

在庫管理とシフトスケジューリングにおける 離散凸解析

森口 聡子

マトロイド・劣モジュラ関数の研究の流れをくんで理論研究が展開されてきた離散凸解析は、オペレーションズ・リサーチ (OR) における問題解決にも利用されてきた。本稿では、離散凸解析の理論研究が、在庫管理およびシフトスケジューリングにもたらした成果を中心に説明していきたい。

キーワード：組合せ最適化, 離散凸解析, 在庫管理, シフトスケジューリング

1. はじめに

離散凸解析は、マトロイド・劣モジュラ関数の研究の流れをくんで理論研究が展開されてきた。今や多くの理論的成果が報告されている一方で、オペレーションズ・リサーチ (OR) における問題解決にも利用され、在庫管理問題やコールセンターにおけるシフトスケジューリング問題などへの応用が報告されている [1, 2, 7, 9]。

在庫管理の理論は長い歴史をもつが、現代の SCM (Supply Chain Management) においてもその基礎として重要である。在庫管理理論と離散凸関数のかかわりは古く、1970 年代に Miller[3] は予備品在庫管理問題の研究において、現在「Miller の離散凸関数」と呼ばれる概念を定義している。その後の離散凸解析の研究により、Miller の予備品在庫管理問題に現れる在庫費用関数は L^{\sharp} 凸関数であり、したがって、この問題は多項式時間で求解が可能であることが明らかになっている。近年では、Zipkin[9] が売り損じを考慮した一品種の離散時間モデルに対して、このモデルで現れる関数の L^{\sharp} 凸性を明らかにし、その事実に基づくモデルの解析を展開している。

一方、コールセンターは、企業と顧客の接点として近年、企業活動を推進するうえでますます重要となってきた。コールセンターの業務形態のうち、電話を受けることを主とするインバウンドの業務形態を考えていただきたい。コールセンターに電話をかけたとき、もしもオペレータにつながるまで長い間待たされたら、どのようにお感じになるだろうか？おそらく待たされれば待たされるほど、不快感が募るであろう。

どのくらい待たされれば不快と感じるかは人によって差があるだろうが、アメリカでは「30 秒以内が一般的なコールセンターの目標値」と言われていたり、業種により異なるものの、日本では「20 秒以内に 80% のコールに対応する」を目標としているところが一般的と言われていたりする。このように、設定した時間内に何% のコールに回答したかをサービスレベルとしてとらえる。もちろん、たくさんのオペレータを雇用すればサービスレベルを上げることができるが、当然コストとのトレードオフがある。インバウンド形態において、サービスレベルを保ちつつ各時刻に配置するオペレータの人数を決定するシフトスケジューリング問題が Koole–Sluis [2] で扱われ、そこではマルチモジュラ性が重要な役割を果たしている。このマルチモジュラ性は (変数変換を通じて) 離散凸解析における L^{\sharp} 凸性と等価な概念である。この事実に着目してこの問題を離散凸解析の観点から再検討すると、シフトスケジューリングにおける意思決定が既存の方法より効率的に行えるようになり、さらに対象モデルを拡張できることが明らかになっている。

本稿では、近年の離散凸解析の理論研究および関連して開発されたソフトウェアが、在庫管理問題、シフトスケジューリング問題にもたらした成果を議論していく。

2. 離散凸関数と離散凸解析

整数格子点上で定義された離散的な関数で、連続関数に対する凸解析の理論を何らかの形で取り入れようと考えられているものは、一般に「離散凸関数」と呼ばれている。離散凸関数にまつわる概念は多数存在するが、ここでは在庫管理とシフトスケジューリングの応用に現れるものだけを取り上げることにする。その

ほかの概念については、[5, 6, 7] や、今回の特集号のほかの記事を参照していただきたい。

点 $x \in \mathbb{R}^n$ の整数近傍を

$$N(x) = \{y \in \mathbb{Z}^n \mid \lfloor x(i) \rfloor \leq y(i) \leq \lceil x(i) \rceil, \\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

と定義する。ここで、 $\lceil \cdot \rceil$, $\lfloor \cdot \rfloor$ は、それぞれ、切り上げ、切り捨てを意味し、ベクトルに対して用いるときは各成分を切り上げ、切り捨てした整数ベクトルとする。関数 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は任意の $x, y \in \mathbb{Z}^n$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$\min\{f(z) \mid z \in N(\alpha x + (1 - \alpha)y)\} \\ \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

