保険受取人に支払う保険金）が等しくなるように保険料が決定される。

まず収入現価について説明する。支払われる保険料 $P_{x,g}$ は每期一定金額であり、保険加入者の t 年目開始時点での生存率は $(1 - {}_0 q_{x,g,b}^{(s)} - {}_1 q_{x,g,b}^{(s)} - \dots - {}_{t-2} q_{x,g,b}^{(s)})$ である。よって、シナリオ s のもとでの、加入者 1 人あたりからの t 年目の収入の現在価値は、上記の生存率に割引された保険料 $P_{x,g} / (1 + i_{t-2}^{(s)})^{t-1}$ をかけて表すことができる。ゆえに、契約期間 T 年の場合のシナリオ s のもとでの加入者 1 人あたりからの収入現価は各年度の収入現価の和として以下のように表される：

$$P_{x,g} + \frac{(1 - {}_0 q_{x,g,b}^{(s)}) P_{x,g}}{1 + i_0^{(s)}} + \frac{(1 - {}_0 q_{x,g,b}^{(s)} - {}_1 q_{x,g,b}^{(s)}) P_{x,g}}{(1 + i_1^{(s)})^2} + \dots + \frac{(1 - {}_0 q_{x,g,b}^{(s)} - {}_1 q_{x,g,b}^{(s)} - \dots - {}_{T-2} q_{x,g,b}^{(s)}) P_{x,g}}{(1 + i_{T-2}^{(s)})^{T-1}}. \quad (1)$$

式 (1) は $P_{x,g}$ の線形関数であることを考慮すると $\bar{a}_{x,g,b}^{(s)} P_{x,g}$ と表すことができ、ここで $\bar{a}_{x,g,b}^{(s)}$ は加入者 1 人あたりからの保険料 1 円あたりの収入現価を表す定数とする。

支出現価も収入現価と同様に求める。各年度の中央で保険金が支払われることを考慮し、シナリオ s のもとでの、保険加入者 1 人あたりへの t 年目の支出の現在価値は、 t 年目での死亡率 ${}_{t-1} q_{x,g,b}^{(s)}$ に割引された保険金額 $M / (1 + i_{t-1}^{(s)})^{t-1/2}$ をかけて表すことができる。よって、契約期間 T 年の場合のシナリオ s のもとでの加入者 1 人あたりへの支出現価を表す定数 $\bar{c}_{x,g,b}^{(s)}$ は、各年の支出現価の和として以下のように表される：

$$\bar{c}_{x,g,b}^{(s)} := \frac{0|q_{x,g,b}^{(s)}M}{(1+i_0^{(s)})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1|q_{x,g,b}^{(s)}M}{(1+i_1^{(s)})^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{_{T-1}q_{x,g,b}^{(s)}M}{(1+i_{T-1}^{(s)})^{T-\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) から、現在 x 歳、性別 g の保険から得られる、シナリオ s のもとでの保険会社の利益は、加入者 1 人あたりから得られる利益 $\bar{a}_{x,g,b}^{(s)}P_{x,g} - \bar{c}_{x,g,b}^{(s)}$ を保険加入者数 $F_{x,g,b}$ で重みづけして足し合わせることで、保険料 $P_{x,g}$ の関数として

$$R_{x,g}^{(s)}(P_{x,g}) := \sum_{b \in \mathcal{B}} F_{x,g,b} (\bar{a}_{x,g,b}^{(s)}P_{x,g} - \bar{c}_{x,g,b}^{(s)}) \quad (3)$$

と表せる。また、収支相等の原則に基づく保険料を $\bar{P}_{x,g}$ とすれば、 $\bar{P}_{x,g}$ は性別と年齢ごとに期待利益が 0 になるよう以下の方程式を解くことで計算できる：

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(s)} R_{x,g}^{(s)}(\bar{P}_{x,g}) = 0. \quad (4)$$

シナリオ s のもとでの保険全体から被る損失は以下のように表される：

$$L^{(s)}(\mathbf{P}) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{b \in \mathcal{B}} F_{x,g,b} (\bar{c}_{x,g,b}^{(s)} - \bar{a}_{x,g,b}^{(s)}P_{x,g}). \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{P} は保険料 $P_{x,g}$ 、 $x \in \mathcal{X}$ 、 $g \in \mathcal{G}$ を要素に持つ行列とする。

