

離散凸解析のすすめ

室田 一雄

離散凸解析は、整数格子点の集合の上で定義された離散的な関数を、凸解析と組合せ論の両方の視点から考察する理論である。本稿では、細かな数理に立ち入らずに、離散凸解析の目指すものと離散凸解析の理論の骨組みを俯瞰する。

キーワード：離散凸解析, 概念と定義, M 凸関数, L 凸関数, 共役性, 双対性

1. はじめに

離散凸解析は、整数格子点の集合のうえで定義された関数を、凸解析と組合せ論の両方の視点から考察する理論であり、離散最適化、オペレーションズ・リサーチ、システム解析、ゲーム理論、数理経済学、離散幾何などへの応用がある（図 1）。M 凸関数、L 凸関数の概念、共役性および双対性が理論の骨格であり、種々の問題に対してアルゴリズムが開発されている。本稿では、離散凸関数の定義を述べ、その基本的な性質を解説する。

——ここまで書いて、ふと思った。離散凸解析固有の議論を始める前に、最適化の「理論」はどのような構造になっているのか、とか、「理論」を理解するにはどうすればよいか、などの一般論を書いたほうがよいのではないか。大学で「理論の内容」は教えてきたけれど、「理論の理解の仕方」は教えていない——。

2. 理論との付き合い方

「あなたにとって、理論とは？」と問われて「面白いもの」と答える人は少ない。大方は「面倒なもの、厄

介なもの」となる。しかし「理論は不要」と言い切る人は少なく、「理論を上手く使いたい」と思っている人も多い。

しかし「理論」の勉強を始めてみると、そう簡単にはいかない。その理由は、数学が難しいことだけではない気がするのである。では何故なのか。どうすれば「理論」を攻略できるのか。

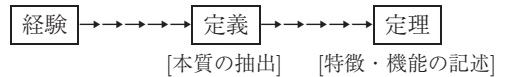
2.1 概念の定義ということ

最初に「概念の定義」ということについて考えよう。多くの場合、「理論」は「概念の定義」から始まる。「理論」にとって概念は不可欠であり、そのための定義も必要である。しかし、定義を読んでも

- ・何を言ってるのかわからない……
- ・何をやりたいのかわからない……

となるのが普通である。定義のあとには定理がくる。しかし、定理には（数学的に正しいこと以上の）どういう意味があるのか。これがなかなかわかりにくい。

概念というのは、定義の文章だけで成立するものではない。経験から抽出された本質と、その特徴や機能などを含めた全体が一つの概念である。本質は定義に凝縮され、特徴や機能は定理という形で記述される：



このように「概念=本質・特徴・機能」だとすれば、理論を勉強する際には「概念=定義と定理の全体」と考えたほうがよいことになる。定義だけ読んでわからないのは当然である。

2.2 最適化理論の構造的理解

概念の「定義」から数学的に証明された定理は、概念の「機能」を表現している。そして、諸々の定理が表現する「機能」が集まって、理論が理論としての体裁を成しているはずである。

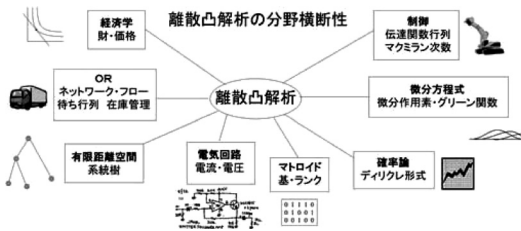


図 1 離散凸解析のつなぐ世界

むろた かずお
 東京大学大学院情報理工学系研究科
 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

では、その「機能」とは何か。別の言い方をすれば、最適化の理論においては、概念を定義して何をしたいのか。これを整理するには、線形計画(LP)の理論を思い出すのがよさそうである。