を満たすとき、Miller の離散凸関数といわれる。

次に、待ち行列理論などで用いられるマルチモジュラ関数を取り上げる。 i 方向の単位ベクトルを $e_i (\in \{0, 1\}^n)$ と表す。方向ベクトルの集合

$$\mathcal{F} = \{-e_1, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n$$

を考える。関数 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、任意の $z \in \mathbb{Z}^n$ と任意の相異なる $d, d' \in \mathcal{F}$ に対して不等式

$$f(z + d) + f(z + d') \geq f(z) + f(z + d + d')$$

を満たすとき、マルチモジュラ (multimodular) 関数と呼ばれる。

ここで、離散凸解析において中心的な役割を担っている L^\natural 凸関数の定義を述べる。

関数 $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が L^\natural 凸関数であるとは、 g が離散中点凸性

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) \\ (\forall p, q \in \mathbb{Z}^n)$$

を満たすことと定義される¹。

L^\natural 凸関数の特徴づけ (同値な定義) はいろいろ知られている。そのうちの一つ、並進劣モジュラ性について述べる。任意の $p, q \in \mathbb{Z}^n$ と非負整数 α に対して不等式

$$g(p) + g(q) \geq g((p - \alpha \mathbf{1}) \vee q) + g(p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}))$$

が成り立つとき、関数 $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は並進劣モジュ

ラであると言う。ここで、ベクトル $p, q \in \mathbb{R}^n$ に対して、成分ごとに最大値、最小値をとって得られるベクトルを $p \vee q, p \wedge q$ と書くことにする。このとき、関数 $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、並進劣モジュラ性は離散中点凸性と同値であることが知られている。

なお、 L^\natural 凸関数は Miller の離散凸関数である。マルチモジュラ関数は簡単な変数変換を通じて、 L^\natural 凸関数と等価である。詳しくは定理 4.1 で述べる。

実数ベクトルを変数とする関数についても L^\natural 凸性は定義されている。凸関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。連続版の L^\natural 凸関数は、並進劣モジュラ性を連続化することで定義する。すなわち、任意の $p, q \in \mathbb{R}^n$ と非負実数 α に対して不等式

$$g(p) + g(q) \geq g((p - \alpha \mathbf{1}) \vee q) + g(p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}))$$

が成り立つとき、関数 g は L^\natural 凸関数と定義される。

なお、面白いことに、離散中点凸性において、離散性 (切り上げ、切り捨て) を単純に連続化して得られる式

$$g(p) + g(q) \geq 2g\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad (\forall p, q \in \mathbb{R}^n)$$

は、連続版 L^\natural 凸関数の定義には使えない。

次節以降で、ここで定義した関数が、在庫管理やシフトスケジューリングの応用でどのように利用されているかを述べていく。

3. 在庫管理と離散凸解析

在庫管理は、製品の需要を効率的に満たすことを目的とし、在庫水準の管理を扱う。在庫管理において、採用する意思決定のプロセスに応じてモデリングの方法が変わってくるため、各種在庫モデルが区別されている。

供給者側は、消費者の需要に応じるために必要な商品を仕入れたり、製品加工のための材料を発注し、それらを適当な期間、倉庫に貯蔵する。ここで、正の在庫量には保管在庫費用、負の在庫量には品切れ損失費用、そして発注して在庫量を増やすことには発注費用といった、各種の費用が生じる。また発注された商品や材料は通常、配達に時間を要する。この発注から受け入れまでの時間はリードタイムと言われ、確定的な場合と確率的な場合に区別される。発注量や需要量が連続値をとるか離散値をとるかについても分類される。さらに、限りある施設、時間、資金による制約や、在庫の問題を取り巻く要因は多数存在し、これらのモデル化の方法によっても区別されている。

¹ 本来は、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$ 方向の線形性と劣モジュラ性を持つ L 凸関数を用いて L^\natural 凸関数が定義されていたが、本稿では、本来の定義と等価で直観的にわかりやすい離散中点凸性による定義を用いた。