2.3 保険料決定の既存割増手法

前節で、収支相等の原則 (4) に基づく保険料の算出手法について述べたが、死亡率の値が期待値を大きく上回れば保険会社は損失を被ってしまう。そのため、実務上は期待値から割増した死亡率の値を用いることで、損失を被るリスクを抑えた保険料を決定している。例えば、文献 [11] では、死亡率の期待値の 130% を上限として、予測を超える確率が約 2.28% (2σ 水準) となるように死亡率を割増することが推奨されている。

つまり、現在 x 歳、性別 g 、契約種別 b の加入者の t 年後～ $t+1$ 年後の間の死亡率の期待値を ${}_t\mu_{x,g,b}$ 、標準偏差を ${}_t\sigma_{x,g,b}$ としたとき、割増された死亡率は

$${}_t\bar{q}_{x,g,b} := {}_t\mu_{x,g,b} + \min\{2{}_t\sigma_{x,g,b}, 0.3{}_t\mu_{x,g,b}\} \quad (6)$$

となり、この割増された死亡率 ${}_t\bar{q}_{x,g,b}$ を用いて収支相等の原則に従って保険料を計算する。しかし、実際には死亡率に加えて運用利回りの値にも不確実性があり、この方法は運用利回りの不確実性から生じる損失のリスクを考慮していない。

3. 提案モデル

本節では、まず多額の損失を被るリスクを定量化する指標の 1 つである Conditional Value-at-Risk (CVaR)

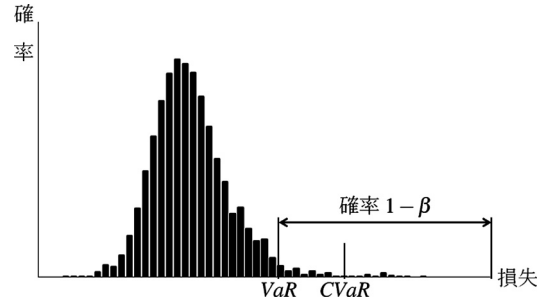


図 1 損失の確率分布と CVaR

[13] について説明する。次に、本論で提案する保険料最適化モデルの定式化を示す。

また、モデル化に向けて以下のパラメータを設定する。

- β : CVaR の信頼水準 ($\beta \in (0, 1)$)
- η : CVaR の上限
- $\xi_{x,g}$: 年齢単調性パラメータ ($\xi_{x,g} \geq 1$)

3.1 Conditional Value-at-Risk

図 1 に示されているように、信頼水準 β に対して損失の上側 $100(1-\beta)\%$ 分位点は Value-at-Risk (VaR) と呼ばれ、CVaR は VaR を超える損失の期待値として定義される [13]。

CVaR はリスク指標として理論的に好ましい性質を備えており [1, 12]、CVaR を用いた最適化問題は VaR と比較して扱いやすい [12, 13]。

シナリオ s のもとでの損失の値を $L^{(s)}$ とするとき、信頼水準 β の CVaR の値は以下の最適化問題の最適値として計算できる (例えば文献 [13] を参照)：

$$\begin{cases} \text{最小化} & y + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(s)} z^{(s)} \\ \text{制約条件} & z^{(s)} \geq L^{(s)} - y, z^{(s)} \geq 0, s \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 y は VaR を表す決定変数であり、 $z^{(s)}$ は CVaR を計算するための補助的な決定変数である。

3.2 定式化

1 章でも述べたように、保険会社では、加入者数を増やすためになるべく保険料を低く設定したいが、収支相等の原則 (4) に基づく保険料 $\bar{P}_{x,g}$ は損失リスクを無視した保険料であり、 $\bar{P}_{x,g}$ よりも保険料を下げることは現実的ではない。そこで、本論では保険料 $\bar{P}_{x,g}$ を目標値として、 $\bar{P}_{x,g}$ より保険料を下げないという制約を課したうえで、保険料 $\bar{P}_{x,g}$ からの保険料の乖離を最小化することを目的とする。

しかしながら、保険料を低額にすれば保険会社が損失を被る可能性が生じる。保険会社としては性別と年齢ごとの保険それぞれから被る損失よりも、保険全体

から被る損失を重点的に管理すべきだと考えられる。そこで、本論では各保険から生じる損失を加入者数で重みづけて足し合わせた保険全体の損失 (5) によってリスク指標 CVaR を定義する。そしてその上限を η とし、保険会社が多額の損失を被るリスクを制御する。

