安定結婚からサプライチェーンネットワークの安定性へ

田村　明久

2012年のノーベル経済学賞をAlvin E. RothとLloyd S. Shapleyが受賞した．これは安定結婚モデルの構築とこれを応用したマーケットデザインの確立を評価されたものである．安定結婚モデルは，1962年にGaleとShapleyにより2部グラフ上の問題として定式化されたものであるが，2000年代に入るとOstrovskyにより安定結婚モデルは2部グラフから非巡回有向グラフ（有向グラフで有向閉路をもたないグラフ）へと拡張された．本記事では，離散凸解析を通してOstrovskyのモデルを眺めてみる．

キーワード：離散凸解析，数理経済モデル，安定結婚，サプライチェーンネットワーク

1. はじめに

安定結婚モデルは，1962年にGaleとShapley [1]により構築され，その後も経済学，数学，情報学を専門とする多くの研究者が参入し，50年後の現在でも理論面，実用面ともに活発な研究が続けられている．安定結婚モデルは，男性と女性のような二つの経済主体集合間において，男女対の集合（マッチング）の安定性を扱うものであり，数学的には2部グラフ上の一対一の割当を扱うモデルである．この変種として，研修医は一つの病院に所属し，病院は複数の研修医を雇うような一対多版もある．安定結婚モデルやその一対多版は研修医マッチングや学校選択制度など多くの現実問題の解決に利用され，RothとShapleyのノーベル賞受賞へと至った．

一方，安定結婚モデルの多対多版については，部分集合間に選好関係を入れる必要があり，後に述べる選択関数や評価関数の導入が必要なためか，現実問題の解決に利用された例はほとんどないように思われる．多対多版安定結婚モデルのほかにも組合せオークションなど不可分財（整数単位でしか量れない財）の配分問題にも良い性質をもった評価関数が必要とされる．離散凸解析はこの良い性質をもった評価関数を提供したのである．数理経済モデルへの離散凸解析の応用については，第2節で概説する．

数理経済モデルの流れでは，Ostrovsky [5]が2部グラフ上の多対多版安定結婚モデルを非巡回有向グラフ[1]へと拡張した．彼のモデルでは各経済主体の選好を選択関数を用いて表現し，選択関数が同側代替性(same-side substitutability)と対側補完性(cross-side complementarity)を満たすならば，以降で述べるパスに関する安定性を満たす割当が常に存在することをTarskiの不動点定理を用いて示している．

人間と人間が直接対峙する状況では複雑な経済モデルは利用できないであろうが，計算機が介在する状況ならば，多対多版安定結婚モデルのようなものも現実問題の解決に将来的には利用できるようになるのではないだろうか．離散凸解析はそのための重要な道具となる．Ostrovskyのモデルを離散凸解析を通して眺めることで，離散凸解析の利用法を紹介することが本記事の目的である．数学的な面やテクニカルな面はできるだけ避けるべきと思うが，数式なしでは離散凸解析の利用価値の本質が伝わらない．数式とその解釈を併記しながら話を進めたい．

2. 離散凸解析と数理経済モデル

本節では数理経済モデルへの離散凸解析の応用について概説するが，表1に簡単な年表をまとめた．以下では著者名と年のみを引用するが，詳しくは[6]を参照されたい．

数理経済モデルの研究の流れでは，GaleとShapley (1962)の安定結婚モデル以降において，重要な2部グラフ上の数理経済モデルとしてShapleyとShubik (1972)の割当ゲームがある．安定結婚モデルでは貨

たむら　あきひさ
慶應義塾大学理工学部
〒223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉3–14–1

[1] Ostrovskyは論文中で非巡回有向グラフをサプライチェーンネットワークと呼んでいる．

表 1　数理経済モデルへの離散凸解析応用の歴史

1962	安定結婚モデル*	Gale–Shapley
1972	割当ゲーム*	Shapley–Shubik
1982	ジョブ割当と粗代替性*	Kelso–Crawford
2001	マトロイド安定結婚モデル*	Fleiner
2001	Arrow–Debreu 型モデル	Danilov–Koshevoy–室田
2003	M$^\natural$ 凹安定結婚モデル	江口–藤重–田村
2003	粗代替性と M$^\natural$ 凹性の等価性	藤重–Yang
2006	組合せオークション	Lehmann–Lehmann–Nisan
2007	手付上下限付きモデル	藤重–田村
2008	サプライチェーンネットワークモデル*	Ostrovsky

*付きは離散凸解析とは別の文脈の研究

幣のやり取りを許さないが，割当ゲームでは貨幣のやり取りを許す点がこれらの最大の違いである．最適化の観点からは，割当ゲームは「2 部グラフ上の最大重みマッチング問題」あるいは「線形計画＋解の整数性」として理解できる．Kelso と Crawford (1982) は，安定結婚モデルと割当ゲーム（貨幣も離散の場合）を統一したモデルをジョブ割当という設定で提案した．彼らは，評価関数の粗代替性[2]という概念を導入し，この性質のもとでの安定割当の存在を証明した．Fleiner (2001) は，安定結婚モデルをマトロイドの枠組みへと拡張した．