例えば、一口に品切れ損失費用といっても、

- 未納注文（あるいは繰越注文）を許すバックオーダーモデル
- 許さない売り損じ (lost-sales) モデル

という相異なる 2 種類のモデルに対する費用が考えられる。両者とも、予測よりも需要量が多く、在庫切れを起こした場合をモデル化しているが、バックオーダーモデルでは、在庫切れ時の需要は顧客が待っていてくれるため将来満たされるのに対し、売り損じモデルでは、顧客は他社に囲い込まれてしまうため、在庫切れ時の需要が満たされることはない。

在庫が多品種から成るとき、しばしば同時に管理調整を行う必要があり各品種を個別に取り扱うことができないため、一品種の場合と区別してモデル化される。また対象計画期間は一期間なのか、多期間なのか、あるいは無限期間なのか、という観点からも区別される。

以上の在庫モデルのうち、総費用を最小にするような在庫方式を検討する際に離散凸解析が貢献しているモデルについて解説していく。

3.1 一品種・売り損じモデル

売り損じを考慮した一品種の離散時間モデル [4, 9] を考える。需要量、発注量、在庫量が連続値をとると仮定したモデルに対して、連続空間上の通常の凸関数との関連がこれまで論じられてきたが、[9] で連続 L^{\natural} 凸関数とその理論に基づいた解析がなされている。さらに、需要量、発注量、在庫量について整数性を仮定したモデルに対しても、同様の議論が展開できることに言及している。

まずは需要量や発注量が連続値をとるものとする。各期では、(i) その期に納入されることになっていた発注残（発注してあったが、正のリードタイムにより納入されなかった未納入残）の納入、(ii) 新規の発注、(iii) 需要の発生、の順で起こるものとする。

$$\begin{aligned} L &= \text{注文のリードタイム}, L > 0 \\ t &= 1, \dots, T + L \quad (\text{期のインデックス}) \\ d_t &= t \text{ 期の需要} \\ z_t &= t \text{ 期の発注量} \\ y_t &= t \text{ 期の在庫 (発注残到着後)} \\ u_t &= y_t - d_t \\ x_{0,t} &= y_t, \quad x_{1,t} = z_{t+1-L}, \dots, x_{L-1,t} = z_{t-1} \end{aligned}$$

として、 t 期のシステムの状態を L 次元ベクトル $\mathbf{x}_t = (x_{0,t}, x_{1,t}, \dots, x_{L-1,t}) \in \mathbb{R}^L$ で表現する。このとき、次期 ($t+1$ 期) の状態 $\mathbf{x}_{t+1} \in \mathbb{R}^L$ は $\mathbf{x}_{t+1} = (\max\{0, x_{0,t} - d_t\} + x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{L-1,t}, z_t)$

と表される。

c を単位量当たりの発注費用、 \hat{h} を単位量当たりの在庫保管費用、 p を単位量当たりの売り損じペナルティとする。将来のコストは、各期に割引率 $0 < \gamma \leq 1$ ² をかけて割り引かれるものとする。当然、割引を考えない場合は $\gamma = 1$ とすればよい。

u_t が与えられているとき、 t 期末の在庫保管あるいは売り損じにより生じるコストは

$$\hat{q}_t(u_t) = \hat{h} \max\{u_t, 0\} + p \max\{-u_t, 0\}$$

であるので、 y_t が与えられているとき、 t 期初（発注残到着直後）に見積もれるコストの期待値は $\hat{q}_t^0(y_t) = E[\hat{q}_t(y_t - d_t)]$ となる。

$\hat{f}_t(\mathbf{x}_t)$ を、 t 期に状態 \mathbf{x}_t から始めた最適費用（最適な発注を行った際の総費用）と定義すると、次の漸化式が成り立っている：

$$\begin{aligned} \hat{g}_t(\mathbf{x}_t, z) &= \gamma^L c z + \hat{q}_t^0(y_t) + \gamma E[\hat{f}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1})] \quad (1) \\ \hat{f}_t(\mathbf{x}_t) &= \min_{z \geq 0} \{\hat{g}_t(\mathbf{x}_t, z)\}. \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、(1) 式の右辺の第一項はリードタイムの間を通じての割引を考慮した発注コスト、第二項は期初の発注残到着直後に見積もる期末の在庫保管コストあるいは売り損じコストの期待値、そして、第三項は割引を考慮した次期の最適費用の期待値となっている。有限の期間 T に対して、最後の発注は T 期になされるが、在庫保管あるいは売り損じにより生じるコストは $T+L$ 期まで計上されるとする。つまり、 $\hat{f}_{T+L+1}(\mathbf{x}_{T+L+1}) = 0$ と仮定する。 $\hat{z}_t(\mathbf{x}_t)$ を最適政策、すなわち、(2) 式の右辺で最小値を達成する z とする³。