最後に、高齢の保険料を低年齢の保険料より低くとすると、加入を先延ばしにする動機や不公平感を与えてしまうことになり実務上好ましくない。このため、加入年齢の増加に対して保険料が低くなることを防ぐ制約を課す。

以上の目的と制約条件を考慮し、本論で提案する最適化モデルは以下の凸 2 次計画問題として定式化される：

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} && \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{g \in \mathcal{G}} F_{x,g} \left(\frac{P_{x,g} - \bar{P}_{x,g}}{\bar{P}_{x,g}} \right)^2 \quad \dots (8, a) \\
 & \text{制約条件} && P_{x,g} \geq \bar{P}_{x,g}, \quad x \in \mathcal{X}, \quad g \in \mathcal{G} \quad \dots (8, b) \\
 & && y + \frac{1}{1-\beta} \sum_{s \in \mathcal{S}} p^{(s)} z^{(s)} \leq \eta \quad \dots (8, c) \\
 & && z^{(s)} \geq L^{(s)}(\mathbf{P}) - y, \quad z^{(s)} \geq 0, \\
 & && \quad \quad \quad s \in \mathcal{S} \quad \dots (8, d) \\
 & && \xi_{x,g} P_{x,g} \leq P_{x+1,g}, \\
 & && \quad \quad \quad x \in \mathcal{X} \setminus \{X_U\}, \quad g \in \mathcal{G}. \quad \dots (8, e)
 \end{aligned}$$

ただし、 $F_{x,g} := \sum_{b \in \mathcal{B}} F_{x,g,b}$ は加入年齢 $x \in \mathcal{X}$ 歳、性別 $g \in \mathcal{G}$ の保険の加入者数を表し、決定変数は $P_{x,g}$ (保険料)、 $y, z^{(s)}$ である。

ここでは、加入者数の増減は保険料の変更割合に比例し、なるべく加入者数が多い保険の保険料を低く設定したいと想定する。よって、目的関数 (8, a) では、保険料の変更割合の 2 乗を保険加入者数で重みづけた値、 $F_{x,g}((P_{x,g} - \bar{P}_{x,g})/\bar{P}_{x,g})^2$ の総和を最小化する。

式 (8, b) は $\bar{P}_{x,g}$ より保険料を下げないための制約、式 (8, c) は (制約式 (8, d) のもとで) リスク指標 CVaR の上限制約となっている。式 (8, e) は加入年齢の増加に対して保険料が低くなることを防ぐ制約である。なお、文献 [9] で指摘されているように、最適解で制約式 (8, c) が効いていない場合は式 (8, c) の左辺が CVaR の値と一致しない可能性があり、注意する必要がある。

本論で提案する保険料決定モデルでは、保険 (性別と年齢) ごとにリスクを評価して保険料を決定する先行研究 [7] や既存割増手法 (2.3 節) とは異なり、保険全体から被る損失 (5) のリスクを CVaR によって制御し、すべての性別、年齢の保険料を同時に最適化している。

次章では、最適化モデル (8) を中心に数値実験結果を示していくが、最適化モデルの目的関数はほかにも

考えることができる。例えば、加入者数によらずすべての種類 (性別と年齢) の保険料を低く設定することを重視する場合は、目的関数 (8, a) の加入者数 $F_{x,g}$ による重みをすべて 1 にすることが考えられる。また、保険料の乖離を「保険料の変更額の 2 乗： $(P_{x,g} - \bar{P}_{x,g})^2$ 」によって定義した最適化モデルなども考えられる。

4. 数値実験

本章では、ある保険会社から提供された実際のデータを用いて、以下の 4 点を目的とした数値実験を行う：

- 提案モデル (8) の最適解の標準誤差を調べる (4.2 節)。
- 「死亡率の不確実性」と「運用利回りの不確実性」が提案モデル (8) の最適解に与える影響を調べる (4.3 節)。
- CVaR の上限 (η) の変化が提案モデル (8) の最適解に与える影響を調べる (4.4 節)。
- 提案モデル (8) と既存割増手法 (2.3 節) によって算出される保険料を比較する (4.5 節)。