線形計画の理論の骨子は次のようになっていた。それぞれの定理の機能を示すために [定理○○] という符牒を付してある¹。

- 実行可能領域は凸多面体というものになる。その幾何学的性質を調べることによって最適化問題の性質がわかる。 —[定理 Conv]
 - 最適解は、局所的な最適性によって特徴づけられ、単体法や内点法という解法によって、(大域的な)最適解が求められる。単体法では、局所最適性は、節約費用の符号条件である。 —[定理 LocalOpt]
 - 一つの線形計画問題には、双対問題という別の問題が付随していて、あたかも、表と裏の関係にある。表の問題を(ことさらに)「主問題」と呼ぶ。そして、裏の裏は表である。 —[定理 DualPair]
 - 主問題と双対問題の最適値が一致するという不思議な現象があり、これを双対定理という。双対定理の使い方にはいろいろあるが、例えば、自分の手元にある実行可能解に対応する目的関数の精度を計算することができる。 —[定理 MinMax]
 - 双対定理の背後にある数学的な事実は、分離超面の存在(Farkasの補題)である。 —[定理 Separ]
- 以上を布石として、離散凸解析に話を移そう。

3. 離散凸関数 (1変数の場合)

最初に、1変数関数の場合に限定して、離散凸性の概略を述べる。1変数の場合は数学的にやさしく、直観的にも理解しやすいからである²。

実数全体を \mathbb{R} 、整数全体を \mathbb{Z} とし、 \mathbb{R} 、 \mathbb{Z} に正の無限大(+ ∞) をつけ加えた集合を $\overline{\mathbb{R}}$ 、 $\overline{\mathbb{Z}}$ と表し、また、負の無限大(- ∞) をつけ加えた集合を $\underline{\mathbb{R}}$ 、 $\underline{\mathbb{Z}}$ と表す。

整数上で定義された関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が条件

$$f(x-1) + f(x+1) \geq 2f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

を満たすとき、**離散凸関数**と呼ぶ。このとき点 $(x, f(x))$ を順に線分でつなげば、凸関数のグラフができる(図2の左側)。このように、ある凸関数 $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が存在

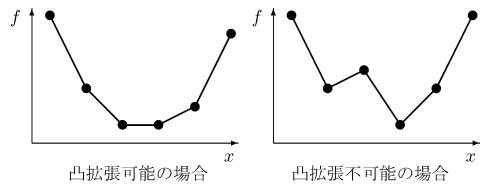


図2 離散関数の凸拡張

して

$$\bar{f}(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

が成り立つとき、 f は凸拡張可能であるといい、 \bar{f} を f の凸拡張と呼ぶ。図2の右側は、凸拡張できない関数の例である。

定理 3.1 (Conv) 関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して、離散凸性(1)と凸拡張可能性(2)は同値である。

離散凸関数では、極小点が最小点に一致する。局所的な性質(極小性)から大域的な性質(最小性)が導かれることが離散凸関数の重要な性質である。

定理 3.2 (LocalOpt) 関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が離散凸関数のとき、整数 x が f の最小点であるためには、

$$f(x) \leq \min\{f(x-1), f(x+1)\}$$

が成り立つことが必要十分である。

上の二つの定理は、線形計画の [定理 Conv] と [定理 LocalOpt] に対応するものである。次に [定理 DualPair] に対応するものを考えよう。

整数値をとる離散変数関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ に対して

$$f^*(p) = \sup\{px - f(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

と定義し、これを**離散ルジャンドル変換**と呼ぶ。ルジャンドル変換は、数理科学のいろいろな分野にでてくる重要な考え方であり、離散構造の理論においてもさまざまな形をとって現れる。

ここで、 $f(x)$ が有限値である $x \in \mathbb{Z}$ が存在するという(自然な)仮定をおくと、変換後の関数 f^* も $\overline{\mathbb{Z}}$ に値をとる関数 $f^*: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ となるので、その離散ルジャンドル変換 $(f^*)^*$ が定義される。これを f^{**} と記す。

定理 3.3 (DualPair) 整数値の離散凸関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ に対し、 f^* は整数値の離散凸関数で、 $f^{**} = f$ が成り立つ。