これまで、通常の凸関数であることは知られていた \hat{g}_t と \hat{f}_t に対して、Zipkin [9] は（連続変数版の）マルチモジュラ関数であることを示している。その証明は t に関する帰納法による。すでに述べたとおり、マルチモジュラ関数は変数変換によって L^{\natural} 凸関数に変換できるので、離散凸解析の理論を適用できるというわけである。この事実を利用し、 \hat{z}_t の非増加性と下界を導いている。さらに、需要がマルコフ変調型である場合や、リードタイムが確率的に与えられている場合、顧客にクラス分けが存在しコストに差が生じる場合などの各種拡張モデルについても議論している。また、需要量、発注量、在庫量が整数値をとるモデルに対して

² ここでは対象計画期間が有限であるモデルを考えている。無限期間の場合は、割引率は 1 より小さい ($\gamma < 1$) と仮定する。

³ \hat{g} の最小値を達成する z が複数個あった場合は、最小の z を \hat{z}_t とする。

も、同様の議論が展開できることに言及している。需要量、発注量、在庫量が連続値をとる場合には連続版 L^b 凸関数を、整数値をとる場合には離散版 L^b 凸関数を用いることで、連続モデルと離散モデルを同じように扱えることが、離散凸解析の貢献と言える。

3.2 多品種・バックオーダーモデル (予備品在庫管理モデル)

ここで取り上げる予備品在庫管理モデルは Miller [3] によって提案されたもので、需要量、発注量が離散値をとるもの (バックオーダーを考慮した多品種モデル) であり、航空機整備における部品管理などに用いられる。文献 [3] では、在庫費用関数の数学的な取り扱いのために「Miller の離散凸関数」の概念を定義し、(計算量が多項式時間ではない) 最小化アルゴリズムを提案している。この在庫費用関数は、後に、 L^b 凸関数であることが判明している [7]。

Miller のモデルは、部品 (品種) 数が n からなる製品の製造において、各部品の不足個数 (バックオーダー) の最大数によって定まる罰金と、あらかじめ予備品 (スペア) を購入しておくための代金の和として定義されるコストをできるだけ減らしたいという在庫モデルである。 $c_j > 0$ を品種 j の単価とし、 $x_j \in \mathbb{Z}$ を品種 j の予備品の発注量とすると、予備品の購入代金は $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ となる。一方、品種 j の需要 (を表す非負整数値確率変数) が m である確率を $\varphi_j(m)$ とし、累積分布関数を

$$F_j(k) = \sum_{m=0}^k \varphi_j(m) \quad (k \in \mathbb{Z}_+) \quad (3)$$

とすると、 n 品種の中の最大バックオーダー量の (定常状態における) 期待値は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \prod_{j=1}^n F_j(x_j + k) \right) \quad (4)$$

となる (詳しくは [7] の 14.7 節を参照のこと)。発注量 (x_1, \dots, x_n) をうまく定めて

$$f(x) = p \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \prod_{j=1}^n F_j(x_j + k) \right) + \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5)$$

を最小化することが目的である。ただし、 $p > 0$ は罰金を表す。ここでは、品種 j の需要の分布として、パラメータ $\lambda_j > 0$ のポアソン分布

$$\varphi_j(m) = \exp(-\lambda_j) \frac{\lambda_j^m}{m!} \quad (m \in \mathbb{Z}_+) \quad (6)$$