まず用いたデータについて説明し、次に数値実験の結果を示す。なお、最適化モデルの求解には、MATLAB (R2012a) の Optimization Toolbox (quadprog) を使用した。

4.1 基本のパラメータ設定

- 対象年齢：5～70 歳 ($X_L := 5, X_U := 70$)
- 保険の契約期間：10 年 ($T := 10$)
- 保険金額：1,000 万円 ($M := 10,000,000$)
- シナリオ数：10,000 シナリオ ($S := 10,000$)
- 各シナリオの生起確率：1/10,000
($p^{(s)} := 1/10,000, s \in \mathcal{S}$)
- CVaR の信頼水準：0.95 ($\beta := 0.95$)
- CVaR の上限：0 円 ($\eta := 0$)
- 年齢単調性パラメータ：1 ($\xi_{x,g} := 1, x \in \mathcal{X}, g \in \mathcal{G}$)

継続契約は 5 歳にならないと加入できないことなどを考慮して、本論では 5 歳以上の保険料を分析対象としている。数値実験結果では、年額保険料を一定の値で除して月額保険料に変換した値を示す。

保険加入者数：ある保険会社の生命保険の実績データを基にして、保険加入者数 ($F_{x,g,b}$) を設定する。

死亡率：ある保険会社の 2001～2010 年度の実績データから、各年齢・性別・契約種別の死亡率の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を推定する。各 $(s, t) \in \mathcal{S} \times \{0, 1, \dots, T-1\}$ に対応させて多変量正規分布 $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従う乱数ベクトルを発生させて、そこで得

表 1 最適保険料の標本誤差

年齢 (歳)		10	20	30	40	50	60	70
最大値	男性	211	472	613	1,471	3,965	10,787	25,392
	女性	94	188	335	781	1,804	4,264	11,140
平均値	男性	211	472	613	1,471	3,964	10,778	25,354
	女性	94	188	334	780	1,802	4,262	11,132
最小値	男性	211	472	613	1,470	3,962	10,766	25,306
	女性	94	188	334	780	1,802	4,259	11,119
標準偏差	男性	0.07	0.13	0.17	0.45	1.50	7.31	31.44
	女性	0.03	0.05	0.10	0.23	0.55	1.66	7.73

られたシナリオ s , $x+t$ 歳, 性別 g , 契約種別 b の死亡率の値を死亡率 ${}_t q_{x,g,b}^{(s)}$ とする.

運用利回り: ある保険会社の 2001~2010 年度の実績データから, 運用利回りの平均 μ と標準偏差 σ を推定する. 各 $(s, t) \in S \times \{0, 1, \dots, T-1\}$ に対応させて正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数を発生させて $I_t^{(s)}$ とし, 運用利回りを $i_t^{(s)} := (\prod_{k=0}^t (1 + I_k^{(s)}))^{1/(t+1)} - 1$ とする. なお, 運用利回りの平均 μ は約 0.0156 であり, 標準偏差 σ は約 0.0025 であった.

上述のように本論では死亡率と運用利回りのシナリオは正規分布に従って生成しているが, 損失の計算式 (1), (2), (5) を見ればわかるように, 損失の分布が正規分布となることを仮定しているわけではない. また, 確率分布からシナリオを生成して CVaR でリスクを評価する提案手法は, 死亡率と運用利回りの確率分布としてほかの確率分布を用いた場合でも同様に適用できる.

4.2 最適保険料の標本誤差の検証

提案モデル (8) では, 上述のように確率分布に基づいて死亡率と運用利回りのシナリオを生成し, 10,000 個のシナリオから成るシナリオ集合を用いて保険料を決定する. しかし, シナリオ集合は元の確率分布の近似にすぎないために, 得られる最適保険料には誤差が生じる可能性がある. このような標本誤差の大きさを検証するために, 本章では 10,000 個のシナリオから成るシナリオ集合を 10 個作成し, 各シナリオ集合に対して最適保険料を計算する. そして, 得られた 10 個の最適保険料の最大値, 平均値, 最小値, 標準偏差を表 1 に示す.