¹ 後に述べる離散凸解析の諸定理にも対応する符牒をつけてある。

² 1変数関数は単純なので、大上段に理論を構築する必要はない。あくまで、プロトタイプとして取り上げるという意図である。

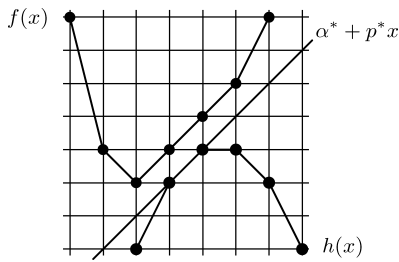


図3 離散分離定理

離散凹関数 $h : \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ ($-h$ が離散凸関数) に対して

$$h^\circ(p) = \inf\{px - h(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

と定義する。次のフェンシエル型双対定理が成り立つ。

定理 3.4 (MinMax) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ を離散凸関数、 $h : \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ を離散凹関数とすると、

$$\inf\{f(x) - h(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) \mid p \in \mathbb{Z}\}$$

が成り立つ。

フェンシエル型双対定理とほぼ等価な定理として、次の離散分離定理がある (図3 参照)。

定理 3.5 (Separ) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を離散凸関数、 $h : \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ を離散凹関数とする。すべての $x \in \mathbb{Z}$ に対して $f(x) \geq h(x)$ ならば、ある $\alpha^* \in \mathbb{R}$ 、 $p^* \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) \geq \alpha^* + p^*x \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。さらに、 f, h が整数値関数のときには、 $\alpha^* \in \mathbb{Z}$ 、 $p^* \in \mathbb{Z}$ ととれる。

以上のように、1変数関数の場合には、式(1)で離散凸性の概念を定義することによって、凸拡張性、局所最適と大域最適の同値性、離散ルジャンドル変換、フェンシエル型双対定理、離散分離定理など、離散凸関数が持つべき性質が得られる。第2節で線形計画について列挙した定理(Conv, LocalOpt, DualPair, MinMax, Separ)に対応する定理がすべて揃っていることに注目されたい。このように、「1変数離散凸関数の最適化理論」は簡単にでき上がる。

しかし、これを多変数関数に拡張することは自明でない。離散凸解析は、組合せ論的な考察に基づいてM凸関数とL凸関数という概念を定義し、この拡張を実現した理論体系である。

表1 離散凸解析の歴史

1935	マトロイド	Whitney
1965	劣モジュラ関数	Edmonds
1969	凸費用ネットワーク流*	伊理
1982	粗代替性*	Kelso-Crawford
1983	劣モジュラ性と凸性	Lovász, Frank, 藤重
1985	マルチモジュラ関数*	Hajek
1990	付値マトロイド	Dress-Wenzel
1990	劣モジュラ整凸関数	Favati-Tardella
1998	離散凸解析の提唱 (M凸/L凸関数)	室田
2000	劣モジュラ関数最小化アルゴリズム	

岩田-藤重-Fleischer, Schrijver

*印は離散凸解析とは別の文脈の研究

4. 離散凸解析の歴史

M凸関数、L凸関数の概念を説明する前に、離散凸解析の歴史を簡単な年表にまとめてみた (表1)。

マトロイドの概念はWhitneyによって1935年に導入された。今でこそ、マトロイドと離散最適化との密接な関係は周知の事実となっているが、元来、マトロイドはグラフ理論や線形代数が動機となって考案された抽象概念であり、最適化とは無関係であった。離散凸解析からみると、マトロイドは離散凸性の原点と位置づけられる。

1960年代の終わりにEdmondsによってポリマトロイド交わり定理が発見された。これを契機として劣モジュラ集合関数の研究が盛んになり、劣モジュラ関数と凸関数との類似性が議論された。1980年代はじめ、藤重、Frank、Lovászらの研究により、劣モジュラ集合関数の持つ凸性と離散性が明確になった。