離散凸解析の数理経済モデルへの最初の応用として，Danilov，Koshevoy，室田 (2001) が Arrow–Debreu 型モデルを提案した．彼らは，各経済主体が貨幣に関して準線形な M$^\natural$ 凹効用関数をもつような不可分財を扱った交換経済に競争均衡が存在することを示した．江口と藤重 (2002) や江口，藤重，田村 (2003) により，Fleiner のマトロイドを用いたモデルは離散凸解析の枠組みへと拡張された．藤重と Yang (2003) により集合関数について粗代替性と M$^\natural$ 凹性の等価性が示され，数理経済と離散凸解析の二つの流れが交差した．一般の M$^\natural$ 凹関数と粗代替性の関係については，Danilov，Koshevoy，Lang (2003) や室田と田村 (2003) で議論されている．藤重と田村 (2006, 2007) は離散凸解析を応用し，安定結婚モデル，割当ゲームなど多くのモデルを包含するものを提案し，安定割当の存在を示している．上記とは異なる数理経済モデルとして，Lehmann, Lehmann, Nisan (2006) は M$^\natural$ 凹評価関数を用いた組合せオークションを提案している．本記事の第 4 節以降は，池辺と田村 [2] に基づいている．

[2] Kelso と Crawford は集合関数に対して粗代替性を定義した．

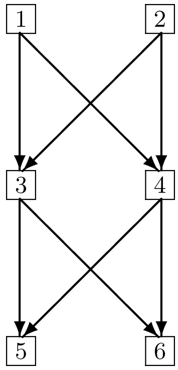


図 1　サプライチェーンネットワークの例: 1 と 2 は生産者，3 と 4 は仲買人，5 と 6 は消費者

3. 同側代替性と対側補完性

本節では，Ostrovsky [5] のサプライチェーンネットワークモデルおよび同側代替性と対側補完性について紹介する．

このモデルでは，経済主体は生産者，仲買人，小売店，消費者などであり，グラフの頂点集合 V として表現し，2 者間の売買関係の構造を有向辺集合 A で表す（図 1 参照）．各有向辺は価格，財の種類などを含めた 2 者間の売買契約の可能性を表し，これを単に**契約**と呼ぶ．各有向辺（契約）において，始点が売手を，終点が買手を意味する．売買者，価格，財の種類などが異なれば，異なった契約とみなし，全体での契約の個数は有限とする．同一の 2 者間にも複数の契約があり得るため，グラフは多重辺を許したものとなる．このモデルは巡回を許さず，生産者 → 仲買人 → 小売店 → 消費者というような財の流れを想定している．

各経済主体の選好は選択関数を用いて次のように表現する．経済主体 $v \in V$ と契約集合 $X \subseteq A$ に対して，v が関わる X 内の契約全体を X_v と表現することにする．関数 $C_v : 2^A \to 2^A$ が任意の $X \subseteq A$ に対して，$C_v(X) \subseteq X_v$ を満たすとき v の**選択関数**という．$C_v(X)$ は v にとって X の部分集合の中で最も好ましいものと解釈し，$C_v(X) \subseteq X_v$ は自分が関わらない契約は対象外であることを意味している．選択関数には無差別は許されず，$C_v(X)$ は一意的に定まらなければならない．文献 [5] で鍵となる概念が選択関数の同側代替性と対側補完性である．経済主体 v と契約集合 X に対して，X の中で v が買手である契約全体を X_v^- とし，v が売手である契約全体を X_v^+ と表すことにする．C_v が**同側代替性**を満たすとは，任意の $X, Y \subseteq A$ に対して次の条件が成り立つことと定義する．

- $X_v^+ = Y_v^+$ かつ $X_v^- \subseteq Y_v^-$ ならば

$$X_v^- \setminus (C_v(X))_v^- \subseteq Y_v^- \setminus (C_v(Y))_v^- \qquad (1)$$

- $X_v^+ \subseteq Y_v^+$ かつ $X_v^- = Y_v^-$ ならば

$$X_v^+ \setminus (C_v(X))_v^+ \subseteq Y_v^+ \setminus (C_v(Y))_v^+. \qquad (2)$$

(1) と (2) が，それぞれ $X_v^- \cap (C_v(Y))_v^- \subseteq (C_v(X))_v^-$ と $X_v^+ \cap (C_v(Y))_v^+ \subseteq (C_v(X))_v^+$ と同値であることが簡単に示せる．(1) の意味は，売物の候補が同じときに買物の候補が増えたならば，候補が少ないときに買わない物は候補が増えても買わないことである．例えるならば，紅茶か緑茶から選べるときに緑茶を選ばないならば，紅茶，緑茶，珈琲から選べるときも緑茶は選ばないという状況である．

