一般化ジャンケン

伊藤　大雄

フランスには石・紙・鋏に壷という手が加わった 4 手のジャンケンが存在する．壷は石と鋏に勝ち紙に負ける．しかしよく考えるとこのジャンケンは変だ．なぜならば石を出すより壷を出すほうが得なので，石の存在価値がなく，結局「壷・紙・鋏」の 3 手のジャンケンになってしまう．われわれはこのような無駄な手のないジャンケンとはどういうものか，さらには面白いジャンケンとはどういうものかを考察し，手数 n に対して一般的な結果を与えた．

キーワード：ジャンケン，有向グラフ，トーナメント，ムーングラフ

1.　はじめに

1.1　ジャンケン

ジャンケンを知らない日本人はいないと思うが，一応説明しておく．3 名以上でも行うことができるが，本稿では 2 名でのゲームに限定して考える．石（グー），鋏（チョキ），紙（パー）の 3 種類の手があり，「じゃんけんぽん」などという掛け声とともに，プレイヤーはおのおの好きな手を両者同時に出す．手はすべて片手で表現でき，石は 5 本すべての指を握り込んだ形であり，鋏は人差し指と中指を伸ばして他の 3 本の指は握った形[1]，紙は 5 本すべての指を伸ばして手を開いた形である．石は鋏に勝ち，鋏は紙に勝ち，紙は石に勝つ．両者が異なる手を出せば必ず勝負がつき，同じ手を出した場合は「あいこ」と呼ばれ引き分けである．

ジャンケンのルールは図 1 のように有向グラフを使って表現できる．それぞれの手を頂点で，2 頂点間の勝ち負けを，勝つ頂点から負ける頂点へ向かう有向辺を付与することで表現している．

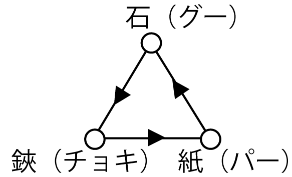

図 1　ジャンケンの有向グラフ表現

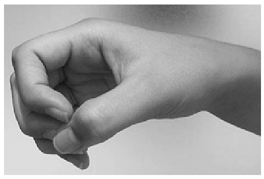

図 2　壷

少なくとも日本で育ったならば，これまで一度もジャンケンをしたことがない，という人は皆無だろう．しかし欧米ではジャンケンは “rock-paper-scissors” と呼ばれ一応認知されているが，日本ほど一般的ではない．彼らはコイントスをジャンケンの代用としているからである．しかしジャンケンは，手軽にでき，技量にほとんど左右されず，さらにコイントスのように道具がいるわけでもないこともあって，たいへん重宝なゲームと言える．そのため，日本国内はもちろん世界中にもジャンケンあるいはその類型が存在する [1]．

1.2　ジャンケンの類型

例えば国内だけでも「蛇，蛙，ナメクジ」を使う「蟲拳」，「庄屋，鉄砲（猟師），狐」を使う「狐拳」（あるいは「庄屋拳」），「和藤内（わとうない），虎，和藤内の母」を使う「虎拳」[2]といったバリエーションがあり[3]，江戸時代などに遊ばれた．

このほかにもジャンケンと同型のものは国外にも多数あるが，4 種類以上の手を使うものも存在する．例えば，フランスなどには通常のジャンケンにもう一つ壷（図 2 参照）を加えたジャンケンが存在する．壷は石と鋏には（沈めてしまうので）勝ち，紙には（蓋をされてしまうので）負ける．これを**フランス式ジャン**

いとう　ひろお
電気通信大学 大学院情報理工学研究科
〒 182–8585 東京都調布市調布ヶ丘 1–5–1
E-mail: itohiro@uec.ac.jp

[1] 親指と人差し指を伸ばすやりかたもある．
[2] 近松門左衛門の浄瑠璃『国性爺合戦』（こくせんやかっせん）を題材にしている．
[3] 勝ち負けはいずれも「石，鋏，紙」と同型．なお，狐拳や虎拳は，手先ではなく体全体で表現するもので，子供の遊びというより，お座敷の遊びであった．

