Fast Deterministic Algorithms for Matrix Completion Problems

相馬　輔

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
（現所属：東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）
指導教員：岩田　覚 教授

1. はじめに

成分に変数 $x_1,\ldots,x_n$ を含む行列 $A(x_1,\ldots,x_n)$ に対し，変数に値 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を代入して得られる行列 $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ の階数を最大化する問題を**行列補完**という．変数を含む行列や行列補完はさまざまな組合せ最適化問題を記述でき，理論的にも応用的にも重要な問題である．例えば，最大マッチング問題，組合せ剛性，ネットワーク符号化，回路解析への応用などが挙げられる．

行列補完の難しさは，値 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を選ぶ体の位数に依存する．体の位数が行列のサイズや変数の数 n に対し十分に大きいという仮定のもとでは，Lovász [7] の多項式時間乱択アルゴリズムによって，任意の行列に対する行列補完を解くことができる．一方，決定性アルゴリズムは特殊な形の行列に対する行列補完の場合にしか知られていない．また，一般の体上での行列補完は NP 困難であることが知られている [4].

本論文では，次の 3 種類の行列補完を考える．

階数 1 の行列による行列補完　$A = B_0+x_1B_1+\cdots+x_nB_n$ に対する行列補完．ただし，$B_1,\ldots,B_n$ は階数 1 の行列である．

混合歪対称行列補完　上三角部分に各変数が 1 回しか現れないような歪対称行列に対する行列補完.

階数 2 の歪対称行列による歪対称行列補完　$A = B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_nB_n$ に対する行列補完．ただし，$B_0,B_1,\ldots,B_n$ は歪対称行列で，$B_1,\ldots,B_n$ は階数が 2.

階数 1 の行列による行列補完については，Ivanyos–Karpinski–Saxena [6] による $O(m^{4.37}n)$ 時間アルゴリズムがすでに知られている（ここで m は A の行サイズと列サイズのうち大きいほうである）．混合歪対称行列補完と階数 2 の歪対称行列による歪対称行列補完については，多項式時間の決定性アルゴリズムは知られていない.

2. 本論文の結果

本論文では，上の 3 種類の行列補完に対して多項式時間決定性アルゴリズムを与えた．まず，階数 1 の行列による行列補完に対して $O((m+n)^{2.77})$ 時間アルゴリズムを与えた．本アルゴリズムは，Ivanyos–Karpinski–Saxena [6] のアルゴリズムに比べて，$n = O(m^{2.46})$ である限り高速である．また，階数 1 の行列による行列補完に対する最大最小定理も与えた．この定理は，Lovász [7] の結果の一般化である.

混合歪対称行列補完と階数 2 の歪対称行列による歪対称行列補完に対しては，それぞれ $O(m^4)$，$O((m+n)^4)$ 時間アルゴリズムを与えた（ここで m は A のサイズである）．どちらのアルゴリズムも，これらの問題に対する初の多項式時間決定性アルゴリズムである.

また，行列補完アルゴリズムの応用として，ネットワーク符号化における，**線形相関をもつ複数ソースマルチキャスト問題**を扱った．上で与えた階数 1 の行列による行列補完のアルゴリズムを適用することで，同問題に対する線形ネットワーク符号が多項式時間で求められることを示した.

3. 階数 1 の行列による行列補完

アルゴリズムの基本的なアイデアは，混合行列に対する行列補完への帰着である．**混合行列** とは，行列中に各変数が 1 回しか現れないような行列のことである．混合行列に対する行列補完については，Harvey–Karger–Murota [3] による $O(m^{2.77})$ 時間アルゴリズムが存在する（m は混合行列の行サイズと列サイズのうち大きい方）.

本論文では，階数 1 の行列による行列補完の入力 $A = B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_nB_n$ （ただし $B_1,\ldots,B_n$ は階数 1）に対して，行列補完の最適解が元の問題の最適解と一致するような混合行列 $\tilde{A}$ を具体的に構成することによって，元の問題を混合行列に対する行列補完に帰着した．$\tilde{A}$ のサイズは $O(m+n)$ であるので，

Harvey–Karger–Murota [3] のアルゴリズムを適用して $O((m+n)^{2.77})$ 時間アルゴリズムを得ることができる．また，混合行列 $\tilde{A}$ の構造を解析することにより，階数 1 の行列による行列補完の最大最小定理も示すことができる．