を用いる。

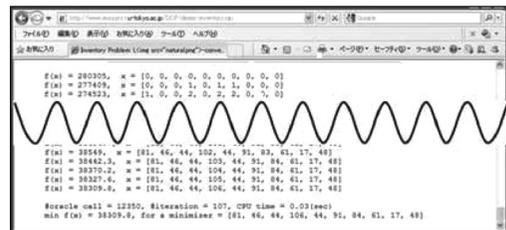
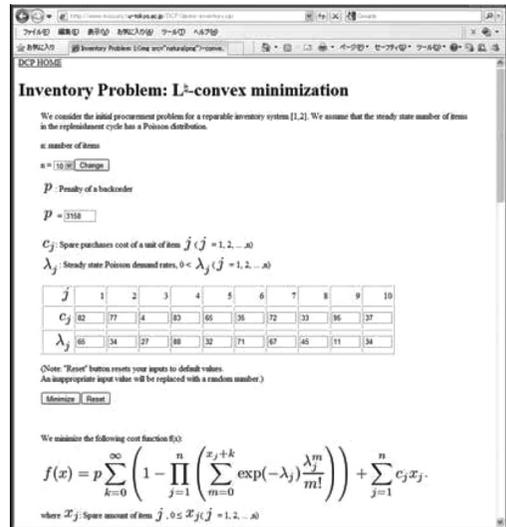


図 1 オンラインアプリケーション (在庫管理問題の入力と出力)

すでに述べたように、(5) 式の f は L^b 凸関数である。このことから、 L^b 凸関数の最小化アルゴリズムにより、 $f(x)$ の最小化を効率的に行うことができる。 L^b 凸関数の最小化アルゴリズムを実装したソルバを最適化エンジンとして用いたオンラインアプリケーションも開発されている ([8, 10] および、図 1 参照)。

4. コールセンターにおけるシフトスケジューリングと離散凸解析

電話を受けることを主とするインバウンド形態のコールセンターを考える。客からのコール数に比べて、サービスするオペレータの人数が少なくなるとサービスレベルが低下するコールセンターにおいて、各時刻に配置するオペレータの人数をサービスレベルを考慮して決定するシフトスケジューリング問題を取り上げる。

4.1 Koole–Sluis [2] のモデル

ここで取り上げる Koole–Sluis [2] のモデルの概要は以下のとおりである。

- コールセンターは、 I 個の (連続する) 時間区間にわたって稼働する。時間区間を $i = 1, \dots, I$ で

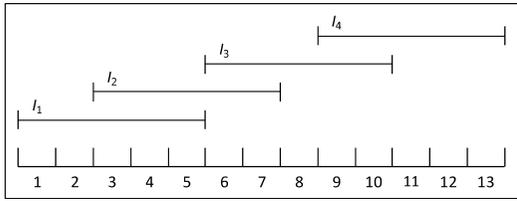


図2 シフトの例

表す。

- 各オペレータは連続した M 個の時間区間に勤務する。
- 勤務シフトは K 種類あり、それぞれの開始時点（と終了時点）はあらかじめ指定されている。シフトを $k = 1, \dots, K$ で表し、第 k シフトの開始時間区間を I_k で表す。ただし、 $1 \leq I_1 < I_2 < \dots < I_K \leq I - M + 1$ とする。図2にシフトの例を示す ($I = 13, M = 5, K = 4, I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 6, I_4 = 9$)。
- 各時間区間 $i = 1, \dots, I$ に対して、その区間におけるサービスレベルを表す関数 $g_i(n_i)$ が与えられている。ここで、 n_i は時間区間 i に勤務しているオペレータの人数である。関数 g_i は単調増加な凹関数とする。
- 全体のサービスレベル S は $S = \sum_{1 \leq i \leq I} g_i(n_i)$ で与えられる。

第 k シフトに配置するオペレータの人数を y_k とすると、時間区間 i のオペレータの人数 n_i は

$$h_i(y) = \sum_{k: i-M < I_k \leq i} y_k \quad (7)$$

に等しい。したがって、サービスレベル S は $y = (y_1, \dots, y_K)$ の関数として

$$S(y) = \sum_{1 \leq i \leq I} g_i(h_i(y)) \quad (y \in \mathbb{Z}_+^K) \quad (8)$$

となる。文献 [2] に従い、サービスレベルを一定の水準 s に保ってオペレータの人数を最小化する問題

$$\text{Minimize } \sum_k y_k \text{ s.t. } S(y) \geq s, y \in \mathbb{Z}_+^K \quad (9)$$