1990年代にはいつ、DressとWenzelにより、付値マトロイドの概念が導入された。数年後、室田により付値マトロイドに関する双対定理が示され、離散凸性との関連が認識された。これらとは独立に、FavatiとTardellaにより、劣モジュラ整凸関数の概念が考察された。M凸関数、L凸関数の概念と「離散凸解析」の名称は、1998年頃に室田[2]によって提唱された。その後、 M^\square 凸関数、 L^\square 凸関数が導入され、 L^\square 凸関数が劣モジュラ整凸関数と同じものであることが示された。さらに、M凸関数、L凸関数の概念は、連続変数の関数に対しても拡張されている。

年表のなかで*印のものは、マトロイドとは別の文脈で行われた離散凸性に関する研究である。1960年代の後半に、伊理は電気回路における凸性の意義と役割に関する考察を物理と数理の両面から行っている。離

離散凸解析におけるネットワークフローの離散凸性の議論は、これの延長線上にある。1980年代に、KelsoとCrawfordはゲーム理論の文脈で効用関数の粗代替性に着目し、この条件下である種のゲームに均衡が存在することを示した。2000年以降の研究により、粗代替性がM凸性と等価であることが明らかとなり、離散凸解析とゲーム理論（数理経済学）との交流が始まった。また、Hajekは待ち行列理論の文脈でマルチモジュラ関数の概念を提案した。2000年以降の研究により、この概念がL凸性と等価であることが明らかとなり、離散凸解析の待ち行列や在庫管理（マルコフ決定過程）への応用が生まれている（本特集の森口氏の記事を参照）。

5. M凸関数

この節では、M凸関数の定義を示す。おそらく「定義を読んでも、何を言ってるのか わからない」の典型である。しかし、第2節で述べたように、概念の意義は、その定義から導かれる定理（特徴や機能）にある。だから、定義は軽く読み飛ばして、その定義から何が出てくるのか、を見ていただきたい。こういう定義をすると、いくつかの分野で知られていたいろいろな定理が一網打尽にできる、ということが言いたいことである。では、定義に入る。

整数格子点上で定義された実数値関数 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して、関数が有限値をとる点の集合

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid -\infty < f(x) < +\infty\}$$

を f の実効定義域と呼ぶ。以下、 $\text{dom } f \neq \emptyset$ を仮定する。ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\text{supp}^+(x) = \{i \mid x_i > 0\}, \quad \text{supp}^-(x) = \{i \mid x_i < 0\}$$

とおき、第 i 単位ベクトルを $e_i \in \{0, 1\}^n$ と表す。

関数 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき、**M凸関数** という：

$$\begin{aligned} & \text{任意の } x, y \in \text{dom } f \text{ と } i \in \text{supp}^+(x-y) \text{ に} \\ & \text{対し、ある } j \in \text{supp}^-(x-y) \text{ が存在して} \\ & f(x) + f(y) \geq f(x - e_i + e_j) + f(y + e_i - e_j). \end{aligned}$$

この条件を**交換公理**と呼ぶ。

M凸関数の実効定義域は成分和一定の超平面上にあることが上の交換公理から導かれる。そこで関数 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$\tilde{f}(x_0, x) = \begin{cases} f(x) & (x_0 = -\sum_{i=1}^n x_i) \\ +\infty & (x_0 \neq -\sum_{i=1}^n x_i) \end{cases}$$

$(x_0 \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}^n)$ で定義される関数 $\tilde{f}: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ がM凸関数となるとき、 f を**M[♯]凸関数**と呼ぶ（M[♯]は「エム・ナチュラル」と読む）。M[♯]凸関数もM凸関数と同様の交換公理で特徴づけられる。M凸関数はM[♯]凸関数であることが示される。

$n = 1$ の場合には、M[♯]凸関数と離散凸関数（条件(1)を満たす関数）は同じものになる。 $n \geq 2$ のときにも、M[♯]凸関数は凸拡張可能であり、極小性と最小性が一致する。これにより、M[♯]凸関数が離散凸関数と呼ぶに相応しいものであることがわかる。