C_v が**対側補完性**を満たすとは，任意の $X, Y \subseteq A$ に対して次の条件が成り立つことと定義する．

- $X_v^+ = Y_v^+$ かつ $X_v^- \subseteq Y_v^-$ ならば

$$(C_v(X))_v^+ \subseteq (C_v(Y))_v^+ \qquad (3)$$

- $X_v^+ \subseteq Y_v^+$ かつ $X_v^- = Y_v^-$ ならば

$$(C_v(X))_v^- \subseteq (C_v(Y))_v^-. \qquad (4)$$

(3) の意味は，売物の候補が同じときに買物の候補が増えたならば，候補が少ないときに売った物は候補が増えても売るということである．紅茶と珈琲から選べるときに珈琲のみを選んでいた状況で，砂糖も利用できるようになったら珈琲を少なくとも選び，紅茶も選ぶようになるかもしれない状況に似ている．

同側代替性と対側補完性の定義は抽象的で，これを満たす選好がどのようなものかイメージがつかめないのではないだろうか．次節では，離散凸解析で中心的役割を演じる M$^\natural$ 凹関数の変種がこれらの性質を満たすことを紹介する．M$^\natural$ 凹関数でもまだ抽象的で難しいかもしれないが，有用な例もあるので，単に「同側代替性と対側補完性を満たすもの」よりは使いやすいだろう．

4. M$^\natural$ 凹関数と歪 M$^\natural$ 凹関数

本節では，A を不可分財の集合とし，1 人の経済主体の評価関数を想定する．$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ はそれぞれ整数全体および実数全体を表し，$\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ という略記を以下では用いる．$\mathbb{Z}^A$ は，A 上の整数ベクトル $x = (x(a) \in \mathbb{Z} : a \in A)$ 全体からなる集合を表すとする．この経済主体が消費者とするならば，与えられた整数ベクトル $x \in \mathbb{Z}^A$ に対して，$x(a)$ は財 $a \in A$ の消費個数を表すと解釈する．この消費者の評価関数を $f : \mathbb{Z}^A \to \underline{\mathbb{R}}$ とする．ここで，$f(x) = -\infty$ となる x はこの消費者にとって受け入れがたい消費を意味し，受理可能な消費全体が f の実効定義域 $\mathrm{dom}\, f \equiv \{y \in \mathbb{Z}^A \mid f(y) > -\infty\}$ となる．以降では，評価関数 f は仮定

(A)　$\mathrm{dom}\, f$ は有界で $\mathbf{0}$ を最小点としてもつ

を満たすとする．ここで有界性は，消費者の予算制約を暗に反映しているとみなせる．

消費が $q \in \mathbb{Z}^A$ 以下であるという制約下で評価を最大化する消費全体，すなわち $\arg\max\{f(y) \mid y \leq q\}$ を $C_f(q)$ と表記することで，評価関数 f から選択対応 C_f を定義できる[3]．この C_f が同側代替性と対側補完性を満たすような f の条件に興味があるが，M$^\natural$ 凹関数の変種がこれらの性質を満たすのである．関数 $f : \mathbb{Z}^A \to \underline{\mathbb{R}}$ が M$^\natural$ 凹関数であるとは，$-f$ が M$^\natural$ 凸関数となるものである．M$^\natural$ 凸関数については本特集の室田氏の記事を参照されたい．

本稿で定義する M$^\natural$ 凹関数の変種では，A を A^+ と A^- に分割する．すなわち，$A = A^+ \cup A^-$，$A^+ \cap A^- = \emptyset$ とする．経済主体が仲買人であるとき，A^- は購入財の集合，A^+ は販売財の集合と解釈する．この分割に従い，$x \in \mathbb{Z}^A$ に対して，x^+ と x^- をそれぞれ A^+ と A^- 上の x の部分ベクトルとする．$x = (x^+, x^-) \in \mathbb{Z}^A$ に対して，$\mathrm{tw}(x) \in \mathbb{Z}^A$ は $(x^+, -x^-)$ を表すとする．すなわち，x の A^- 内の成分の符号を反転させたベクトルを $\mathrm{tw}(x)$ と表記する．関数 $f : \mathbb{Z}^A \to \underline{\mathbb{R}}$ がある M$^\natural$ 凹関数 $\widehat{f}$ を用いて

$$f(x) = \widehat{f}(\mathrm{tw}(x)) \qquad (x \in \mathbb{Z}^A)$$

と定まるとき，f を (A^+, A^-) 上の**歪 M$^\natural$ 凹関数**と呼ぶことにする．歪 M$^\natural$ 凹関数は，同側代替性と対側補完性を一般化した次の性質を満たす．

補題 4.1　$f : \mathbb{Z}^A \to \underline{\mathbb{R}}$ を (A^+, A^-) 上の歪 M$^\natural$ 凹関数とする．$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^A$ に対して $z_1^+ = z_2^+$，$z_1^- \geq z_2^-$，$C_f(z_1) \equiv \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_1\} \neq \emptyset$ かつ $C_f(z_2) \equiv \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_2\} \neq \emptyset$ ならば以下が成り立つ．