を考える。このとき、 N をパラメータとする問題

$$\text{Maximize } S(y) \text{ s.t. } \sum_k y_k = N, y \in \mathbb{Z}_+^K \quad (10)$$

を繰り返し解いて、最適な N を二分探索で見いだすことにより、問題 (9) の最適解を求めることができる。

サービスレベル $S(y)$ の具体形は、待ち行列モデル $M/M/n$ に基づいて、以下のように定める。各時間区間の客の到着率を λ_i ($i = 1, \dots, I$)、オペレータのサー

ビス率を μ とする。客を待たせる時間の限界の基準値 c (例えば $c = 11$ 秒) を設定し、この時間内にオペレータにつながる客の割合をサービスレベルと定義すると、

$$\begin{aligned} S(y) &= \sum_{1 \leq i \leq I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} P[W_{\lambda_i}(n_i) \leq c] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} P[W_{\lambda_i}(h_i(y)) \leq c] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\Lambda = \sum_{1 \leq i \leq I} \lambda_i$ である。また、 $W_\lambda(n)$ は待ち行列モデル $M/M/n$ (到着率 λ , サービス率 μ) における待ち時間 (確率変数) であり、 $P[\dots]$ は確率を表す。待ち行列理論により、定常状態において

$$P[W_\lambda(n) \leq c] = 1 - \Pi_n \exp[-n\mu(1 - \rho/n)c] \quad (12)$$

となることが知られている。ただし、 $\rho = \lambda/\mu$, $\rho/n < 1$,

$$\Pi_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!(1 - \rho/n)}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!(1 - \rho/n)}} \quad (13)$$

である。このとき、各 i に対して、

$$g_i(n) = \frac{\lambda_i}{\Lambda} P[W_{\lambda_i}(n) \leq c] \quad (14)$$

は n に関して単調増加な凹関数⁴ となり、モデルの仮定を満たす。

式 (8) の関数 $S(y)$ は離散凹性を持つ。すなわち、 g_i ($i = 1, \dots, I$) が単調増加な凹関数であるという仮定の下で、 $-S(y)$ はマルチモジュラ関数になる [2]。マルチモジュラ性は L^\sharp 性と等価な概念であり、マルチモジュラ関数と L^\sharp 凸関数の間には、変数変換を通じて次のような 1 対 1 対応がある [6, 7]。

定理 4.1 関数 $F: \mathbb{Z}^K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ がマルチモジュラ関数であるための必要十分条件は、

$$f(x) = F(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_K - x_{K-1}) \quad (x \in \mathbb{Z}^K)$$

で定義される関数 $f: \mathbb{Z}^K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が L^\sharp 凸関数であることであり、このとき

$$F(y) = f(y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots, y_1 + \dots + y_K) \quad (y \in \mathbb{Z}^K) \quad (15)$$

⁴ 関数 g_i の実効定義域は $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > \lambda_i/\mu\}$ であり、 $n \leq \lambda_i/\mu$ に対しては $g_i(n) = -\infty$ とする。

が成り立つ。

この事実により、問題 (10) は $K - 1$ 変数の L^{\natural} 凸関数

$$\tilde{f}(x) = -S(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_{K-1} - x_{K-2}, N - x_{K-1}) \quad (x \in \mathbb{Z}^{K-1})$$

の制約なしの最小化問題と等価であることがわかる。したがって、問題 (10) の厳密解を効率よく求めることができる。

離散凸解析の有用性を示すため、「 $-S(y)$ のマルチモジュラ性」の別証明を与えておこう。

$x_k = y_1 + \dots + y_k$ ($k = 1, \dots, K$) とおく。まず、変数 y の非負性が、 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_K$ という L^{\natural} 凸条件に対応することに注意する。各 i に対して $i - M < I_k \leq i$ を満たす k の最大値を $k_{\max}(i)$ 、最小値を $k_{\min}(i)$ とすると、

$$h_i(y) = \begin{cases} x_{k_{\max}(i)} - x_{k_{\min}(i)-1} & (k_{\min}(i) \geq 2), \\ x_{k_{\max}(i)} & (k_{\min}(i) = 1) \end{cases}$$

