1人1票からMajority Judgmentへ

山本　芳嗣

従来の１人１票の投票や，個人の選好順序を前提にして社会的選択を行うことの問題点が認識されて久しいが，近年 Balinski と Laraki はその問題点を克服する方法として Majority Judgment と名付けられた方法を提案している．この稿はその理論的妥当性についての彼らの議論を紹介する．

キーワード：１人１票，選挙，社会的選択，Majority Judgment，アローの定理，順位関数

1. 概要

この稿の目的は Balinski と Laraki の *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing* [4] の主に理論的側面を紹介することである．Balinski と Laraki の記述の順序とは異同があるので，この稿を読んで興味をもたれた読者のために，公理や定理には同書の番号やページを（　）に添えた．また，証明を飛ばしても話の流れを理解していただけるよう配慮したつもりである．なお，[5] は同書の要約である．

2. 選好順序とアローの定理

評価される対象を選択肢と呼び，その集合を $I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, m\}$ で表し，評価する側を個人と呼び，その集合を $J = \{1, 2, \ldots, j, \ldots, n\}$ で表す．アローの設定では，個人 j は選択肢集合 I 上に選好順序 $\succeq_j$ をもっており，社会的厚生関数とは，全個人の選好順序の組合せを入力とし I 上の選好順序（これを社会的選好順序という）を出力する関数である．アローは社会的厚生関数の満たすべき公理として，「定義域の非限定性」,「無関係対象からの独立性」,「一致性」,「非独裁性」を掲げ，

アローの定理.（[1]）選択肢が３個以上なら上記の公理を満たす社会的厚生関数は存在しない，

ことを示した．短く簡潔な証明が [6] にある．この否定的結果に対して，Balinski と Laraki は個人の選好順序ではなく,「共通語彙による評価」を基礎にした Majority Judgment を提案している．以降，個人を審査員，選択肢を候補者と呼び変えて，その仕事を紹介しよう．

やまもと　よしつぐ
筑波大学 システム情報系 社会工学域
〒 305–8573 つくば市天王台 1–1–1

3. 選好順序から共通言語による評価へ

Majority Judgment では，各審査員はあらかじめ決められた評価を表す語彙によって各候補者を評価する．この語彙の集合を Λ と書く．例えば，0 以上 R 以下の実数の区間 $[0, R]$ や $\{A, B, C, D\}$ や｛優，良，可，不可｝である．その要素の間には順序 $\succeq$ があるのみならず，個々の評価の意味するところが全審査員に共有されていることが仮定されている．全審査員の全候補者に対する評価をまとめると，Λ の要素からなり，I を行の添え字に，J を列の添え字にもつ $m \times n$ 行列ができあがる．この行列をプロファイルと呼ぶ．プロファイルを表すのに Φ を用い，プロファイルの全体を Λ^I_J と書く．また，Φ^i_J で Φ の i 行目の行ベクトルを，Φ^I_j で j 列目の列ベクトルを表すことにする．

社会的評価関数（Social Grading Function）はプロファイル $\Phi \in \Lambda^I_J$ が与えられたとき，m 人の候補者の社会的評価を要素にもつ縦ベクトルを出力する関数

$$F \colon \Lambda^I_J \to \Lambda^I$$

である．ここで，Λ^I は Λ の要素からなる m 次元縦ベクトルの全体を示す．$I = \{1, 2, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Lambda = \{A, B, C, D\}$ の場合の社会的評価関数 F とは例えば下のようなものである．

$$F\left(\begin{bmatrix} B & B & B & C & B \\ A & B & B & D & B \\ C & A & D & B & D \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} B \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

この関数の出力が全審査員の総意として各候補者に与えられた評価である．

4. 社会的評価関数がもつべき性質

特定の候補者に対する審査員達の評価の横ベクトルが行列 Φ の何行目に置かれているかは，候補者の評価に影響を与えてはいけない．これは

公理 4.1.（中立性，Axiom 9.1） 社会的評価関数 F は，任意の $\Phi \in \Lambda_J^I$ と I の任意の置換 ρ に対して $F(\rho\Phi) = \rho F(\Phi)$ を満たす，

と述べることができる．またアローの公理で馴染み深い無関係対象からの独立性に対応する性質は，ここでは候補者 i の社会的評価はその候補者に対する評価のみで決まるとしてよいであろう．つまり，