(a)　任意の $x_1 \in C_f(z_1)$ に対して[4]

[3] 最大解は一意に定まるとは限らないので，C_f は選択関数ではなく，正確には f の選択対応と呼ばれる．

[4] ベクトル $x, y \in \mathbb{Z}^A$ に対して，ベクトル $x \wedge y$ を成分ごとに最小値をとったベクトルとする．同様に $x \vee y$ を成分ごとに最大値をとったベクトルとする．

$$z_2^- \wedge x_1^- \leq x_2^- \quad \text{かつ} \quad x_2^+ \leq x_1^+ \qquad (5)$$

を満たす $x_2 \in C_f(z_2)$ が存在する．

(b) 任意の $x_2 \in C_f(z_2)$ に対して (5) を満たす $x_1 \in C_f(z_1)$ が存在する．

(5) は 0-1 ベクトルに対する (1) と (3) を整数ベクトル版へと自然に拡張した性質である．また $C_f(z_1)$ と $C_f(z_2)$ が単元集合であるならば，補題 4.1 の (a) と (b) は一致する．補題 4.1 において，$z_1^+ \geq z_2^+$ かつ $z_1^- = z_2^-$ の場合も $+$ と $-$ を入れ替えた同様の性質（(2) と (4) の拡張）が成り立つ．

M$^\natural$凹関数はほかにも好ましい性質を有する．詳細については [3, 6] を参照されたい．次に M$^\natural$ 凹関数と歪 M$^\natural$ 凹関数の例を紹介しよう．

例 4.2 A の分割 (A^+, A^-) に対して，関数

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \geq \mathbf{0},\ \displaystyle\sum_{a \in A^+} x(a) = \sum_{a \in A^-} x(a)\right) \\ -\infty & \text{（その他）} \end{cases}$$

は (A^+, A^-) 上の歪 M$^\natural$ 凹関数となる．A^- と A^+ をある仲買人の購入財の集合と販売財の集合とすると，$h(x) = 0$ となる x は，それぞれの購入財も販売財も非負個数であり，購入する総個数と販売する総個数が一致することを意味している．//

例 4.3 f と $\widehat{f}$ をそれぞれ (A^+, A^-) 上の歪 M$^\natural$ 凹関数とそれに対応する M$^\natural$ 凹関数とする．$l \leq u$ を満たす $l, u \in \mathbb{Z}^A$ に対して

$$\widehat{f}_{[l,u]}(x) = \begin{cases} \widehat{f}(x) & (l \leq x \leq u) \\ -\infty & \text{(その他)} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{Z}^A)$$

は，$\mathrm{dom}\, \widehat{f}_{[l,u]} \neq \emptyset$ ならば M$^\natural$ 凹関数である．これより

$$f_{[l,u]}(x) = \begin{cases} f(x) & (l \leq x \leq u) \\ -\infty & \text{(その他)} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{Z}^A)$$

も $\mathrm{dom}\, f_{[l,u]} \neq \emptyset$ ならば，歪 M$^\natural$ 凹関数である．以降で紹介するアルゴリズムでは，この例のように実効定義域を上下限制約で制限することを行う．このような操作でも M$^\natural$ 凹性も歪 M$^\natural$ 凹性も保たれる．//

例 4.4 f を (A^+, A^-) 上の歪 M$^\natural$凹関数とし，各 $a \in A$ に対して，1 変数凹関数 $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき，

$$f(x) + \sum_{a \in A} f_a(x(a)) \qquad (x \in \mathbb{Z}^A)$$

は歪 M$^\natural$ 凹関数となる．これは歪 M$^\natural$ 凹関数と分離凹関数の和も歪 M$^\natural$ 凹関数であることを述べている．一般に二つの M$^\natural$ 凹関数の和は M$^\natural$ 凹関数とは限らない．//

5. 離散凸解析を用いたモデル

Ostrovsky のモデルでは，契約を選ぶか選ばないか，すなわち 0 か 1 かの 2 値の議論である．ここで紹介するモデルでは不可分財の整数個の売買を許し，また選好における無差別を許すという一般化を行う．無差別があると安定な割当の存在証明の手段として Tarski の不動点定理が使えないので，その代わりに安定な割当を求めるアルゴリズムを構築する．そのアルゴリズムを第 6 節で紹介する．

$G = (V, A)$ を非巡回有向グラフとする．Ostrovsky のモデルと同様に V が経済主体の集合で，A は二者間の売買関係の構造を表し，各売買関係 $a \in A$ において a の始点が売手，a の終点が買手を表す．各経済主体 $v \in V$ に対して，$\delta^+(v)$，$\delta^-(v)$ および $\delta(v)$ をそれぞれ G において v から出る有向辺全体，v に入る有向辺全体，これらの和集合を表すとする．各経済主体 $v \in V$ は，$(\delta^+(v), \delta^-(v))$ 上の歪 M$^\natural$ 凹評価関数 $f_v : \mathbb{Z}^{\delta(v)} \to \underline{\mathbb{R}}$ をもつとする．ここで f_v も仮定 (A) を満たすとする．