4. 混合歪対称行列補完

混合歪対称行列とは，上三角部分において各変数が 1 回しか現れないような歪対称行列のことである．混合歪対称行列補完のアルゴリズムでは，歪対称行列の組合せ的性質と線形デルタ被覆に対する Geelen–Iwata–Murota [2] のアルゴリズムを利用する．

線形デルタ被覆とは，同じサイズの歪対称行列 A_1, A_2 に対し，主小行列 $A_1[F_1], A_2[F_2]$ がともに正則であるような組 F_1, F_2 の中で $|F_1 \triangle F_2|$ が最大となるものを求める問題である．混合歪対称行列の組合せ的な構造は線形デルタ被覆と密接に関連しており，例えば混合歪対称行列の階数は線形デルタ被覆を 1 回解くことで求められることが知られている [8]．

本論文では，線形デルタ被覆の最適解の情報から，入力の混合歪対称行列の構造を解析することで，変数に代入する値を逐次的に決定していくアルゴリズムを与えた．線形デルタ被覆に対する $O(m^4)$ 時間アルゴリズム [2] を使用すると，本アルゴリズムは $O(m^4)$ 時間で動作することが証明できる．

5. 階数 2 の歪対称行列による歪対称行列補完

階数 1 の行列による行列補完の場合と同様に，混合歪対称行列補完への帰着がアイデアである．階数 2 の歪対称行列による歪対称行列補完の入力 $A = B_0 + x_1 + \cdots + x_n B_n$（ただし $B_0, B_1, \ldots, B_n$ は歪対称行列，$B_1, \ldots, B_n$ は階数 2）に対して，最適解が一致するような混合歪対称行列 $\tilde{A}$ を具体的に構成することにより，元の問題が混合歪対称行列補完に帰着できることを示した．$\tilde{A}$ に対し，上記の混合歪対称行列補完アルゴリズムを適用することで $O((m+n)^4)$ 時間で最適解を求めることができる．

6. ネットワーク符号化への応用

ネットワーク符号化は Ahlswede ら [1] により提案された，新しいネットワーク通信モデルである．従来の通信モデルとは異なり，中間ノードでのパケットへの演算を許すことでより効率的な通信を行うことができ，

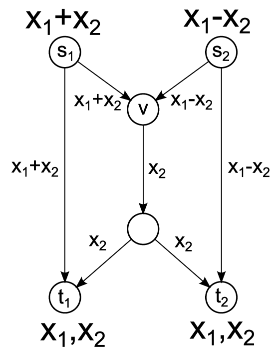

図 1 線形相関を持つ複数ソースマルチキャスト問題の例

次世代の通信モデルとして注目されている．線形相関をもつ複数ソースマルチキャスト問題は，Ho ら [5] により提案されたネットワーク符号化の問題の 1 つで，互いに線形な相関をもつ情報源がネットワーク上にあるとき，それらの情報源のメッセージすべてを受信ノードまで送信するようなネットワーク符号を求める問題である．

本論文では，線形相関をもつ複数ソースマルチキャスト問題の標準的な定式化に基づいて，本問題を階数 1 の行列による行列補完に帰着した．階数 1 の行列による行列補完アルゴリズムを使うことで，線形ネットワーク符号を多項式時間で求められることを示した．

参考文献

[1] R. Ahlswede, N. Cai, S.-Y. R. Li, and R. W. Yeung, "Network information flow," *IEEE Transactions on Information Theory*, **46**, 1204–1216, 2000.
[2] J. F. Geelen, S. Iwata, and K. Murota, "The linear delta-matroid parity problem," *Journal of Combinatorial Theory*, **B88**, 377–398, 2003.
[3] N. J. A. Harvey, D. R. Karger, and K. Murota, "Deterministic network coding by matrix completion," *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 489–498, 2005.
[4] N. J. A. Harvey, D. R. Karger, and S. Yekhanin, "The complexity of matrix completion," *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm*, 1103–1111, 2006.
[5] T. Ho, M. Médard, R. Koetter, D. R. Karger, M. Effros, J. Shi, and B. Leong, "A random linear network coding approach to multicast," *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 4413–4430, 2006.
[6] G. Ivanyos, M. Karpinski, and N. Saxena, "Deterministic polynomial time algorithms for matrix completion problems," *SIAM Journal on Computing*, **39**, 3736–3751, 2010.
[7] L. Lovász, "On determinants, matchings and random algorithms," *Fundamentals of Computation Theory*, 565–574, 1979.
[8] K. Murota, *Matrices and Matroids for System Analysis*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 2009.