表 1 の男性の 70 歳の保険料を見ると, 最適保険料はすべて 25,306~25,392 円の間に取りまり, その標準偏差は 31 円 (約 0.1%) であった. ほかの場合も同様に, 計算される保険料の値に対して標本誤差は非常に小さく, 10,000 個のシナリオから成るシナリオ集合で十分な計算精度が得られていると評価できる. 次節以降でも同様に異なるシナリオ集合に対して 10 回最適保

表 2 不確実性に対する最適保険料の変化

年齢 (歳)		10	20	30	40	50	60	70
死亡率: 不確実	男性	211	472	613	1,471	3,964	10,778	25,354
利回り: 不確実	女性	94	188	334	780	1,802	4,262	11,132
死亡率: 不確実	男性	211	472	613	1,468	3,933	10,696	25,170
利回り: 定数	女性	94	188	334	779	1,790	4,230	11,049
死亡率: 定数	男性	211	472	610	1,454	3,850	10,029	21,951
利回り: 不確実	女性	94	188	334	776	1,778	4,131	10,335
死亡率: 定数	男性	211	464	610	1,453	3,845	9,997	21,818
利回り: 定数	女性	94	188	333	775	1,777	4,125	10,302

表 3 CVaR の上限 (η) に対する最適保険料の変化

年齢 (歳)		10	20	30	40	50	60	70
$\eta=0$ 円	男性	211	472	613	1,471	3,964	10,778	25,354
	女性	94	188	334	780	1,802	4,262	11,132
$\eta=1$ 億円	男性	211	472	612	1,468	3,949	10,678	24,900
	女性	94	188	334	780	1,800	4,245	11,025
$\eta=10$ 億円	男性	211	472	612	1,465	3,926	10,526	24,208
	女性	94	188	334	779	1,795	4,218	10,863
$\eta=100$ 億円	男性	211	472	610	1,454	3,846	10,001	21,826
	女性	94	187	333	775	1,777	4,127	10,305

料を計算し, その平均値を示すこととする.

4.3 死亡率と運用利回りの不確実性と最適保険料

本論では, 死亡率と運用利回りを両方とも確率変数として扱う保険料計算手法を提案した. そこで, この 2 つを不確実 (確率変数) として扱った場合と, 期待値を用いて定数として扱った場合とを比較して, 提案モデル (8) が算出する最適保険料がどのように変化するかを表 2 に示す.

表 2 では, 性別・年齢にかかわらず死亡率と利回りをとともに不確実としたときに最も保険料が高くなっている. また, 死亡率と運用利回りを定数として扱うと, これらの値の不確実性によるリスクを考慮しないために保険料が低くなるということもわかる. 特に, 表 2 の死亡率と利回りのどちらかを定数とした場合と, 両方を定数とした場合を比較すると, 利回りの不確実性よりも死亡率の不確実性のほうが保険料に与える影響が大きいことがわかる. また, 60~70 歳のような高年齢では, 死亡率と運用利回りの不確実性によって生じる保険料の差異が大きく, これらの値の不確実性を考慮することの必要性が示唆される.

4.4 CVaR の上限と最適保険料

CVaR の上限 (η) は保険会社が許容できる損失額の大きさを表す. 基本的には $\eta=0$ と設定するのが適切だと考えるが, 加入者数を増やすことを重視すればある程度の損失額は許容できる可能性がある. この場合は η の値を変化させながら保険料を計算して結果を比較検討し, 適切な値を選択する必要がある. 表 3 は,

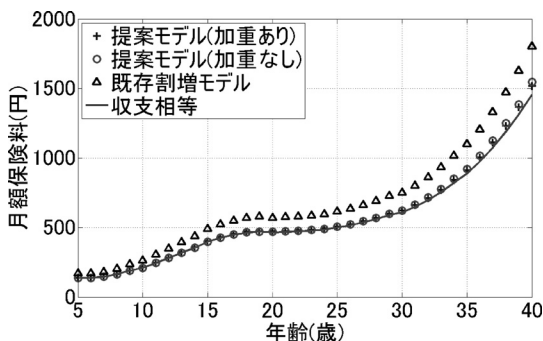


図2 男性の保険料 (5~40歳)