本節では，$x \in \mathbb{Z}^A$ を**割当**と呼ぶ．経済主体 $v \in V$ と割当 x 対して，$x_{\delta(v)}$ は x の部分ベクトル $(x(a) : a \in \delta(v))$ を表すとする．割当 $x \in \mathbb{Z}^A$ について，すべての経済主体 $v \in V$ に対して $x_{\delta(v)} \in \mathrm{dom}\, f_v$ が成り立つとき，x を**許容割当**という．

許容割当 x が，すべての経済主体 v に対して $f_v(x_{\delta(v)}) = \max\{f_v(y) \mid y \leq x_{\delta(v)}\}$ を満たすとき，x は**個人合理的**であるという．各経済主体は自分に関する割当を相手の了解なしに減らせるという前提のもとで，個人合理性とは各経済主体が割当を減らす動機を持たないことを意味している．

許容割当 $x \in \mathbb{Z}^A$ に対して，次の条件を満たす G 上の有向道 $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$ を**ブロッキング道**と呼ぶことにする（ただし，以降では e_a は $a \in A$

に対応する成分のみが 1 でそのほかの成分は 0 である A 上の単位ベクトルとする).

- $f_{v_0}(x_{\delta(v_0)}) < \max\{f_{v_0}(y) \mid y \leq (x+e_{a_1})_{\delta(v_0)}\}$,
- $i=1,\ldots,k-1$ に対して

$$f_{v_i}(x_{\delta(v_i)}) < \max\left\{ f_{v_i}(y) \;\middle|\; \begin{array}{l} y \leq (x+e_{a_i}+e_{a_{i+1}})_{\delta(v_i)} \\ y(a_i)=x(a_i)+1 \\ y(a_{i+1})=x(a_{i+1})+1 \end{array} \right\},$$

- $f_{v_k}(x_{\delta(v_k)}) < \max\{f_{v_k}(y) \mid y \leq (x+e_{a_k})_{\delta(v_k)}\}$.

x が個人合理的である場合には，上記の条件は有向道 P 上の各辺 a_i について売手 v_{i-1} も買手 v_i も売買数を 1 単位増やすことを認めると，有向道上のすべての経済主体の評価を真に大きくできることを意味している.

許容割当について個人合理的でありかつブロッキング道が存在しないとき，**安定**であると言う．すなわち安定割当に対して，どの経済主体も自分の割当を減らす動機を持たず，どの有向道上の頂点集合に対応する経済主体たちも提携する動機を持たない．安定結婚が個人あるいは男女対からなる提携では壊れないことの拡張にあたる安定性の概念である.

次の補題は許容割当 $x^* \in \mathbb{Z}^A$ が安定であるための十分条件を与える．各経済主体の評価関数 f_v が同側代替性や対側補完性を満たす必要はない.

補題 5.1 許容割当 $x^* \in \mathbb{Z}^A$ に対して，次の条件を満たす $\overline{z}, \underline{z} \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^A$ が存在するならば，x^* は安定である.

$$x^*_{\delta(v)} \in \operatorname{argmax}\left\{ f_v(y) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_{\delta^+(v)} \leq \overline{z}_{\delta^+(v)} \\ y_{\delta^-(v)} \leq \underline{z}_{\delta^-(v)} \end{array} \right\} \quad (v \in V), \quad (6)$$

$$\overline{z}(a) = +\infty \quad \text{または} \quad \underline{z}(a) = +\infty \qquad (a \in A). \quad (7)$$

一般の評価関数に対して (6) と (7) を満たす $\overline{z}$ と $\underline{z}$ の存在は許容割当が安定であるための必要条件とは限らない．しかし各経済主体の評価関数が歪 M$^\natural$ 凹関数ならば次が成り立つ.

定理 5.2 各経済主体 $v \in V$ の評価関数 $f_v : \mathbb{Z}^{\delta(v)} \to \underline{\mathbb{R}}$ が $(\delta^+(v), \delta^-(v))$ 上の歪 M$^\natural$ 凹関数であるとする．このとき，個人合理的な割当 $x^* \in \mathbb{Z}^A$ が安定であるための必要十分条件は (6) と (7) を満たす $\overline{z}, \underline{z} \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^A$ が存在することである.

この特徴づけを利用することで安定割当を求めるアルゴリズムが設計できる．アルゴリズムについては次節で紹介する.

本節の最後としてモデルの例を与えよう.

例 5.3 図 1 のサプライチェーンネットワークを考える．経済主体 1 と 2 は生産者，3 と 4 は仲買人，5 と 6 は消費者であり，経済主体の選好として以下を仮定する.