である。したがって $\sum_{1 \leq i \leq I} g_i(h_i(y))$ は x に関して L^{\natural} 凹関数であり、 $-S(y)$ はマルチモジュラ関数である。

この証明から、第 k シフトのオペレータの働く時間単位 $M = M_k$ が k に依存しても、 $h_i(y)$ が連続する添え字 k に関する y_k の和となっていれば、 $-S(y)$ がマルチモジュラ関数になることがわかる。例えば、 $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_K$ ならばよい。

利用者が対話的にパラメータ入力・最適化を行えるオンラインアプリケーションも開発されている [8, 10]。アプリケーションでは、各時間区間の客の到着率 λ_i 、オペレータのサービス率 μ 、客を待たせる時間の限界の基準値 c などのパラメータを対話的に入力し (図 3 の上)、最適化を実行すると、各シフトに配置するオペレータの最適な人数と、その際のサービスレベルが表示されるようになっている (図 3 の下)。

4.2 人件費を考慮したモデルの拡張

Koole-Sluis [2] のモデルに対して、オペレータの雇用に関するコストを導入した拡張を考える。第 k シフトの 1 人当たりの人件費を l_k とおくと、総人件費は $\sum_{1 \leq k \leq K} l_k y_k$ となる。 $l_k = 1$ の場合が、Koole-Sluis [2] のモデルである。

第 1 の拡張として、以下の状況を考える。

- 客が満足した (= 客の待ち時間が c を超えない) 場合の見込み利益 G が既知である。
- 満足しなかった (= 待ち時間が c を超えた) 客は、

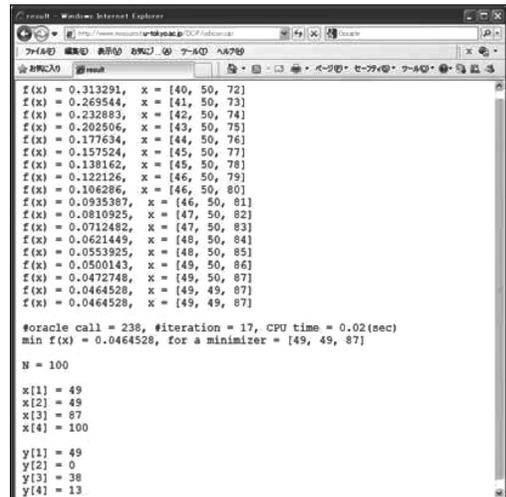
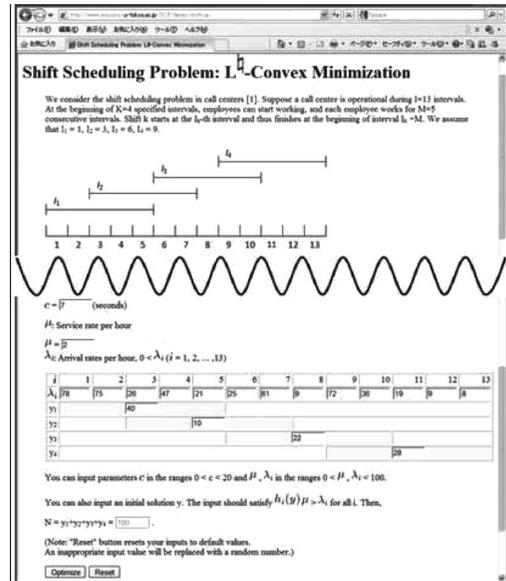


図 3 オンラインアプリケーション (シフトスケジューリング問題の入力と出力)

一定の割合 r で (会社に) 利益をもたらさない (lost sales)。

このとき「サービスレベルの減少による見込み利益の減少量と、人件費の和を最小化したい」という問題は以下のように定式化できる：

$$\text{Minimize } Gr \sum_{1 \leq i \leq I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} (1 - P[W_{\lambda_i}(n_i) \leq c]) + \sum_{1 \leq k \leq K} l_k y_k. \quad (16)$$

前半の項が、満足しなかった顧客の割合に依存する見込み利益の減少量で、後半の項が人件費である。この

問題は、変数を y から x に変換すれば L^\natural 凸関数の最小化問題となり、離散凸解析のアルゴリズムを用いて厳密な最適解を効率的に求めることができる。