公理 4.2.（無関係対象からの独立性，Axiom 9.5） 社会的評価関数 F は，任意の $\Phi, \Psi \in \Lambda_J^I$ と任意の $i \in I$ に対して

$$\Phi_J^i = \Psi_J^i \quad \text{ならば} \quad F(\Phi)^i = F(\Psi)^i$$

を満たす．ここで，$F(\Phi)^i$ は $F(\Phi)$ の第 i 要素である．

Λ_J を Λ の要素からなる J を添字にもつ n 次元横ベクトルの全体を示すことにすると，次の定理が直ちに得られる．

定理 4.3.（Theorem 9.1） 中立性の公理 4.1 と無関係対象からの独立性の公理 4.2 を満たす社会的評価関数 $F\colon \Lambda_J^I \to \Lambda^I$ が与えられたとき

$$\text{任意の } i \in I \text{ に対して} \quad F(\Phi)^i = f(\Phi_J^i)$$

となる $f\colon \Lambda_J \to \Lambda$ が存在する．

つまり，候補者に依存しない関数 $f\colon \Lambda_J \to \Lambda$ が存在して，各候補者の社会的評価は彼に与えられた評価ベクトルに対する f の出力として与えられることになる．以降は，Balinski と Laraki によって集約関数（Aggregation Function）と名付けられたこの関数を見ていこう．

5. 集約関数のもつべき性質

プロファイル Φ の行を示すのに以降では $\boldsymbol{r} \in \Lambda_J$ を用いる．審査員達の評価がどのような順番で評価ベクトル $\boldsymbol{r} \in \Lambda_J$ に置かれるかは，候補者の評価に影響を与えてはいけない性質である．そこで，集約関数に対して

公理 5.1.（匿名性，Axiom 9.2） 集約関数 f は，任意の $\boldsymbol{r} \in \Lambda_J$ と J の任意の置換 τ に対して

$$f(\boldsymbol{r}\tau) = f(\boldsymbol{r})$$

を満たす，

を要請する．この公理によって集約関数は，どの審査員がどのような評価を与えたかではなく，どのような評価の組合せが与えられたかだけによって社会的評価を決定することになり，審査員は匿名性をもつ．さらに，次の 2 つの公理も自然な要請であろう．

公理 5.2.（一致性，Axiom 9.3） 集約関数 f は，任意の $r \in \Lambda$ に対して

$$\boldsymbol{r} = (r, r, \ldots, r) \quad \text{ならば} \quad f(\boldsymbol{r}) = r$$

を満たす．

公理 5.3.（単調性，Axiom 9.4） 集約関数 f は，任意の $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in \Lambda_J$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{r}' \quad &\text{ならば} \quad f(\boldsymbol{r}) \succeq f(\boldsymbol{r}'), \\ \boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{r}' \quad &\text{ならば} \quad f(\boldsymbol{r}) \succ f(\boldsymbol{r}'), \end{aligned}$$

を満たす．

ただし，$\boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{r}'$ ($\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{r}'$) はすべての $j \in J$ について $r_j \succeq r'_j$ ($r_j \succ r'_j$) を意味する．

まとめると，候補者 i の社会的評価は，候補者 i に与えられた審査員の評価を任意の順番で並べたベクトルを i に依存しない集約関数 f に入力し，その出力として得られる評価として与えられることになる．次節ではこれらの公理からどのように集約関数が特定できるかについて見ていく．

6. 戦略的操作からみた望ましい集約関数

集約関数 f の戦略的操作可能性の議論を始める．以降，$\boldsymbol{r}/_j\, r'$ はベクトル $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ の j 要素を r' に置き換えたベクトルを示すこととする：

$$\boldsymbol{r}/_j\, r' = (r_1, \ldots, r_{j-1}, r', r_{j+1}, \ldots, r_n)$$

まず，戦略的操作を定義する．

定義 6.1.（戦略的操作） 集約関数 f が審査員 j によって $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ の下で戦略的に操作されるとは

$r_j \succ f(\boldsymbol{r})$ かつ $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') \succ f(\boldsymbol{r})$ となる r' が存在する
あるいは
$r_j \prec f(\boldsymbol{r})$ かつ $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') \prec f(\boldsymbol{r})$ となる r' が存在する

ことをいう．

つまり，社会的評価よりも高い（低い）評価を与え，よって社会的評価を引き上げる（下げる）動機づけをもつ審査員が，彼の評価を r_j から r' に変化させることによって，社会的評価を上げる（下げる）ことに成功することである．このような操作を許す集約関数は評価を偽る動機を審査員に与えてしまうため，

公理 6.2.（戦略的操作不可能性，p. 189） 集約関数 f は戦略的操作を許さない，

が要請される．ここで重要な順位関数を定義しよう．

定義 6.3.（p. 190） $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Lambda_J$ の要素を Λ の順序 $\succeq$ で降順に並べ，その k 番目を出力する関数を k-順位関数 (k-th Order Function) といい，以降 ψ_k で表す．特に k を明示する必要のない場合には単に順位関数と呼ぶ．