- 生産者 1 と 2 は毎週それぞれ最大 5 単位と 7 単位の同一商品を製造できる．また各生産者は，可能な限り多くの商品を仲買人に売ることを優先し，総販売数が同じならばできるだけ 2 人の仲買人に均等になるように販売したい.
- 仲買人は保管場所を持たず，生産者から仕入れた商品はその週のうちにすべて消費者に売らなければならない．各仲買人は，可能な限り多くの商品を売買することを優先し，また両生産者からの購入数をできるだけ均等にし，両消費者への販売数もできるだけ均等にしたい.
- 各消費者は週当たり 5 個を上限として可能な限り多くの商品を購入することを優先し，総購入数が同じならば両仲買人からできるだけ均等に購入したい.

以降では経済主体 1 と 3 の間の有向辺を 13 と略記して，1 と 3 の間で取引される商品数を変数 x_{13} を用いて表す．他の有向辺についても同様の表記を用いる．生産者と消費者の選好を表現するために次の関数を導入する．与えられた非負整数 α に関して $g^\alpha : \mathbb{Z}^2 \to \underline{\mathbb{R}}$ を

$$g^\alpha(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & (y_1, y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 \leq \alpha) \\ -\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義すると，これは M$^\natural$ 凹関数となる．g^α と十分小さい正の数 ε を用いると生産者 1 の選好を

$$f_1(x_{13}, x_{14}) = g^5(x_{13}, x_{14}) + (x_{13} + x_{14}) - \varepsilon(x_{13}^2 + x_{14}^2)$$

と表現できる．ここで f_1 の第 1 項は週当たりの最大生産数が 5 であることを表し，第 2 項は生産者ができるだけ多くの商品の販売を優先することを意味し，第 3 項は商品の個数が一定ならば均等な販売を望むことを表している[5]．例 4.4 より f_1 は M$^\natural$ 凹関数である．同様に生産者 2 や消費者 5 と 6 の選好も M$^\natural$ 凹関数で表現できる．仲買人の選好を表現するために次の関数 $h : \mathbb{Z}^4 \to \underline{\mathbb{R}}$ を導入する.

[5] 相手 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ に対する不可分財の配分比が $r_1 : r_2 : \cdots : r_k$ にできるだけ近くなるようにすることも，分離凹 2 次関数最大化を利用すれば実現可能である.

$$h(y_1^-, y_2^-, y_5^+, y_6^+) = \begin{cases} 0 & \begin{pmatrix} y_1^-, y_2^-, y_5^+, y_6^+ \geq 0 \\ y_1^- + y_2^- = y_5^+ + y_6^+ \end{pmatrix} \\ -\infty & (\text{その他}). \end{cases}$$

例 4.2 より h は歪 M$^\natural$ 凹関数である．仲買人 3 の選好を

$$\begin{aligned} f_3(x_{13}, x_{23}, x_{35}, x_{36}) = &\, h(x_{13}, x_{23}, x_{35}, x_{36}) \\ &+ (x_{13} + x_{23} - \varepsilon(x_{13}^2 + x_{23}^2)) \\ &+ (x_{35} + x_{36} - \varepsilon(x_{35}^2 + x_{36}^2)) \end{aligned}$$

と表現できる．f_3 において，h は購入数と販売数が等しいことを強制し，第 2 項と第 3 項は生産者や消費者の選好を表現するのと同様に仲買人の選好を表現している．例 4.4 より f_3 は歪 M$^\natural$ 凹関数である．仲買人 4 の選好も歪 M$^\natural$ 凹関数で表現できる．

この例において次の許容割当 x と x^* を考える．

辺	13	14	23	24	35	36	45	46
x	2	2	2	3	2	2	2	3
x^*	2	3	2	3	2	2	3	3
$\overline{z}$	$+\infty$	$+\infty$	2	3	2	2	3	3
$\underline{z}$	2	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

割当 x^* は安定である．なぜならば x^*，$\overline{z}$，$\underline{z}$ は補題 5.1 の (6) と (7) を満たす．一方 x は安定ではない．なぜならば $P = (1, 13, 3, 35, 5)$ は x に対するブロッキング道だからである．//

6. 安定割当を求めるアルゴリズム

本節では前節のモデルにおいて (6) と (7) を満たす x^*，$\overline{z}$，$\underline{z}$ を常に求めるアルゴリズムを紹介する．このアルゴリズムでは，二つの割当 x^s と x^b を管理し，条件 $x^b \leq x^s$ を保つようにする．各 $a \in A$ に対して，$x^s(a)$ は a における売手が提示した販売数であり，提示数 $x^s(a)$ に対して a における買手が望んだ購入数が $x^b(a)$ であると解釈する．そのため条件 $x^b \leq x^s$ が成り立つ．x^s と x^b の決定については，生産者，仲買人，消費者から順番に決めるとする．すなわち，非巡回有向グラフ $G = (V, A)$ の頂点は $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ のように番号づけられ，条件「$(i, j) \in A$ ならば $i < j$」を満たすとし，番号の小さい頂点から順に x^s と x^b を決定する．図 1 はこのように頂点が番号付けられているので，例 5.3 を用いてアルゴリズムの動きを説明しよう．