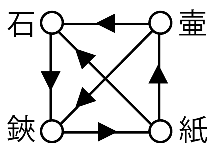

図 3　フランス式ジャンケン

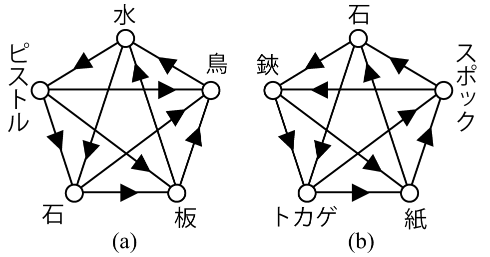

図 4　5 手のジャンケン：(a) マレーシアのワン・ツ・ザン　(b) スポックジャンケン

ケンとここでは呼ぶことにしよう．これは図 3 の有向グラフで表現できる．

5 手のジャンケンも存在する．マレーシアには「鳥，石，ピストル，板，水」を使った「ワン・ツ・ザン」と呼ばれるジャンケンがある．また，「石，鋏，紙」に「トカゲ (Lizard)」と「スポック (Spock)[4]」を加えたジャンケンがウェブ上に紹介されていた．それぞれの勝ち負けは図 4 のとおりである．

1.3　ジャンケンとトーナメント

以上で見られるようにジャンケンの類型は有向グラフで表現できる．異なる手の間には勝ち負けの関係が通常は設定されているので[5]，それを表現する有向グラフは任意の 2 頂点間に必ず片方向の有向辺が存在することになる．このような有向グラフのことをトーナメントと呼ぶ．

定義 1.　有向グラフ $G=(V,E)$（ただし V は頂点集合で $E \subseteq V \times V$ は（有向）辺集合）で自己ループをもたず（すなわち $(x,x) \notin E, \forall x \in V$），任意の異なる頂点の対 $x,y \in V, x \neq y$ に対して $|\{(x,y),(y,x)\} \cap E| = 1$ であるもののことを**トーナメント (tournament)** と呼ぶ．頂点数 n のトーナメントのことを n-トーナメントと呼ぶこともある．　□

以後（異なる 2 手の間に必ず勝ち負けが設定されているような）ジャンケンの類型のことを単にジャンケンと呼ぶことにする．ジャンケンが存在すれば，それに対応するトーナメントが存在することになるが，逆に任意のトーナメントに対して，それに対応するジャンケンが存在するとも言える．

しかしそのように定義されたジャンケンがすべてゲームとしてまともに成立しているかと問えば，その答えは否定的である．単純な例として，1 頂点からなる自明なトーナメントは，手が一つしかないので，明らかに使い物にならないが，このような自明なトーナメントを除外したとしても，まだジャンケンとしては不都合なトーナメントが存在する．

例えば 2 頂点からなる（同型性の下で唯一の）トーナメント $(\{x,y\},\{(x,y)\})$ は片方の手がもう片方の手に必ず勝つことがわかっているので，誰でもその強いほうの手（この例では x）を出すことになり，弱いほうの手（この例では y）は存在しないのと同じであり，結局 1 頂点の自明なトーナメントと同じになってしまう．

1.4　疑問の発生

このようにトーナメントが縮退してしまうことはほかのもっと頂点数の多いトーナメントでも起こりうる．例えば前述のフランス式ジャンケン（図 3）の場合，実は同じことが起こっている．つまり，この例では石と壷の関係を見ると，両者とも鋏に勝ち，紙に負け，そして壷は石に勝つ．つまりどんな状況でも石を出すより壷を出すほうが有利になりこそすれ不利になることはない．したがって，石は使う必要がなくなり，結局は「壷，紙，鋏」の 3 手となり，これは通常のジャンケンと同型（石を壷と言い換えたもの）である．著者は若いころ，あるフランス人からこのジャンケンの存在を聞いたとき，この疑問がすぐに浮かんだ．そしてその男にその疑問を伝え，なぜそんなジャンケンが淘汰されずに伝えられているのか聞いたが，彼も理由は知らないとのことだった[6]．