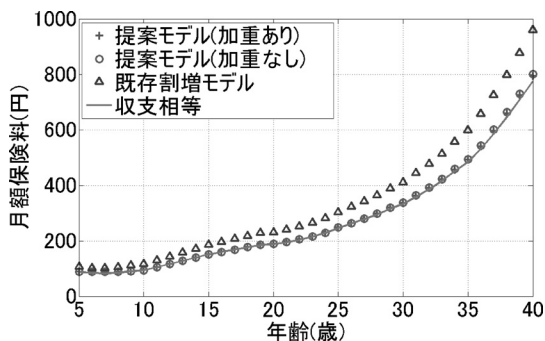


図4 女性の保険料 (5~40歳)

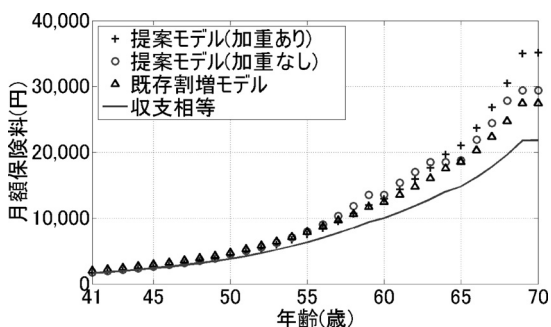


図3 男性の保険料 (41~70歳)

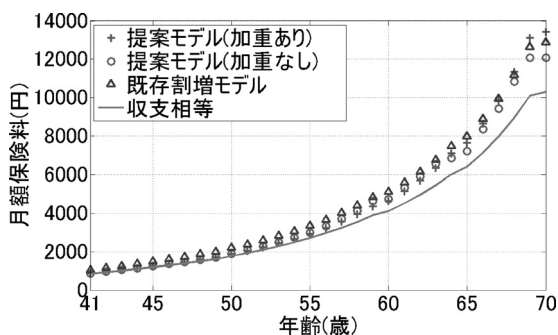


図5 女性の保険料 (41~70歳)

CVaRの上限(η)の値の変化によって、提案モデル(8)が算出する保険料がどのように変化するかを示している。CVaRの上限(η)の値が大きければ保険会社が許容できる損失額は大きく、保険料をより低くすることができる。しかし、 η を0円から100億円まで変化させても30歳以下の保険料は男女ともにほぼ変化がない。これは、死亡率が低く加入者数が比較的少ない低年齢の保険料よりも、より保険金支出の変動するリスクが大きい高年齢の保険料を変えることで損失を被るリスクを軽減しているためだと考えられる。なお、 η を0円から100億円まで変化させたときの男性の70歳の保険料の変化額は3,528円(約14%)であり、女性の70歳の保険料の変化額は827円(約7%)であった。

4.5 既存割増手法との比較

本節では既存割増手法(2.3節)と提案モデル(8)の比較を行う。図2~5は以下の手法で算出された男女5~70歳までの保険料をグラフにしたものである：

- 提案モデル(加重あり)：最適化モデル(8)
- 提案モデル(加重無し)：最適化モデル(8)の目的関数の加入者数 $F_{x,g}$ による重みをすべて1に変更したモデル
- 既存割増モデル：既存割増手法(2.3節)
- 収支相等：収支相等の原則(4)に基づく保険料

$$\bar{P}_{x,g}$$

ただし、提案モデル(加重あり、加重なし)のCVaRの上限(η)は、既存割増モデルによって算出した保険料から計算したCVaRの値(約-85.1億円)と等しくした。この意味で、提案モデル(加重あり、加重なし)は既存割増モデル以下の損失リスクのもとで保険料を計算していると言える。

提案モデル(加重あり)と既存割増モデルの保険料を比較すると、図3の男性59~70歳と図5の女性68~70歳では既存割増モデルよりも提案モデル(加重あり)の保険料が高いが、それ以外の年齢では提案モデル(加重あり)は既存割増モデルとほぼ等しいか低い保険料を算出している。よって、提案モデル(加重あり)は被る損失のリスクを既存割増モデル以下にしなが、既存割増モデルよりも多くの種類(性別と年齢)の保険の保険料を低く設定できていると言える。一方で、提案モデル(加重なし)においては図3の男性56~70歳を除いたすべての性別と年齢に対して、既存割増モデルよりも低い保険料が設定されている。また、提案モデル(加重あり)と提案モデル(加重なし)を比較すると、男女ともに64歳以上で提案モデル(加重あり)の保険料が提案モデル(加重なし)の保険料よりも高くなっている。この理由としては、60歳を超えると保

