2種類の図形によるタイリング生成 ―図形の接合を用いたアルゴリズムの構築―

川出　静

名古屋大学工学部物理工学科
（現所属：名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻）
指導教員：今堀慎治 准教授

1. はじめに

タイリングとは，さまざまな図形によって平面を隙間も重なりもなく敷き詰めたものである．オランダの版画家 M. C. Escher は，このタイリングを用いて芸術的な作品を数多く残した．Escher の作品のようなタイリングを実際に作ろうとしても，芸術的なセンスが必要となり，非常に難しいことがわかる．そこで，誰でも簡単に作れるように，計算機を用いて自動的にタイリングを生成しようという問題が生まれる．この問題は Escherization Problem（エッシャー風タイリング問題）と呼ばれる [1].

タイリングには 1 種類の図形を用いたものや，数種類の図形を用いたものが存在する．1 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題については近年盛んに研究されてきた．小泉ら [2] はエッシャー風タイリング問題を扱いやすい最適化問題へと定式化を行い，その最適化問題の解を解析的に求めた．また，酒井 [3] は小泉らの解法を改善する手法を提案した．それにより，質の良い解が得られることが確認されている．

しかし，2 種類以上の図形に対するエッシャー風タイリング問題についてはあまり研究されていない [4]. そこで，本論文では 2 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題についてアプローチを試みる．さまざまな方法が考えられるが，本論文では，良い結果が得られている先行研究を利用することを考え，図形の接合を用いた方法を提案する．

2. エッシャー風タイリング問題

1 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題を定義し，この問題に対する既存解法を説明する．

1 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題は，ある図形 S が与えられたとき，「図形 T は平面を敷き詰めることができる」，「図形 T はできるだけ S に近い形である」という 2 つの条件を満たす図形 T を見つける問題である．この問題を最適化問題として記述すると，

最小化　$d(S, T)$

制約条件 図形 T は平面を敷き詰めることができる

となる．ここで，d は図形同士の距離である．

小泉らは，図形を点画として与え，図形同士の距離としてプロクラステス距離を用い，敷き詰め可能の条件としては，数学的に扱いやすい isohedral tiling と呼ばれるタイリングを用いている．目的関数と制約条件をそれぞれ定式化すると，行列の最大固有値と固有ベクトルを求める問題に帰着され，その解は解析的に求められる．

ただし，小泉らの解法には，図形を線画とみなした場合に似た図形でも，点の配置によって解の質が変わってしまうといった問題点が存在する．そこで，酒井は 2 つのアプローチにより小泉の解法の改善を行った．1 つ目の手法は，図形の点の配置を変えるというものであり，2 つ目の手法は，制約条件を緩和するというものである．これらの手法は局所探索に基づく発見的解法であり，小泉らの解法と比較すると計算時間はかかるものの，どちらの手法においても解の改善（良質のタイリング生成）が確認されている．

3. 提案手法

2 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題は，2 つの図形 S_1, S_2 が与えられたとき，「図形 T_1, T_2 は平面を敷き詰めることができる」，「図形 T_1, T_2 はできるだけ S_1, S_2 に近い形である」という 2 つの条件を満たす図形 T_1, T_2 を見つける問題である．本論文では 1 種類の図形に対する既存解法を用いることを考え，次の流れでタイリングを生成する．まず，2 つの入力図形をくっつけて 1 つの図形とする．次に既存解法を用いて，1 つの図形としてタイリングを生成する．最後に，タイルを再び 2 つに分けることで，2 種類の図形によるタイリングとする．以降では，図形の接合方法と全体のアルゴリズムについて説明する．

3.1 接合方法

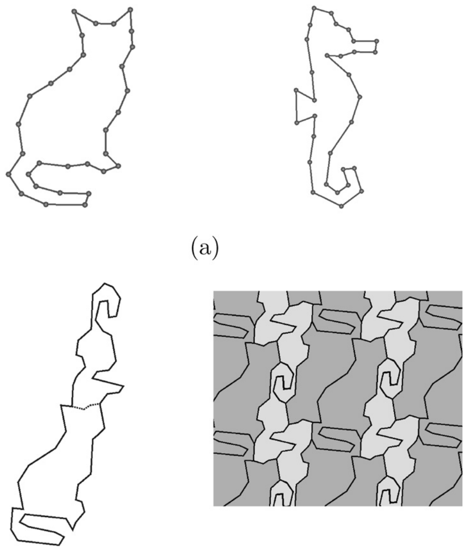
図形は点画で与えることとする．まず，2 つの入力図形についてそれぞれ接合部分を設定し，その端点が重なるように拡大・縮小，回転，平行移動を施す．この段階では，2 つの図形の間に隙間や重なりが生じるため，これを避けるために図形を変形する．しかし，大きな変形はタイリングの質の低下につながる．そこで，変形が最も小さくなる位置に図形をずらす．最後に 2 つの図形の間を通る線（分離線）を引き，図形を接合したこととする．分離線は後で再び図形を分離するときに用いる．

3.2 アルゴリズム

2 つの図形を入力し，それぞれの図形の接合部分を設定する．次に，図形を接合する．この時点で拡大・縮小などに制限を設け，制限を満たさない場合や図形に交差が生じた場合は計算を打ち切り，新たな接合部分を設定し，再び計算を行う．次に，接合された図形に対して既存解法を用いてタイリングを生成する．その時点で暫定解が存在する場合は，両者を比較し，より良い解が得られた場合は暫定解を更新する．タイリングの評価には，接合の際にどれだけ変形されたかも考慮に入れる．そして，図形の接合に戻り，新たな接合部分を設定して再び計算を行う．この操作をすべての接合部分の組合せについて行った後に，最適解を出力する．

既存解法としては小泉らの解法と酒井の解法を紹介した．酒井の解法を用いれば，より良い解が得られると期待できるが，酒井の解法は小泉らの解法と比べ，約 100 倍の計算時間がかかる．そこで，上のアルゴリズム中のタイリング生成には小泉らの解法を用いることとする．そして，一番良い解のみでなく，良い解が得られたときの接合後の図形を複数保存することとし，すべての接合後の図形に対して小泉らの解法を用いて評価した後で，保存されている図形に対してのみ酒井の解法を適用し，そのときの最適解を出力する．

このアルゴリズムを用いて数値実験を行った結果を図 1 に示す．(a) は入力図形，(b) は得られた解，(c) は (b) のタイリングである．Intel Core i5-2400 (3.1 GHz) で実験を行った結果，計算時間は 300 秒ほどであった．



(a)

(b) (c)

図 1 ネコとタツノオトシゴのタイリング

図 1 より，提案したアルゴリズムの有効性が示された．

4. 今後の課題

まず，さらなる計算時間の短縮が挙げられる．また，入力図形の組合せによっては良い解が得られない場合も確認されたので，2 つの入力図形の一方のみを任意とし，もう一方はあらかじめ用意している中から選ぶ方法も考えられる．また，非周期的なタイリングなど，本研究では取り扱わなかったタイリングを扱うことも考えられる．

参考文献

[1] C. S. Kaplan and D. H. Salesin, Escherization. Proceedings of SIGGRAPH, 499–510, 2000.

[2] H. Koizumi and K. Sugihara, Maximum Eigenvalue Problem for Escherization, *Graphs and Combinatorics*, **27**, 431–439, 2011.

[3] 酒井翔平，エッシャー風タイリング問題の数理モデルについて—制約条件の緩和及びその最適化手法—，名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻修士論文，2013.

[4] C. S. Kaplan and D. H. Salesin, Dihedral Escherization. Proceedings of Graphics Interface, 255–262, 2004.