その次に浮かんだ疑問は，では 4 手でこのように縮退してしまわないようなジャンケンは構成可能だろうか？ということだった．そうしてこの研究は始まった．「無駄な手」の定義をし，それの存在しない必要十分条件を導き，無駄な手の存在しない n 手のジャンケンが存在する n の条件を得た．さらに，「面白い」ジャンケンとは何かを独自の基準で定義し，その定義の下で最も面白いジャンケンの構成法を与え，それ以外には存在しないことも示した．以下でそれらについて解説する．なおこれよりジャンケンと対応するトーナメントを必要がない限り特に区別せずに用いる．

4　スタートレックのミスター・スポックのことと思われる．
5　そうでないものも例外的に存在する [1]．

6　あまり深い理由はないのであろう．これはこれで（数学ではなく）心理学的，あるいは文化人類的研究対象になるかもしれない．

2. 「無駄な手」のないジャンケンの考察

2.1 無駄な手の定義とその性質

フランス式ジャンケンのように縮退してしまう原因は「無駄な手」が存在するからである．ここで「無駄な手」とは以下のように定義することができる．

定義 2. トーナメント $G = (V, E)$ において，ある 2 頂点 $x, y \in V$ が存在し，$(x, y) \in E$ であり，かつ，任意の $z \in V - \{x, y\}$ に対して，$(y, z) \in E$ ならば $(x, z) \in E$ であるとき，x は y に**優越する**といい，y は**無駄**な手であるという．無駄な手の存在しないトーナメントを**効率的**であるという． □

トーナメントが効率的であることはグラフの直径の性質で置き換えることができる．グラフの頂点対 $x, y \in V$ に対し，x から y への距離 $\mathrm{dist}(x, y)$ は x を始点，y を終点とする最短路長で定義され，グラフ G の直径は

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y\in V} \mathrm{dist}(x, y)$$

で与えられる．

補題 1. トーナメント $G = (V, E)$ について，以下の 3 条件は同値である．

1. 効率的である．
2. 直径が 2 以下である[7]．
3. 任意の有向辺 $(x, y) \in E$ に対して，それを含む長さ 3 の有向閉路が存在する． □

証明は「効率的」の定義からほぼそのまま得られるので省略する．

2.2 少ない手数のジャンケンに対する考察

補題 1 を用いれば，頂点数を固定したトーナメントで効率的でないものを簡単に判別・除外できるため，頂点数 n が小さい場合には簡単な列挙法で効率的なトーナメントの存在を調べることができる．その結果，4-トーナメントについては，効率的なものは存在しないことが簡単な検証で確認できる（証明は省略する）．すなわち，最初の疑問に対する答えは以下のものとなる．

> 手数 4 では，無駄な手の無いジャンケンは構成できない．

当然，ほかの頂点数の場合にも確認したくなる．2-トーナメントは前述のように（同型なものを除いて）一種類しかなく，それは効率的ではない．効率的な 3-トーナメントは，グー・チョキ・パーのジャンケンに対応する長さ 3 の有向閉路のみである．効率的な 5-トーナメントは，図 5 の二種類存在する（これ以外には存在しない）．なお，(a) は図 4 (b) のものと同型である．

[7] なお，直径が 2 より小さいトーナメントは頂点数 1 の自明なトーナメントしか存在しない．このトーナメントは前述のように実際のジャンケンとしては役に立たないが，無駄な手は存在しないので，「効率的」の定義には反していないのである．

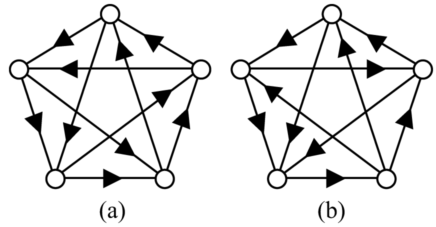

図 5 効率的な 5-トーナメントのすべて

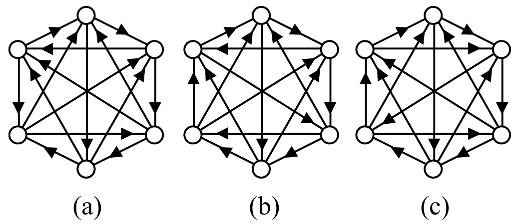

図 6 効率的な 6-トーナメントのすべて

2.3 一般的性質

ここまでの結果をまとめると，奇数頂点には効率的なものが存在し，偶数頂点だと存在しないので，それ以降もそうかと思うと効率的な 6-トーナメントは，図 6 の 3 種類が存在するのである（これ以外には存在しない）．