険加入者が少なくなっていくために、提案モデル（加重あり）の目的関数ではこれらの保険の保険料を下げるための重み付けが相対的に小さくなることが考えられる。

2.3 節で説明したように、既存割増モデルでは各性別・年齢の保険料をそれぞれ 2σ 水準で割増している。その結果、保険全体の損失から計算した CVaR の値は上述のように約 -85.1 億円となり、これは少なくとも 95% の確率で保険会社が 85.1 億円以上の利益を得ることを意味する。一方で、提案モデルでは、保険全体から被る損失 (5) をパラメータ η によって制御しながら、すべての性別・年齢の保険料を同時に最適化している。表 3 の提案モデル (8) の保険料と既存割増モデルの保険料 (図 2~5) を比較すれば、損失を被るリスクを回避しながら既存割増モデルよりも保険料を低く設定できる可能性があることは明らかである。これらの考察を踏まえると、なるべく保険料を低く設定することで加入者数を増やしたいと考える保険会社にとっては、本論で提案した保険料決定モデルは有用なリスク管理手法になりうると考える。

5. おわりに

本論文では、リスク指標 CVaR を利用し、死亡率と運用利回りの両方の不確実性を考慮して保険料を決定する最適化モデルを提案した。提案モデルは凸 2 次計画問題として定式化され、最適化ソルバーを用いれば比較的容易に解くことができる。また、すべての性別・年齢の保険から保険会社が被る損失の総和を制御しながら、すべての保険料を同時に決定できるという、既存研究にはない利点もある。

数値実験の結果から、提案モデルの標本誤差が十分に小さいことを検証し、死亡率と運用利回りの不確実性と許容可能な損失額の上限值が保険料に与える影響を明らかにした。さらに、既存割増手法との比較を通して、提案モデルが算出する保険料の特徴を考察し、提案モデルの有用性を明らかにした。

本論では保険加入者数は保険料に依存しないことを仮定した。この仮定が現実と異なるという可能性は否定できないが、保険料の変化に対する加入者数の増減を精度良く推定することは難しい。さらに、保険加入

者数を保険料に依存するものとする最適化モデルを解くことが難しくなってしまうため、この問題に対する効率的な解法を提案することは今後の課題となる。また、保険料の低下によって逆選択やモラルハザードの問題が生じる可能性があり、保険料を設定する際にはこれらの点も考慮する必要がある。

謝辞 有益なコメントをいただいた 2 名の査読者に、心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber and D. Heath, "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, **9**, 203–228, 1999.
- [2] H. U. ゲルバー (山岸義和 訳), 生命保険数学 シュプリンガー・ジャパン, 2007.
- [3] 浜野雅章, 森本祐司, 田口茂, 保険の国際会計基準と損害保険負債の時価評価, *アクチュアリージャーナル*, **48**, 15–67, 2003.
- [4] 枇々木規雄, 田辺隆人, ポートフォリオ最適化と数理計画法, 朝倉書店, 2005.
- [5] N. Hibiki, "Multi-Period Optimization Model for a Household, and Optimal Insurance Design," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50**, 463–487, 2007.
- [6] 枇々木規雄, 家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル, *ファイナンシャル・プランニング研究*, **8**, 32–42, 2008.
- [7] 金澤巖, 確率論的保険料算出方法に関する一考察, *日本アクチュアリー会会報*, **55**, 73–90, 2002.
- [8] 黒田耕嗣, 生命年金数理 I 理論編, 培風館, 2003.
- [9] P. Krokmal, J. Palmquist and S. Uryasev: "Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints," *Journal of Risk*, **4**, 43–68, 2002.
- [10] 森本祐司, 金融と保険の融合について, *金融研究*, **19**, 289–342, 2000.
- [11] 日本アクチュアリー会, 標準生命表 2007 の作成概要, http://www.actuaries.jp/lib/standard-lifetable/seimeihyo2007_B3.pdf.
- [12] G. Ch. Pflug, "Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk," In S. Uryasev (Ed.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer, 2000.
- [13] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions," *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443–1471, 2002.
- [14] S. S. Wang, "A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks," *Journal of Risk and Insurance*, **67**, 15–36, 2000.
- [15] 山内恒人, 生命保険数学の基礎—アクチュアリー数学入門—, 東京大学出版会, 2009.