定理 5.1 (Conv) M[♯]凸関数は凸拡張可能である。

定理 5.2 (LocalOpt) 関数 f がM[♯]凸関数のとき、点 $x \in \text{dom } f$ が f の最小点であるためには、任意の $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して

$$f(x) \leq f(x - e_i + e_j)$$

となることが必要十分である。ただし $e_0 = \mathbf{0}$ とする。

M[♯]凸関数の例としては、まず、1変数の離散凸関数 f_1, \dots, f_n を用いて

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad (3)$$

の形に書ける関数（**分離凸関数**）がある。さらに、**層凸関数**と呼ばれるものもM[♯]凸関数である。層凸関数とは、部分集合の族 \mathcal{F} で「任意の $X, Y \in \mathcal{F}$ に対して、 $X \cap Y = \emptyset$ または $X \subseteq Y$ または $Y \subseteq X$ 」という性質を持つもの（**層族**）と各 $X \in \mathcal{F}$ に対応する1変数の凸関数 φ_X によって

$$f(x) = \sum_{X \in \mathcal{F}} \varphi_X(x(X)), \quad \text{ただし } x(X) = \sum_{i \in X} x_i,$$

の形に表せる関数である。

グラフ上の重み付きマッチング（第9.1節）やネットワーク上の最小費用流からもM凸関数が現れる。組合せ最適化以外にも、M凸性はいろいろな分野に現れる。例えば、ゲーム理論（数理経済学）における粗代替性はM[♯]凹性と等価であり、代数学における安定多項式や線形代数学における行列束もM凸性と密接な関係にある。

6. L凸関数

離散凸解析のもう一方の主役であるL凸関数の定義を述べる。関数 $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が2条件：

$$g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q) \quad (p, q \in \mathbb{Z}^n),$$

$$\exists r \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}^n : g(p + \mathbf{1}) = g(p) + r$$

を満たすとき、**L** 凸関数という。ここで、 $p \vee q, p \wedge q$ は、それぞれ、成分ごとに最大値、最小値をとって得られるベクトルを表し、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ である。第 2 の条件より、**L** 凸関数は $\mathbf{1}$ 方向の線形性を持つ。

関数 $g : \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して、

$$\tilde{g}(p_0, p) = g(p - p_0 \mathbf{1})$$

($p_0 \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}^n$) で定義される関数 $\tilde{g} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が **L** 凸関数であるとき、 g を **L**[♯] 凸関数と呼ぶ (**L**[♯] は「エル・ナチュラル」と読む)。**L**[♯] 凸関数であるためには、並進劣モジュラ性：

$$g(p) + g(q) \geq g((p - \alpha \mathbf{1}) \vee q) + g(p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}))$$

($0 \leq \alpha \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{Z}^n$) を持つことが必要かつ十分である。また、**L**[♯] 凸性は、離散中点凸性：

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$$

($p, q \in \mathbb{Z}^n$) と同値である。ここで、 $\lceil \frac{p+q}{2} \rceil, \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$ は、それぞれ、 $\frac{p+q}{2}$ の各成分を切り上げ、切り捨てた整数ベクトルである。**L** 凸関数は **L**[♯] 凸関数であることが示される。

$n = 1$ の場合には、**L**[♯] 凸関数と離散凸関数 (条件 (1) を満たす関数) は同じものになる。 $n \geq 2$ のときにも、**L**[♯] 凸関数は凸拡張可能であり、極小性と最小性が一致する。これにより、**L**[♯] 凸関数が離散凸関数と呼ぶにふさわしいものであることがわかる。