実はこれ以上の頂点数に対しては，効率的なトーナメントが必ず存在することが証明できる．

定理 1. 自然数 n に対し，効率的な n-トーナメントが存在する必要十分条件は $n \neq 2, 4$ である．

証明 $n \leq 6$ に対してはすでに証明済みである．それ以上の n について，帰納法で証明する．効率的な n-トーナメント $G_n = (V, E)$ が存在するとき，次の方法で $(n+2)$-トーナメント $G_{n+2} = (V', E')$ を構成する（図 7 参照）．x, y を V に属さない新たな 2 頂点とし，

$$V' := V \cup \{x, y\},$$
$$E' := E \cup \{(x, y)\} \cup \{(v, x), (y, v) \mid v \in V\}$$

とする．

G_{n+2} が効率的であることを示す．そのためには補題 1 の条件 3 を満たすことを示せばよい．G_n は効率的なので，E に属している辺は条件を満たしており，新たに追加した辺 (x, y) や $(v, x), (y, v), \forall v \in V$ もその作成法から，長さ 3 の有向閉路 $\langle v, x, y, v\rangle$ に含まれている．以上から G_{n+2} は効率的である．

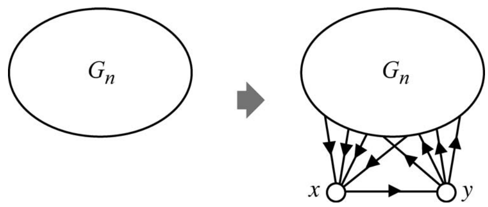

図 7　G_n から G_{n+2} を作る方法

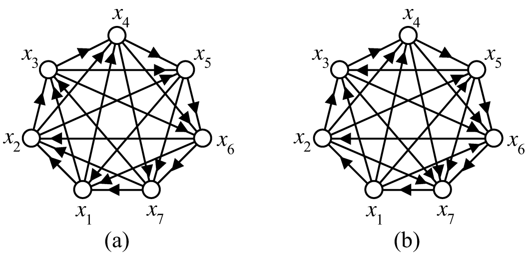

図 8　効率的な 7-トーナメントの例

$n = 5, 6$ の場合に効率的な n-トーナメントは存在するので，帰納法からすべての $n \geq 7$ に対して題意は証明される．　□

3. 面白いジャンケンの考察

3.1 ジャンケンを評価するひとつの尺度

頂点数 n が増えれば効率的な n-トーナメントの数は増える．しかしジャンケンとして考えたときにそれらの性質は互いに異なっている．例えば図 8 の 2 つのトーナメントの表すジャンケンを見てみよう．(a) のジャンケンではすべての手が 3 つの手に勝ち 3 つの手に負ける（これを 3 勝 3 敗と表現することにする）．

しかし (b) のジャンケンでは 3 勝 3 敗なのは x_3, x_4, x_5 の 3 つだけで，x_1 が 5 勝 1 敗，x_2 が 4 勝 2 敗，x_6 が 2 勝 4 敗，x_7 が 1 勝 5 敗とばらついている．実際にジャンケンをする場合には，こういったバラツキが面白さに影響を与えると思われる．

つまり (a) のジャンケンの場合，すべての手が対称的なので，（相手の好みなどといった特別な情報がなければ）どれを出しても同じである．しかし (b) のジャンケンの場合は，最強に思われる x_1 を出したいが，逆にそれを見越して x_7 を出して大穴を狙う，というような戦略も考えられる．実際，x_7 で x_1 を負かせれば爽快であろう．

そこで，われわれはジャンケンの面白さを手の勝ち負けの差のバラツキで評価することにした．

定義 3.　トーナメント $G = (V, E)$ の頂点 $x \in V$ に対し，出次数と入次数を $\deg^+(x)$ と $\deg^-(x)$ とする．すなわち

$$\deg^+(x) := |\{y \in V \mid (x, y) \in E\}|,$$
$$\deg^-(x) := |\{y \in V \mid (y, x) \in E\}|$$