例えば $\boldsymbol{r} = (C, A, D, B, D)$ であれば，その降順の並べ替え (A, B, C, D, D) から $\psi_1(\boldsymbol{r}) = A, \psi_2(\boldsymbol{r}) = B, \psi_3(\boldsymbol{r}) = C, \psi_4(\boldsymbol{r}) = \psi_5(\boldsymbol{r}) = D$ となる．

補題 6.4.（p. 191） 順位関数 ψ_k は匿名性の公理 5.1，一致性の公理 5.2，単調性の公理 5.3 に加えて戦略的操作不可能性の公理 6.2 を満たす．

証明：ψ_kが公理 5.1，5.2，5.3 を満たすことは容易にわかるので，公理 6.2 を満たすことを示す．$\boldsymbol{r}$ の要素の添字をつけ直して $r_1 \succeq \cdots \succeq r_k \succeq \cdots \succeq r_n$ とすると，$\psi_k(r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_n) = r_k$ である．$r_j \succ r_k$ と仮定して，r_j を r' に変更した場合に何が起こるか見てみる．もしも，$r' \succeq r_k$ であれば，r_k が k 番目の順位の評価であることは変わらない．また $r' \prec r_k$ なら，k 番目の順位の評価は r_{k+1} か r' となり，いずれの場合にも r_k よりも高い評価ではない．$r_j \prec r_k$ の場合も同様の議論をすれば，順位関数 ψ_k は戦略的操作を許さないことがわかる． □

では，戦略的操作を許さない集約関数は順位関数以外にあるのかとの疑問に答えるため，評価語彙 Λ が実数の区間 $[0, R]$ であると仮定する．その要素間の順序は通常の実数の大小関係とし，$\succeq$ に代えて $\geq$ で表す．また，$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Lambda_J$ は降順 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ に並べられているものとする．

補題 6.5. 一致性の公理 5.2 と単調性の公理 5.3 を満たす集約関数 f は

$$r_n \leq f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq r_1$$

を満たす．

証明：$(r_n, r_n, \ldots, r_n) \leq (r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq (r_1, r_1, \ldots, r_1)$ に公理 5.2 と 5.3 を使えば

$$\begin{aligned} r_n = f(r_n, r_n, \ldots, r_n) &\leq f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ &\leq f(r_1, r_1, \ldots, r_1) = r_1 \end{aligned}$$

が得られる． □

補題 6.6. 単調性の公理 5.3，戦略的操作不可能性の公理 6.2 を満たす集約関数 f は

(a) $r_j > f(\boldsymbol{r})$ なら任意の $r' > f(\boldsymbol{r})$ について $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') = f(\boldsymbol{r})$

(b) $r_j < f(\boldsymbol{r})$ なら任意の $r' < f(\boldsymbol{r})$ について $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') = f(\boldsymbol{r})$

を満たす．

証明：(a) の証明を与える．

(i) $r' \geq r_j$ の場合

公理 5.3 から $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') \geq f(\boldsymbol{r})$．また，$r_j > f(\boldsymbol{r})$ と戦略的操作不可能性の公理 6.2 から $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') \leq f(\boldsymbol{r})$．よって等号が成立する．

(ii) $f(\boldsymbol{r}) < r' < r_j$ の場合

公理 5.3 から $f(\boldsymbol{r}/_j\, r') \leq f(\boldsymbol{r})$ が得られる．ここで，$f(\boldsymbol{r}/_j\, r') < f(\boldsymbol{r})$ と仮定する．$\boldsymbol{r}' := \boldsymbol{r}/_j\, r'$ と置くと，この仮定は $f(\boldsymbol{r}') < f(\boldsymbol{r}'/_j\, r_j)$ と書ける．$r' > f(\boldsymbol{r}) > f(\boldsymbol{r}')$ に注意すると，これは審査員 j がその評価を r' から r_j に変化させて，戦略的操作を行ったことを意味し，戦略的操作不可能性の公理 6.2 に矛盾する．よって，$f(\boldsymbol{r}/_j\, r') < f(\boldsymbol{r})$ は起こりえない． □

補題 6.7.（Theorem 10.1 の前半） 一致性の公理 5.2，単調性の公理 5.3，戦略的操作不可能性の公理 6.2 を満たす集約関数 f は

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

を満たす．

証明：(i) $f(\boldsymbol{r}) = R$ の場合

補題 6.5 から $f(\boldsymbol{r}) \leq r_1 \leq R = f(\boldsymbol{r})$ が得られるので，これから $f(\boldsymbol{r}) = r_1$ がわかる．