定理 6.1 (Conv) **L**[♯] 凸関数は凸拡張可能である。

定理 6.2 (LocalOpt) 関数 g が **L**[♯] 凸関数のとき、点 $p \in \text{dom } g$ が g の最小点であるためには、任意の $q \in \{0, 1\}^n$ に対して

$$g(p) \leq \min\{g(p - q), g(p + q)\}$$

となることが必要十分である。

L[♯] 凸関数の例として、まず、分離凸関数 (3) がある。また、ベクトルの成分の最大値やばらつきを表す関数

$$g(p) = \max\{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

$$g(p) = \max\{p_1, p_2, \dots, p_n\} - \min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

は **L** 凸関数である。

劣モジュラ集合関数³は、**L**[♯] 凸関数と密接な関係にある。部分集合 X の特性ベクトルを $e_X = \sum_{i \in X} e_i$ とするとき、 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の集合関数 $\rho : 2^V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と関数 $g : \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ で $\text{dom } g \subseteq \{0, 1\}^n$ を満たすもの間には、 $\rho(X) = g(e_X)$ による 1 対 1 対応があるが、この対応の下で、 g が **L**[♯] 凸関数であることと、 ρ が劣モジュラであることは同値である。さらに、**L**[♯] 凸関数は劣モジュラ集合関数を上手く繋ぎ合わせたものとして特徴づけることができる。

最短路問題の双対問題 (第 9.2 節) や最小費用流問題におけるテンションを変数とする費用関数も **L** 凸性をもつ。

7. 共役性

整数値関数 $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ の離散ルジャンドル変換を

$$f^\bullet(p) = \sup\{\langle p, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{Z}^n),$$

$$h^\circ(p) = \inf\{\langle p, x \rangle - h(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{Z}^n)$$

と定義する。ここで $\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ (内積) である。**M** 凸と **L** 凸はこの変換に関して表裏の関係にある。

定理 7.1 (DualPair) 離散ルジャンドル変換 : $f \mapsto f^\bullet = g, g \mapsto g^\bullet = f$ は、整数値 **M**[♯] 凸関数 f と整数値 **L**[♯] 凸関数 g のあいだの 1 対 1 対応を与える。さらに、 $f^{\bullet\bullet} = f, g^{\bullet\bullet} = g$ が成り立つ。整数値 **M** 凸関数と整数値 **L** 凸関数のあいだにも同様の 1 対 1 対応がある。

表 2 に、マトロイド関連の共役性の歴史を簡単に整理した。Whitney がマトロイドの概念を定式化したときに、すでに、交換公理と劣モジュラ関数の等価性が論じられた。この等価性は 1960 年代にはポリマトロイドへと一般化された。これは、いわば、凸多面体とその支持関数との共役性にあたる。その後、真の意味で非線形関数である付値マトロイドが導入されたが⁴、それに対応する共役概念が存在しない時期 (表 2 の $\|\times\|$) がある。そして、付値マトロイドが **M** 凸関数へと一般化されたことにより、その共役概念が **L** 凸関数という形で明確になった。

8. 双対性

M 凸関数や **L** 凸関数に対して、最大最小定理や離散

³ 不等式 $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$ が任意の X, Y に対して成り立つとき、 ρ を劣モジュラ関数という。

表 2 離散共役性の歴史

1935	マトロイド基族	↔	階数関数
1970	ポリマトロイド	↔	劣モジユラ関数
	付値マトロイド	×	Lovász 拡張
1998	M 凸関数	↔	L 凸関数
2000	M [♯] 凸関数	↔	L [♯] 凸関数

分離定理などの離散双対性が成り立つ. $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$, $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ とし, $\text{dom } f \cap \text{dom } h \neq \emptyset$ または $\text{dom } f^\bullet \cap \text{dom } h^\circ \neq \emptyset$ を前提として仮定する.

離散凸解析の一つの重要な結果として, 次のフェンシェル型双対定理が成り立つ. この定理はマトロイド理論で知られる Edmonds の交わり定理の一般化となっている.

定理 8.1 (MinMax) $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$ を M[♯] 凸関数, $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ を M[♯] 凹関数 (すなわち, $-h$ が M[♯] 凸関数) とすると,

$$\inf\{f(x) - h(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) \mid p \in \mathbb{Z}^n\}$$

が成り立つ.