である．トーナメント G のバラツキ $\mathrm{irr}(G)$ を次のように定義する．

$$\mathrm{irr}(G) := \sum_{x \in V} (\deg^+(x) - \deg^-(x))^2$$

3.2 「面白さ」最大のジャンケンとは

これに対しわれわれは以下の定理を証明した．

定理 2.　正整数 $n \neq 2, 4$ に対し，バラツキが最大の効率的 n-トーナメントの集合 M_n は以下で定義されるものである．

(1) M_3 の要素は唯一の効率的 3-トーナメント．
(2) M_6 の要素は図 6 で示した 3 つの効率的 6-トーナメント．
(3) その他の n（すなわち 5 以上の奇数もしくは 8 以上の偶数）に対する M_n：M_{n-2} に属する任意のトーナメント G_{n-2} に定理 1 の方法で 2 頂点を加えたものの集合．　□

M_n は Moon [5] によって定義されたトーナメント集合に等しく，ムーントーナメントと呼ばれている．

3.3 ノミトノジャンケン

定理 2 より，バラツキ最大の n-トーナメントは（同型性の下では）n が奇数のときは 1 つずつしかなく，6 以上の偶数のときは 3 つずつしかない．$n = 3$ のときは通常のジャンケンしかなく，これのバラツキはゼロである．$n = 5$ のときの唯一のそれは図 9 で示した「ノミトノジャンケン」である．これは筆者の提案したもので，通常のジャンケンに石と紙と鋏に勝つ「殿」という手と石と紙と鋏に負ける「蚤」という手（そして蚤は殿には勝つ）を加えたものである．これは同時にバラツキが正である効率的なジャンケンのうちで，手

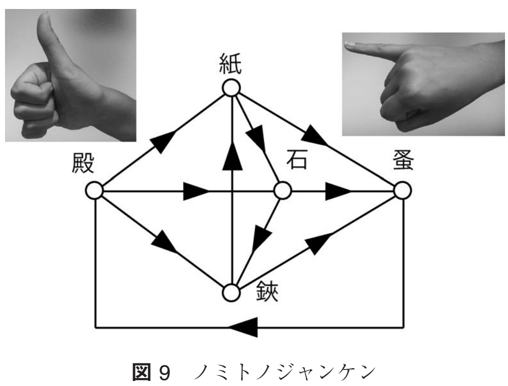

図 9　ノミトノジャンケン

の数が最小のものでもある．世界中にジャンケンの類型は多数存在するが [1, 7]，これと同型のジャンケンは不思議なことにまだ確認できていない．

4. まとめ

本稿ではジャンケンの一般化法について述べた．ここでは，異なる手の間には必ず勝ち負けが定義されているもののみを扱ったが，世界には稀にそうでないものも存在する [1]．そういったものにこの理論を拡張することは今後の課題として考えられる．また，ジャンケンのよしあしを手の勝ち負けのバラツキで評価したが，それ以外の指標もありえるだろう．また，多人数で行う場合の特殊事情を考慮しても面白いかもしれない．

なお，ここで示した結果は，結果自体は 1995 年に得られていたが，そのときに，主定理（定理 2）の証明が，Moon [5] の結果を利用してわりと簡単に導けることがわかって，論文化を見送っていた．しかし最近になって MIT の Erik Demaine 教授から論文化を勧められ，そうすることにし，近いうち（1 年以内には）出版される予定である．それ以前にご覧になりたい方は，筆者に直接連絡されたい．

参考文献

[1] 大林太良，岸野雄三，寒川恒夫，山下晋司（編），民族遊戯大事典，大修館書店，1998.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, Graphs & Digraphs (5 th Edition), CRC Press, 2011.

[3] D. C. Fisher and J. Ryan, Tournament games and positive tournaments, *Journal of Graph Theory*, **19** (1995), 217–236.

[4] J. W. Moon, Topics on Tournaments, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

[5] J. W. Moon, Uncovered nodes and 3-cycles in tournaments, *Australasian Journal of Combinatorics*, **7** (1993), 157–173.

[6] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos and V. Vazirani (Eds.), Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press, 2007.

[7] Rock-paper-scissors, in Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Rock-paper-scissors