(ii) $f(\boldsymbol{r}) = 0$ の場合

補題 6.5 から $f(\boldsymbol{r}) \geq r_n \geq 0 = f(\boldsymbol{r})$ が得られるので，これから $f(\boldsymbol{r}) = r_n$ がわかる．

(iii) $0 < f(\boldsymbol{r}) < R$ の場合

$f(\boldsymbol{r})$ が $r_1, r_2, \ldots, r_n$ のいずれにも等しくないと仮定して矛盾を導く．補題 6.5 から $r_1 \geq f(\boldsymbol{r}) \geq r_n$ であるので，この背理法の仮定から $r_j > f(\boldsymbol{r}) > r_{j+1}$ なる j が存在する．

$$s := \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{r}) + r_{j+1}), \quad t := \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{r}) + r_j)$$

とする．$\Lambda = [0, R]$ より s, t のいずれもが Λ の要素であること，さらに $0 < s < f(\boldsymbol{r}) < t < R$ であることに注意せよ．$r_1 \geq r_j > f(\boldsymbol{r})$ と補題 6.6 から

$$f(R, r_2, \ldots, r_j, r_{j+1}, \ldots, r_n) = f(\boldsymbol{r})$$

が得られ，同様に $r_2, \ldots, r_j > f(\boldsymbol{r})$ から

$$\begin{aligned} f(R, R, \ldots, r_j, r_{j+1}, \ldots, r_n) &= f(\boldsymbol{r}) \\ &\vdots \\ f(R, R, \ldots, R, r_{j+1}, \ldots, r_n) &= f(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

が得られる．さらに $r_{j+1}, \ldots, r_n < f(\boldsymbol{r})$ と補題 6.6 から

$$f(R, R, \ldots, R, s, \ldots, r_n) = f(\boldsymbol{r})$$
$$\vdots$$
$$f(R, R, \ldots, R, s, \ldots, s) = f(\boldsymbol{r})$$

を得る．同様の議論によって

$$f(t, t, \ldots, t, 0, \ldots, 0) = f(\boldsymbol{r})$$

が得られる．しかし，$(R, R, \ldots, R, s, \ldots, s) > (t, t, \ldots, t, 0, \ldots, 0)$ であるので，公理 5.3 より $f(R, R, \ldots, R, s, \ldots, s) > f(t, t, \ldots, t, 0, \ldots, 0)$ となるはずである．矛盾が得られ，証明が終わる．□

この証明では Λ が実数の区間であることが使われている[1]．Balinski と Laraki は集約関数 f に対してさらに

公理 6.8.（連続性，Axiom 9.6） 集約関数 f は Λ_J 上で連続である，

を仮定して次の定理を示している．

定理 6.9.（Theorem 10.1 の後半） 匿名性の公理 5.1，一致性の公理 5.2，単調性の公理 5.3，戦略的操作不可能性の公理 6.2，連続性の公理 6.8 を満たす集約関数は順位関数に限られる．

証明：補題 6.7，f の連続性，$\Delta := \{\boldsymbol{r} \in \Lambda_J \mid R \geq r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0\}$ が連結であることから得られる．□

評価語彙 Λ が実数の区間で，しかも連続性が要請されているとはいえ，定理 6.9 は順位関数が戦略的操作の観点からみて望ましい性質をもつ唯一の集約関数であることを示している．

審査員がその評価を変更して候補者の社会的評価を変更できる場合，その変更は候補者の評価を上げる変更と下げる変更との 2 つがあり得る．そこで与えられた集約関数 f に対して表明した評価を変更して社会的評価を上げることのできる審査員達と下げることのできる審査員達を

$$J_+(f, \boldsymbol{r}) := \{\, j \in J \mid f(\boldsymbol{r}/_j\, r') > f(\boldsymbol{r}) \text{ なる } r' \text{ がある} \,\}$$
$$J_-(f, \boldsymbol{r}) := \{\, j \in J \mid f(\boldsymbol{r}/_j\, r') < f(\boldsymbol{r}) \text{ なる } r' \text{ がある} \,\}$$

と定義する．この定義には審査員 j が操作を行う動機をもつかどうか，つまり r_j と $f(\boldsymbol{r})$ の関係についての条件は含まれていない．また，両集合に属する審査員の最大人数を

$$m(f) := \max_{r \in \Lambda_J} |J_+(f, \boldsymbol{r}) \cap J_-(f, \boldsymbol{r})|$$

とする．補題 6.4 の証明と類似の議論によって，k-順位関数 ψ_k は $m(\psi_k) \leq 1$ を満たすことがわかる．Balinski と Laraki はこの逆も正しいことを示して次の定理を得ている．証明は，$m(f) \leq 1$ から f が戦略的操作を許さないことが導かれることと定理 6.9 による．