上に示した双対定理と等価な事実として, M 凸関数, L 凸関数のそれぞれに対する離散分離定理が成り立つ. 定理 8.2 は M 分離定理, 定理 8.3 は L 分離定理と呼ばれる. ここで, M と L を混ぜた形の分離定理 (M[♯] 凸関数と L[♯] 凹関数など) は成立しないことに注意が必要である.

定理 8.2 (Separ) $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を M[♯] 凸関数, $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ を M[♯] 凹関数とする. すべての $x \in \mathbb{Z}^n$ に対して $f(x) \geq h(x)$ ならば, ある $\alpha^* \in \mathbb{R}$, $p^* \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

が成り立つ. さらに, f, h が整数値関数のときには, $\alpha^* \in \mathbb{Z}$, $p^* \in \mathbb{Z}^n$ とれる.

定理 8.3 (Separ) 定理 8.2 において, f を L[♯] 凸関数, h を L[♯] 凹関数に置き換えた命題も成立する.

以上が離散凸解析の理論の骨格である. 第 2 節で線形計画について列挙した定理 (Conv, LocalOpt, DualPair, MinMax, Separ) に対応する定理がすべて揃っ

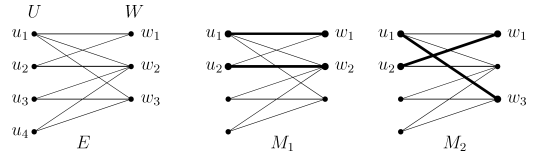


図 4 2部グラフとマッチング

ている. このことは, 最適化の理論としての完備性 (のようなもの) を表しており, それはそれでよいのであるが, もう一つ気にすべきことは, 理論の守備範囲の問題である. つまり, 応用可能性がどれほどあるのか, という問題である. 次に, このことに移ろう.

9. 離散凸解析の適用範囲

非線形最適化においては, 凸解析は凸計画問題に対して理論的基礎を与えるだけでなく, 凸ではない最適化問題に対しても (凸関数による近似などを通じて) 間接的に役立っている. これと同様のことが (原理的には) 離散凸解析にも期待できる. ここでは, 直接的に離散凸解析の範疇でとらえられる離散最適化問題に限って, 基本的な例を述べよう. より広い範囲への拡張は, 現在進行中の研究課題である.

9.1 マッチング問題

グラフの重み付きマッチングから M 凸関数が生じる. 2部グラフ $G = (U, W; E)$ を考える (図 4 左参照). 枝集合の部分集合 M がマッチングであるとは, M に含まれる枝の端点がすべて異なることをいう. 枝の部分集合 M に含まれる枝の端点の全体を ∂M と表す.

各枝 $e \in E$ に対してコスト $c(e) \in \mathbb{R}$ が与えられているとして, マッチング M のコストを $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ と定義し, さらに, U 上の集合関数 $F: 2^U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を

$F(X) = \min\{c(M) \mid M \text{ はマッチング, } U \cap \partial M = X\}$ ($X \subseteq U$) と定義する. U の部分集合 X を指定したとき, U 側の端点集合が X となるマッチングの最小コストが $F(X)$ である.

例えば, 図 4 のグラフで $X = \{u_1, u_2\}$ とすると, 中央と右に示した $M_1 = \{(u_1, w_1), (u_2, w_2)\}$, $M_2 = \{(u_1, w_3), (u_2, w_1)\}$ に対して $U \cap \partial M_1 = U \cap \partial M_2 = X$ であるが, このほかにも, $M_3 = \{(u_1, w_2), (u_2, w_1)\}$, $M_4 = \{(u_1, w_3), (u_2, w_2)\}$ の U 側の端点集合は X であるから, $F(X) = \min\{c(M_1), c(M_2), c(M_3), c(M_4)\}$ である.