さらに、(16) 式に対する変数変換は、 L^\natural 凸関数最小化アルゴリズムの利用というメリットがあるだけでなく、その共役関数を考えることで、人件費 l の関数として、 M^\natural 凸性という離散凸解析におけるもう一つの離散凸性が見えてくる。 $\sum_{1 \leq i \leq I} \frac{\lambda_i}{\Lambda} = 1$ より、(16) 式は、

$$\min \left\{ Gr(1 - S(y)) + \sum_{1 \leq k \leq K} l_k y_k \right\}$$

となる。この式は、 l を変数と思うと、マルチモジュラ関数 $S(y)$ に -1 を掛けたものの凹共役関数である。これを $T(l)$ と書くことにする。 $g(x) = -\tilde{f}(x)$ において、さらに変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} T(l) &= \min \{ Gr(1 - g(x)) \\ &\quad + l_1 x_1 + l_2(x_2 - x_1) + \dots + l_K(x_K - x_{K-1}) \} \\ &= \min \{ \langle x, D^\top l \rangle - Gr(g(x) - 1) \} \\ &:= h(D^\top l) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$D^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。 $g(x)$ は L^\natural 凹関数である。 L^\natural 凹関数の凹共役は M^\natural 凹関数であるので、 h は、 $z := D^\top l$ を変数とする M^\natural 凹関数である。

第2の拡張は、問題(10)の制約式を一般の線形関数に拡張したものである。人件費に充てることのできる予算を B で表すと、予算制約の下でサービスレベルを最大化する問題は

$$\text{Maximize } S(y) \text{ s.t. } \sum_k l_k y_k \leq B, y \in \mathbb{Z}_+^K \quad (17)$$

と定式化できる。この問題は、変数を y から z に変換すれば、線形制約付き L^\natural 凸関数最小化問題である。この問題に対する多項式時間アルゴリズムは知られてい

ないが、連続緩和やラグランジュ双対に基づく近似解法を考えることができる。

5. おわりに

本特集号の他の記事にも紹介されているように、離散凸解析の理論研究、アルゴリズム開発を受けて、離散凸関数に関する最小化ソルバやオンラインアプリケーションが公開されてきている。本稿では、在庫管理とシフトスケジューリングへの応用について述べたが、ソルバやアプリケーションの公開が進むことは、より多くのほかの別の分野への応用開拓につながっていくものと期待している。

最後に、私事で恐縮だが、本稿執筆中に子どもを出生した。現在、育児用品の在庫管理と、24時間態勢の育児シフトスケジューリング問題というチャレンジな問題に取り組んでいる。産前産後の慣れない状況での本稿執筆に際し、本特集号オーガナイザーの室田一雄先生をはじめとするほかの執筆者の方々、執筆の機会を与えてくださった池辺淑子先生には、たくさんのご助力、励ましを賜ったことに感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] M. Begen and M. Queyranne, Appointment Scheduling with Discrete Random Durations, *Mathematics of Operations Research*, **36**, 240–257, 2011.
- [2] G. Koole and E. van der Sluis, Optimal Shift Scheduling with a Global Service Level Constraint, *IIE Transactions*, **35**, 1049–1055, 2003.
- [3] B. L. Miller, On Minimizing Nonseparable Functions Defined on the Integers with an Inventory Application, *SIAM J. on Appl. Math.*, **21**, 166–185, 1971.
- [4] T. Morton, Bounds on the Solution of the Lagged Optimal Inventory Equation with No Demand Backlogging and Proportional Costs, *SIAM Review*, **11**, 572–596, 1969.
- [5] 室田一雄, 離散凸解析, 共立出版, 2001.
- [6] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, SIAM, 2003.
- [7] 室田一雄, 離散凸解析の考えかた, 共立出版, 2007.
- [8] 土村展之, 森口聡子, 室田一雄, 離散凸最適化ソルバとデモンストレーションソフトウェア, 応用数理学会論文誌, 第23巻第2号, 2013, 掲載予定.
- [9] P. Zipkin, On the Structure of Lost-sales Inventory Models, *Operations Research*, **56**, 937–944, 2008.
- [10] K. Murota, S. Iwata, A. Shioura, S. Moriguchi, N. Tsuchimura, and N. Kakimura, DCP (Discrete Convex Paradigm), <http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/DCP/>