定理 6.10.（Theorem 10.3 と Corollary (p. 196)） 匿名性の公理 5.1，一致性の公理 5.2，単調性の公理 5.3，連続性の公理 6.8 を満たす集約関数で，$m(f) \leq 1$ となるものは順位関数に限られる．さらに $m(f) = 0$ となる集約関数は存在しない．

つまり，表明した評価の変更によって社会的評価を上げ，かつ下げることのできる審査員がいつでもたかだか 1 名であるような集約関数は順位関数だけであることになる．その意味で，順位関数は審査員の（動機の有無によらない）操作に対して最も頑健であることになる．

上の定理は Λ が有限集合の場合には成り立たない．公理を満たすが順位関数でない例を次の表に示す（表 1）．ここで $\Lambda = \{0, 1, 2\}$，$J = \{1, 2\}$ であり，列は審査員 1 の評価に，行は審査員 2 の評価に対応し，表中の数字は社会的評価である．斜字体の数字が順位関数でないことを示している．

表 1　$\Lambda = \{0, 1, 2\}, |J| = 2$ の場合の例

2	*1*	1	2
1	0	1	1
0	0	0	*1*
	0	1	2

評価を上げることのできる審査員と下げることのできる審査員の延べ人数の最大値を

$$\mu(f) := \max_{r \in \Lambda_J} (|J_-(f, \boldsymbol{r})| + |J_+(f, \boldsymbol{r})|)$$

と定義すると，順位関数の頑健性が次の定理でもわかる．

定理 6.11.（Theorem 10.4） 匿名性の公理 5.1，一致性の公理 5.2，単調性の公理 5.3，連続性の公理 6.8 を満たす集約関数の中で最小の $\mu(f)$ をもつ集約関数は順位関数に限られる．

7. k-順位関数の k の値

前節までで順位関数 ψ_k が集約関数としてよい性質もっていることがわかったが，k として 1 から n のどの番号を取るべきかの議論が残されている．

[1] Balinski と Laraki はその Theorem 10.2 で，評価語彙 Λ が有限集合である場合にもこの補題が成り立つと述べているが，その証明は不十分である．

定義 7.1.（p. 209） $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Lambda_J$ が $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ と並んでいるとき，中央区間 (Middlemost Interval)$M(\boldsymbol{r})$ を

$$M(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} [r_{(n+1)/2}, r_{(n+1)/2}], & n \text{ が奇数のとき,} \\ [r_{(n+2)/2}, r_{n/2}], & n \text{ が偶数のとき,} \end{cases}$$

と定義する．

n が奇数のとき $M(\boldsymbol{r})$ は一点集合 $\{r_{(n+1)/2}\}$ だが，区間と呼ぶことにする．

定義 7.2.（p. 209） 任意の $\boldsymbol{r}$ で

$$f(\boldsymbol{r}) \in M(\boldsymbol{r})$$

を満たす集約関数を中央集約関数 (Middlemost Aggregation Function) という．

審査員の過半数が一致して評価 r を与えているとき社会的評価も r であるべきであるとの考えは自然であろう．中央集約関数はこの性質をもっており，しかもこの性質をもつ集約関数は中央集約関数だけである．

定理 7.3.（Theorem 12.1） 匿名性の公理 5.1 と単調性の公理 5.3 を満たし，審査員の過半数が評価 r を与えているとき $f(\boldsymbol{r}) = r$ となる集約関数は中央集約関数に限られる．

証明：n が奇数の場合は $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ に対して

$$\boldsymbol{r}' := (\underbrace{r_1, \ldots, r_{(n-1)/2}}_{(n-1)/2}, \underbrace{r_{(n+1)/2}, \ldots, r_{(n+1)/2}}_{(n+1)/2}),$$
$$\boldsymbol{r}'' := (\underbrace{r_{(n+1)/2}, \ldots, r_{(n+1)/2}}_{(n+1)/2}, \underbrace{r_{(n+3)/2}, \ldots, r_n}_{(n-1)/2}),$$

とすると $\boldsymbol{r}' \geq \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{r}''$ となり，f に置かれた仮定と単調性の公理から

$$r_{(n+1)/2} = f(\boldsymbol{r}') \geq f(\boldsymbol{r}) \geq f(\boldsymbol{r}'') = r_{(n+1)/2}$$

を得る．n が偶数の場合には

$$(\underbrace{r_1, \ldots, r_{(n-2)/2}}_{(n-2)/2}, \underbrace{r_{n/2}, \ldots, r_{n/2}}_{(n+2)/2})$$
$$\geq \boldsymbol{r} \geq (\underbrace{r_{(n+2)/2}, \ldots, r_{(n+2)/2}}_{(n+2)/2}, \underbrace{r_{(n+2)/2}, \ldots, r_n}_{(n-2)/2})$$