生産者 1 は，評価を最大化するために 5 単位を生産し，仲買人 3 と 4 にそれをなるべく均等になるように販売数を提示する．すなわち (x_{13}^s, x_{14}^s) は $(2, 3)$ か $(3, 2)$ のどちらかであるが，$(x_{13}^s, x_{14}^s) = (2, 3)$ を選んだとする．同様に生産者 2 は 7 単位を生産し，販売提示数として $(x_{23}^s, x_{24}^s) = (4, 3)$ を選んだとする．次に仲買人 3 は $(x_{13}^s, x_{23}^s) = (2, 4)$ という生産者からの販売提示数に対して，評価を最大化するために購入希望数を $(x_{13}^b, x_{23}^b) = (2, 4)$ とし，消費者への販売提示数を $(x_{35}^s, x_{36}^s) = (3, 3)$ と決める．同様に仲買人 4 は購入希望数を $(x_{14}^b, x_{24}^b) = (3, 3)$ とし，販売提示数を $(x_{45}^s, x_{46}^s) = (3, 3)$ とする．消費者 5 と 6 も同様に購入希望数を決定し，すべての経済主体の販売提示数と購入希望数が決定した状況が，図 2 の (a) である．図中で有向辺 13 の脇に書かれた $2/L$ と 2 は，$x_{13}^s = 2$，$\overline{z}_{13} = L$（L は充分大きな整数），$x_{13}^b = 2$ であることを表している．

図 2 の (a) において，辺 36 で $x_{36}^s = 3$ と $x_{36}^b = 2$ にギャップがある．この場合は，仲買人 3 は生産者 6 への販売数については，最大でも $2 = x_{36}^b$ であると悟り，$\overline{z}_{36} = 2$ と更新する．$\overline{z}$ の更新を行った結果が図 2 の (b) である．これで第 1 反復が終了する．$x^s = x^b$ になるまで同様のことを繰り返す．ただし第 2 反復以降では，販売提示数 x^s は $\overline{z}$ 以下で，前の反復で決まった購入希望数 x^b 以上であるとする．

各経済主体 $v \in V$ に対する $(\delta^+(v), \delta^-(v))$ 上の歪 M$^\natural$ 凹評価関数 $f_v : \mathbb{Z}^{\delta(v)} \to \underline{\mathbb{R}}$ の実効定義域 $\mathrm{dom}\, f_v$ が超立方体状の領域 $\{y \in \mathbb{R}^{\delta(v)} \mid \mathbf{0} \leq y \leq (L-1)\mathbf{1}\}$ に含まれるとすると，このアルゴリズムは以下のように記述できる．

Find_Stable

入力: $(\delta^+(v), \delta^-(v))$ 上の歪 M$^\natural$ 凹評価関数 f_v $(v \in V)$;

出力: (6) と (7) を満たす x^*，$\overline{z}$，$\underline{z}$;

$x^s := \overline{z} := (L, L, \ldots, L)$，$x^b := \underline{z} := (0, 0, \ldots, 0)$;

repeat {

  for $i := 1$ **to** n **do**

    以下に含まれる $(x_{\delta^+(i)}^s, x_{\delta^-(i)}^b)$ を求める;

$$\arg\max \left\{ f_i(y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{\delta^+(i)}^b \leq y_{\delta^+(i)} \leq \overline{z}_{\delta^+(i)} \\ y_{\delta^-(i)} \leq x_{\delta^-(i)}^s \end{array} \right\}$$

  for each $a \in A$ with $x^s(a) > x^b(a)$ **do**

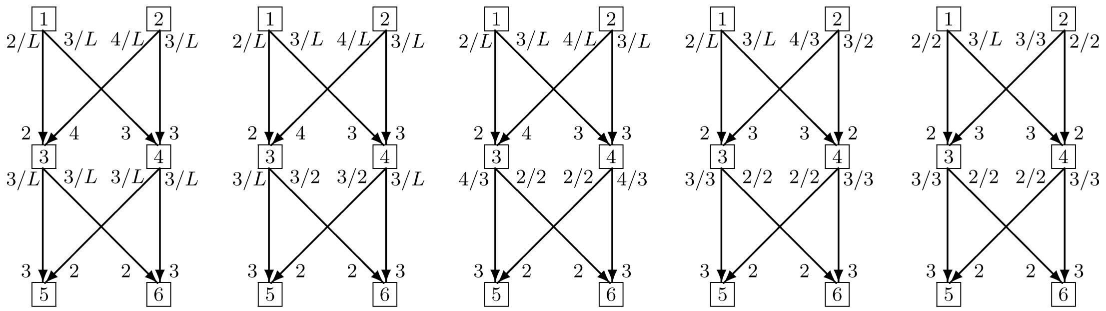
    $\overline{z}(a) := x^b(a)$，$\underline{z}(a) := +\infty$;