この関数 F は M[♯] 凸関数である. より正確には, 部分集合 X の特性ベクトル e_X を用いて関数 F を

$$F(X) = f(e_x) \quad (X \subseteq U) \quad (4)$$

によって関数 $f: Z^U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と同一視するとき、関数 f が M^{\sharp} 凸関数になる。マッチングに関する基本的な手法である交互道による入れ替えが、 M^{\sharp} 凸関数の交換公理に対応している。

9.2 最短路問題

有向グラフ $G = (V, E)$ と整数値の枝長 $\ell(e)$ ($e \in E$) が与えられたとき、始点 s からすべての頂点への最短路を同時に求める問題を考える。この最短路問題における整数値ポテンシャルの集合

$$S = \{p \in Z^V \mid p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) \ (\forall (u, v) \in E)\}$$

の上で定義された線形関数

$$g(p) = \sum_{v \in V} (p(s) - p(v)) \quad (p \in S)$$

は L 凸関数である ($p \notin S$ に対しては $g(p) = +\infty$ とおく)。関数 g の最小値を与える $p_* \in S$ に対し、 $p_*(v) - p_*(s)$ の値は始点 s から頂点 v への最短路長に一致する。さらに、この L 凸関数 g を最小化する最急降下法は、ダイクストラ法等価になる。

9.3 資源配分問題

資源が 1 種類で離散的な場合の資源配分問題は次のように定式化される：

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{制約条件} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = r, \\ & x_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \text{ は非負整数.} \end{aligned}$$

ここで、 n は資源の配分先である活動の数を表し、 r は配分する資源の総数を表す。また、関数 f_i は活動 i に配分された資源量 x_i に対する評価値を表すとし、式 (1) の離散凸関数と仮定する。いわゆる議員定数配分問題はこの形の問題となる。この問題の目的関数 $f(x)$ は、制約条件を満たさない x に対して $+\infty$ と約束すれば、 M 凸関数である。

さらに、上の資源配分問題に以下のような制約を付加した問題もそれぞれ M 凸関数の最小化問題となる。

- 上界制約：非負ベクトル $u \in Z^n$ が与えられたとき、 $x_i \leq u_i$ ($\forall i = 1, 2, \dots, n$) と記述される制約。
- 一般上界制約：集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割を成す m 個の非空集合 X_1, X_2, \dots, X_m および非負整数 u_1, u_2, \dots, u_m によって $x(X_j) \leq u_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) と記述される制約。
- 入れ子制約： $\emptyset \neq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_m$ を満たす m 個の集合 X_1, X_2, \dots, X_m および非負整数 u_1, u_2, \dots, u_m によって $x(X_j) \leq u_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) と記述される制約。
- 木制約：層族 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ および非負整数 u_1, u_2, \dots, u_m によって $x(X_j) \leq u_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) と記述される制約。

上記のような資源配分問題に対しては、離散凸解析の結果を利用して、従来よりも効率のよいアルゴリズムが設計されている。

10. おわりに

M 凸関数と L 凸関数は、共役性や双対性といった数学的に美しい構造を持っているだけでなく、計算の観点からも扱いやすい対象である。アルゴリズムとソフトウェアについては [6] や本特集号の塩浦氏、土村氏の記事を参照されたい。なお、「離散凸解析」全般については [3, 4, 5] に解説されており、劣モジュラ関数の理論との関係は [1] に、ゲーム理論への応用は [7] に詳しい。

参考文献

- [1] S. Fujishige, Submodular Functions and Optimization, 2nd ed., Elsevier, 2005.
- [2] K. Murota, Discrete convex analysis, Mathematical Programming, **83**, pp. 313–371, 1998.
- [3] 室田一雄, 離散凸解析, 共立出版, 2001.
- [4] K. Murota, Discrete Convex Analysis, SIAM, 2003.
- [5] 室田一雄, 離散凸解析の考えかた, 共立出版, 2007.
- [6] 室田一雄, 塩浦昭義, 離散凸解析と最適化アルゴリズム, 朝倉書店, 2013.
- [7] 田村明久, 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店, 2009.