を用いればよい． □

審査員は自分の表明した評価と社会的評価の乖離に応じて不満足を表す関数 d をもっていると仮定しよう．これについて $d(r,r) = 0$，$d(s,t) = d(t,s)$，さらに

$$r < s < t \quad \text{ならば} \quad d(r,s) + d(s,t) = d(r,t)$$

を仮定する．例えば $[0, R]$ 上で定義された単調増加関数 ϕ によって $d(s,t) := |\phi(s) - \phi(t)|$ とすれば上の条件を満たす．この不満のすべての審査員に渡る総和を $D(f, \boldsymbol{r}) := \sum_{j \in J} d(f(\boldsymbol{r}), r_j)$ と書き，これを最小にする集約関数は何かを考える．

定理 7.4.（Theorem 12.3） 匿名性の公理 5.1 を満たし，$D(f, \boldsymbol{r})$ を最小にする集約関数 f は中央集約関数に限られる．

証明：$n = 2$ の場合には $r \in [r_1, r_2], r' \notin [r_1, r_2]$ と仮定すると

$$d(r, r_1) + d(r, r_2) = d(r_1, r_2) < d(r', r_1) + d(r', r_2)$$

となる．また，$n = 3$ の場合に $r = r_2, r' \neq r_2$ とすると

$$\begin{aligned} d(r, r_1) + d(r, r_2) + d(r, r_3) &= d(r, r_1) + d(r, r_3) \\ &= d(r_1, r_3) < d(r', r_1) + d(r', r_2) + d(r', r_3) \end{aligned}$$

が得られる．一般の n についても同様の議論によって中央集約関数が導かれる． □

d の代わりに $d_2(s,t) := |s-t|^2$ を考えると，その総和を最小にする r は $r_1, r_2, \ldots, r_n$ の算術平均 $\sum_{j \in J} r_j / n$ となる．

中央集約関数は，n が奇数の場合には $(n+1)/2$-順位関数 $\psi_{(n+1)/2}$ であるが，n が偶数の場合には一意に決まらない．Balinski と Laraki はその場合には中央区間の下端を与える順位関数 $\psi_{(n+2)/2}$ を用いるべきであると述べている．そこでベクトル $\boldsymbol{r}$ の次元を ℓ としたとき

$$\psi_*(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \psi_{(\ell+1)/2}(\boldsymbol{r}), & \ell \text{ が奇数の場合,} \\ \psi_{(\ell+2)/2}(\boldsymbol{r}), & \ell \text{ が偶数の場合,} \end{cases}$$

と定義し，ψ_* を多数支持評価（Majority Grade）関数と呼ぶことにする．

8. 社会的選好順序の構成

定理 7.3，7.4 で中央集約関数の優位性が示され，多数支持評価関数 ψ_* を導入して一意性を確保した．しかし $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ であっても $\psi_*(\boldsymbol{r}) = \psi_*(\boldsymbol{r}')$ となることがあるため，評価ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を得た候補者の間に順序を付けることができないことがある．これを回避するため Balinski と Laraki は以下の手順によって $\boldsymbol{r}$ の要素を並べ替えて新たな評価ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}}$ を作り，それを辞書式順序によって比較することを提案している．

⟨1⟩ $\boldsymbol{r}_1 := \boldsymbol{r}$ とし $\tilde{r}_1 := \psi_*(\boldsymbol{r}_1)$ とする，

⟨2⟩ ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ から $\tilde{r}_1$ に使われた要素を消去したベクトルを $\boldsymbol{r}_2$ とし，$\tilde{r}_2 := \psi_*(\boldsymbol{r}_2)$ とする，

⟨3⟩ ベクトル $\boldsymbol{r}_2$ から $\tilde{r}_2$ に使われた要素を消去したベクトルを $\boldsymbol{r}_3$ とし，$\tilde{r}_3 := \psi_*(\boldsymbol{r}_3)$ とする，

⟨4⟩ 以上の操作を繰り返して，ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n)$ を得る．

例えば $\boldsymbol{r} = (90, 85, 78, 73, 73, 70, 69)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_1 &= \psi_*(90, 85, 78, \mathit{73}, 73, 70, 69) = \mathit{73}, \\
\tilde{r}_2 &= \psi_*(90, 85, 78, \mathit{73}, 70, 69) \qquad = \mathit{73}, \\
\tilde{r}_3 &= \psi_*(90, 85, \mathit{78}, 70, 69) \qquad\quad = \mathit{78},
\end{aligned}$$