} **until** $x^s = x^b$;

$\overline{z}$ の成分で L であるものを $+\infty$ に置き換える;

$(x^*, \overline{z}, \underline{z}) := (x^s, \overline{z}, \underline{z} \vee x^s)$ を出力し終了．

$x^{s(k)}$，$x^{b(k)}$ および $\overline{z}^{(k)}$ をそれぞれ repeat 文の第 k 反復直後の x^s，x^b および $\overline{z}$ を表すとする．便宜上，$x^{s(0)}$，$x^{b(0)}$，$\overline{z}^{(0)}$ は初期設定時のベクトルとする．頂



(a) 第 1 反復途中　(b) 第 1 反復終了後　(c) 第 2 反復終了後　(d) 第 3 反復終了後　(e) 第 4 反復終了後

図 2　Find_Stable の動作例

点は番号の小さいものから先に扱うため，第 k 反復における $x^{s(k)}$ と $x^{b(k)}$ は，より厳密には各 $i \in V$ について以下のように

$$(x^{s(k)}_{\delta^+(i)}, x^{b(k)}_{\delta^-(i)}) \in \arg\max \left\{ f_i(y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x^{b(k-1)}_{\delta^+(i)} \le y_{\delta^+(i)} \le \overline{z}^{(k-1)}_{\delta^+(i)} \\ y_{\delta^-(i)} \le x^{s(k)}_{\delta^-(i)} \end{array} \right\}$$

と定まり，例を用いた説明に符合した更新である．

詳細は省くが以下の定理が成り立つ．

定理 6.1　$G = (V, A)$ が非巡回有向グラフで，各経済主体 $v \in V$ の評価関数 $f_v : \mathbb{Z}^{\delta(v)} \to \underline{\mathbb{R}}$ が $(\delta^+(v), \delta^-(v))$ 上の歪 M$^\natural$ 凹関数ならば，Find_Stable が出力する $(x^*, \overline{z}, \underline{z})$ は (6) と (7) を満たし，x^* は安定割当である．したがって常に安定割当が存在する．

例 6.2　図 2 の第 2 反復以降として (c)∼(e) のような動作が可能である．最終的に次の出力を得る．

辺	13	14	23	24	35	36	45	46
x^*	2	3	3	2	3	2	2	3
$\overline{z}$	2	$+\infty$	3	2	3	2	2	3
$\underline{z}$	$+\infty$	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(6) と (7) が満たされるので x^* は安定割当である．//

本節の最後として Find_Stable の時間計算量を確認する．非巡回有向グラフ $G = (V, A)$ の有向辺数を m とし，適当な整数 L について各経済主体 v の歪 M$^\natural$ 凹評価関数 f_v の実効定義域は超立方体状の領域 $[\mathbf{0}, (L-1)\mathbf{1}]$ に含まれるとする．m, L を用いて計算量を評価する．また，各 $v \in V$ と整数ベクトル y について関数値 $f_v(y)$ は定数時間で計算できると仮定する．

各反復の終了時点では，前回よりも $\sum_{a \in A} \overline{z}(a)$ は厳密に減少する．すなわち，Find_Stable は高々mL 回の反復で終了する．各反復で最も時間を要する部分は各経済主体 v に対する歪 M$^\natural$ 凹関数の最大化である．d 変数の歪 M$^\natural$ 凹関数の最大化は，d 変数の M$^\natural$ 凸関数あるいは変数を一つ増やしたある M 凸関数の最小化問題に帰着できる．これらの最小化問題は，d と $\log L$ に関する多項式時間で解くことができる．アルゴリズムの詳細については，文献 [4] を参照されたい．簡単にまとめると，各反復の時間は $m^3 \log L$ に比例する時間で終了する．

7. おわりに

現時点でマーケットデザインにおいて実用化で大成功した数理経済モデルは，オークションと安定結婚モデルだけと言われている．本記事では，安定結婚モデルの一般化であるサプライチェーンネットワーク上の安定割当モデルを離散凸解析を通して眺めてみた．紹介したモデルも含めて実用的に利用しきれていないモデルが多々ある．これらが現実問題解決へと展開されるために離散凸解析が一役買える日はきっと来る．

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, College Admissions and the Stability of Marriage, American Mathematical Monthly, **69**, 9–15, 1962.
[2] Y. T. Ikebe and A. Tamura, Stability in Supply Chain Networks: An Approach by Discrete Convex Analysis, submitted for publication.
[3] K. Murota, Discrete Convex Analysis, SIAM, 2003.
[4] 室田一雄，塩浦昭義，離散凸解析と最適化アルゴリズム，朝倉書店，2013.
[5] M. Ostrovsky: Stability in Supply Chain Networks, American Economic Reviews, **98**, 897–923, 2008.
[6] 田村明久，離散凸解析とゲーム理論，朝倉書店，2009.