と計算され，$\tilde{\boldsymbol{r}} = (\mathit{73, 73, 78, 70, 85, 69, 90})$ となる．さて，候補者 i のプロファイル Φ での評価ベクトルを Φ^i_J で表したことを思い出してほしい．

定義 8.1.（p. 224） Φ^i_J に対して上記の操作を行って得られるベクトル $\tilde{\Phi}^i_J$ を候補者 i のプロファイル Φ での多数支持値（Majority Value）という．また，候補者達の多数支持値の辞書式順序で決まる順位を多数支持順位（Majority Ranking）という．

明らかに $\Phi^i_J \neq \Phi^{i'}_J$ ならこの方法によって候補者 i と i' の間に順序がつく（Theorem 13.3）．ただし，この方法は審査員の人数が多い場合には面倒なので，その簡略版として

$$\begin{aligned}
p &:= |\{\, j \mid r_j > \psi_*(\boldsymbol{r}) \,\}|/n, \\
q &:= |\{\, j \mid r_j < \psi_*(\boldsymbol{r}) \,\}|/n, \\
\alpha &:= \begin{cases} \psi_*(\boldsymbol{r})+, & p > q \text{ の場合}, \\ \psi_*(\boldsymbol{r})-, & p \le q \text{ の場合}, \end{cases}
\end{aligned}$$

で決まる (p, α, q) を用いて順位づけることも提案されている (p. 236)．前出の $\boldsymbol{r}$ については $(p, \alpha, q) = (3/7, 73+, 2/7)$ となる．

9. フランス大統領選挙での社会実験

Balinski と Laraki が 2007 年のフランス大統領選挙で行った社会実験について触れておこう（[3], [4] の Chapter 15）．これは，人工的な環境で人工的に動機づけられた被験者による実験室での実験ではなく，12 人の候補者の間で争われた 2007 年のフランス大統領選挙の第 1 回目の投票に来たパリ郊外オルセ市の住民が参加して行われた実験である．通常の投票を終えた住民は，必ずこの実験用の投票場所を通過し，実験のポスターや実験への参加を勧誘する人に出会うように会場が設営された．対象としたオルセ市内 3 カ所の投票所には 2,695 人の有権者がおり，投票した 2,383 人の 74%が実験に参加し，最終的に 1,733 の有効票が得られた．

Balinski と Laraki は議論の末に評価語彙 Λ として，*Très Bien*（非常に良い），*Bien*（良い），*Assez Bien*（まずまず），*Passable*（容認），*Insuffisant*（不十分），*à Rejeter*（失格）の 6 個の語彙を採用した．初めの 5 個はフランスの学校で成績評価に使われているとのことである．有効票の 86%がこの 6 個の語彙の内の 5 個だけを使っていたことから，語彙は 6 個で十分であると結論している[2]．

また，実験の投票方法は時間がかかり過ぎるのではとの事前の予想に反して，ほとんどの投票は 1 分とかかっておらず，参加者からこの投票方法が負担であるとの不満はなかった．それどころか，1 人 1 票の従来の投票方法と違って，望ましくないと考える候補者に *à Rejeter*（失格）と投票できることの良さを述べる声が多く聞かれた．

通常の投票による得票率の高かった 4 候補者について，実験の結果を表 2 にまとめておく（Table 1.4 (p. 13）の一部）．「オルセ」と「全国」は，通常の投票による得票率を実験を行った 3 投票所と全国に分けて示してある．数字はいずれも%である．

表 2 実験から得られた (p, α, q) と得票率

候補者	p	α	q	オルセ	全国
Bayrou	44.3	*Bien*+	30.6	25.5	18.6
Royal	39.4	*Bien*−	41.5	29.9	25.9
Sarkozy	38.9	*Bien*−	46.9	29.0	31.2
Le Pen	25.7	*à Rejeter*	−	5.9	10.4

Le Pen 氏のオルセ市での得票率の低さを考慮しても，彼が *à Rejeter* とされている点が注意をひく．この実験については [3] に詳しい報告があり，また朝日新聞 [2] にも紹介記事があるので，参照していただきたい（図 1）．

12 名の候補者の場合，従来の投票方法では棄権を含めても投票の種類は 13 種にすぎないが，Majority Judgment では 6^{12}（約 21 億）種である．これが多様な意見表明を可能にしていると考えられる．

10. まとめ

筑波大学理工学群社会工学類では，卒業をひかえた優秀な学生を選んで初代学類長の名前を冠した倉谷賞

2 語彙が奇数個だとその真ん中の語彙に投票が集中しやすく，候補者間の差が出にくいとも述べている．

脱・1人1票

仏大統領選で実験

全候補者6段階評価 ヒントはワイン

あしたを考える

The Asahi Shimbun

現実の投票結果			実験投票の結果		
順位	名前（所属・傾向）	得票率(%)	順位	名前	評価結果
1	ロワイヤル(社会党)	29.9	1	バイル	まずまず(+)
2	サルコジ(右派)	29.0	2	ロワイヤル	まずまず(−)
3	バイル(中道)	25.5	3	サルコジ	まずまず(−)
4	ルペン(右翼)	5.9	4	ボワネ	容認(−)
5	ブザンスノ(トロツキスト)	2.5	5	ブザンスノ	不十分(+)
6	ドビリエ(右翼)	1.9	6	ビュフェ	不十分(+)
7	ボワネ(緑の党)	1.7	7	ボベ	不十分(−)
8	ビュフェ(共産党)	1.4	8	ラギエ	不十分(−)
9	ボベ(反グローバル化)	0.9	9	ニウー	失格
10	ラギエ(トロツキスト)	0.8	10	ドビリエ	失格
11	ニウー(右派)	0.3	11	シバルディ	失格
12	シバルディ(トロツキスト)	0.2	12	ルペン	失格

（敬称略）

1人1票――。民主主義の基本と考えられてきたこの常識を覆す新たな投票方法の実験が、フランス大統領選を舞台に試みられた。仏理工科学校の数学者がパリ郊外の自治体の協力を得て実施した「多数派診断法」。候補者全員を6段階で評価し、その総体で当選者を決める手法だ。実際に選挙で採用されるにはまだ課題は多いが、取り組みの背景にある「現在の選挙制度が民意を反映していないのでは」との問いかけは重い。（パリ＝国末憲人）

仏大統領選の第1回投票があった4月22日、パリ南郊オルセ市の3投票所の有権者は2種類の投票に臨んだ。まず最初は他の都市と同様に、当選させたい1人を12人の候補者から選ぶ正規の投票。それを終えた有権者は、見慣れない投票用紙を隣で手渡された。

用紙には候補者全員の名前と、6種類の評価を記す欄。各候補者について、学校の通信簿のような「非常によい」「よい」「まずまず」「容認」「不十分」「失格」の評価をし、用紙を実験用投票箱に入れる。集計の際は、各候補者の評価の中央値を比較する＝集計例。これが「多数派診断法」だ。

実験は、仏エリート養成校「理工科学校」のミシェル・バリンスキー特任教授（効率論）とリダ・ララキ教授（ゲーム理論）が、オルセ市のマリーエレーヌ・オブリ市長(43)の協力を得て実施。事前に有権者に呼びかけ、投票者の74％にあたる1752人が協力した。

きっかけは前回02年の仏大統領選の経験だ。左派候補のジョスパン元首相が第1回投票で排除され、右翼候補のルペン氏が決選投票に進出。左派支持者の多くが意思に反し、決選投票で右派のシラク前大統領に投票せざるを得なくなった。

それを目にしたバリンスキー特任教授らが、世論を正確に反映する投票方法を模索。ヒントはボルドー・ワインの格付け方法だった。ワインの味への意見は試飲者によってまちまちで、まとまりにくい。多様な意見をどう集計するかをワインの専門家とも検討し、方法を編み出したという。

図 1　朝日新聞 2007 年 6 月 12 日朝刊

を贈っている．特に経営工学分野では，卒業研究の発表を複数の教員が 6 段階で評価し，その多数支持評価によって候補学生を選んでいる．発表会当日は通常の授業が行われており，教員は必ずしもすべての発表を聞くことができないため，学生ごとに評価する教員が，人数も含めて一定していないことが，本稿のこれまでの議論と異なる点である．Balinski と Laraki は §13.4 でそのような場合についても議論しているが，この状況での社会的選好順序の構成方法とその戦略的操作との関連などはまだ研究の余地があると思われる．

参考文献

[1] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, John Wiley and Sons, New York, 1951.

[2]「脱・1 人 1 票―仏大統領選で実験，全候補者 6 段階評価，ヒントはワイン―」朝日新聞（2007 年 6 月 12 日朝刊）

[3] M. Balinski and R. Laraki, “Election by majority judgement: experimental evidence,” Cahier n° 2007–28, Laboratoire d’Econométrie, École Polytechnique (2007).

[4] M. Balinski and R. Laraki, *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*, MIT Press, Cambridge, 2010.

[5] M. Balinski and R. Laraki, “Judge: *Don’t vote*,” Cahier n° 2010–27, Laboratoire d’Econométrie, École Polytechnique (2010).

[6] J. Geanakoplos, “Three brief proofs of Arrow’s impossibility theorem,” *Economic Theory*, **26** (2005), 211–215.