# 3次元箱詰め問題に対する2つの構築型解法の効率的実現法

川島　大貴

（名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻　現所属：富士機械製造（株））
指導教員：柳浦睦憲 教授，今堀慎治 准教授

## 1. はじめに

切り出し・詰め込み問題とは，いくつかの対象物を互いに重ならないように与えられた領域内に配置する問題であり，多くの分野に応用を持つ代表的な生産計画問題の1つである．この問題は，対象物や領域の次元，形状，配置制約，目的関数等により非常に多くの種類の問題を含んでいる．

3次元箱詰め問題に対する代表的な構築型解法として，deepest–bottom–left (DBL) 法と3次元における best-fit (3BF) 法と呼ばれる2つの手法がある．DBL 法を単純に実装すると $n$ 個の直方体に対して $O(n^5)$ 時間を要するが，$O(n^4)$ 時間で実行できる方法が存在する．3BF 法を単純に実装すると，$t$ 種類 $(t \leq n)$ のいずれかを形状として持つ合計 $n$ 個の直方体に対して $O(tn^4)$ 時間を要する．

本研究では，これらの構築型解法に対して効率的な実現法を提案する．提案手法の計算量は，DBL 法については $O(n^3 \log n)$, 3BF 法については $O(tn^2 \log n)$ である．また，アルゴリズムの不要な探索を省略することで実計算時間を減らす工夫を加える．とくに，3BF 法では，この目的を実現するために分枝限定法を活用する．このような工夫を加えた結果，直方体数 $n = 100,000$ の大規模な問題例においても実用的な時間で解を得られることを確認した．紙数の都合上，本稿では回転を許さない3次元ストリップパッキング問題に対する 3BF 法に絞って説明を行う．

## 2. 3次元ストリップパッキング問題

3次元ストリップパッキング問題の入力は，直方体の容器の幅 $W$ と高さ $H$, および直方体集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ に含まれる各直方体 $i \in I$ の幅 $w_i$，高さ $h_i$，奥行き $d_i$ である．各直方体は $t$ $(\leq n)$ 種類の形状集合 $K = \{1, 2, \ldots, t\}$ のいずれかを形状として持つものとする．問題の目的は，すべての直方体を重ならないように容器に詰め込み，容器の可変長の奥行き $D$ を最小化することである．これは，充填率 $\mathrm{VU} = 100 \times \sum_{i \in I} w_i h_i d_i / WHD$ (%) の最大化と言い換えることもできる．座標の X 軸，Y 軸，Z 軸はそれぞれ直方体または容器の幅，高さ，奥行き方向に対応し，右（同様に上，手前）に行くほど X（同様に Y, Z）座標は大きくなるものとする．直方体 $i$ を配置したとき，$i$ の最も奥かつ下かつ左の頂点の座標を $(x_i, y_i, z_i)$ と表し，これを単に直方体 $i$ の座標と呼ぶ．

## 3. アルゴリズム

### 3.1 準備

複数の長方形が長方形領域に配置されており，新たにある長方形 $i$ を配置しようとするとき，2次元上の BL 点とは，長方形 $i$ を領域からはみ出さずに既配置の長方形に重なりなく配置できる位置の中で，Y 座標が最も小さい（Y 座標が同じときは X 座標が最も小さい）位置である．文献 [1] の Find2D-BL は，no-fit polygon と平面走査法を用いて2次元上の BL 点を発見するアルゴリズムであり，既配置の長方形の数を $m$ とすると，$O(m \log m)$ 時間で BL 点を見つけることができる．

同様に，3次元上の DBL 点とは，直方体 $i$ を直方体の容器からはみ出さずに既配置の直方体に重なりなく配置できる位置の中で，（Z 座標，Y 座標，X 座標）が辞書式順序の意味で最も小さい位置である．

### 3.2 3次元 best-fit 法の効率的実現法

3BF 法は，すべての未配置の直方体に対する DBL 点の中で（Z 座標，Y 座標，X 座標）が辞書式順序で最も小さい位置に，その位置に配置可能な直方体のなかで最も優先順位が高いものを配置する操作を，未配置の直方体がなくなるまで繰り返す方法である．そのような配置位置とそこに配置できる直方体集合は，たとえば未配置の直方体すべてに対して DBL 点を計算することで得られるが，以下ではこの計算を高速に行う方法を提案する．直方体の6面の中で X–Y 平面に平行な2つの面のうち，Z 座標の大きいほうをその直方体の前面，もう一方を背面と呼ぶ．また，Z 座標が0の X–Y 平面が容器の最も奥であるとし，これを容器の背面と呼ぶ．

ある直方体 $i$ を DBL 点に配置するとき，$i$ の背面は

  

ほかの直方体の前面または容器の背面と接する．よって，既配置の直方体の前面と容器の背面のZ座標の値に$z_i$の候補を絞ることができる．これらの候補の各Z座標$z'$（たとえば直方体$j$の前面であれば$z' = z_j + d_j$）におけるX–Y平面を$z'$の昇順に並べ，この順に従って以下の操作を行う．現在注目しているZ座標$z'$におけるX–Y平面と重複をもつ既配置の直方体をこの平面で切断したときの切断面を既配置の長方形とする．次に，すべての未配置の直方体の背面に対して，それを新たに置く長方形として2次元のBL点を探索し，Y座標の最も小さい（Y座標が同じときはX座標が最も小さい）BL点に配置可能な未配置の直方体のなかで最も優先順位の高いものを配置する．ただし，すべての未配置の直方体に対してBL点が見つからなかった場合は，現在の面に配置可能な直方体は存在しないため，次の面の探索に移行する．次の直方体の配置位置の探索は，最後に直方体を配置した面から始める．これらの操作を未配置の直方体がなくなるまで繰り返す．

直方体の形状が$t$種類あるような合計$n$個の直方体が与えられたとき$(t \leq n)$, 上述の実現法に基づく3BF法は$O(tn^2 \log n)$時間ですべての直方体の配置を得る．

### 3.3 分枝限定法を用いた高速化

分枝限定法を用いて3BF法が直方体を配置する位置とその位置に配置する形状を定める効率的な方法を提案する．未配置の直方体が残っている形状を優先順位の順に並べた順列を$\sigma$とし，$\sigma$の$u$番目から$v$番目までの形状の集合を$\sigma(u,v)$と表す．本研究で用いる分枝限定法の分枝操作は，順列$\sigma$を半分に分割することで実現する．各部分問題に対して直方体配置位置の上下界値を求め，その部分問題の最適解が得られるか，またはその部分問題の最適解が元の問題の最適解とならないことがわかれば，その下の節点の探索を省略する．

下界値の計算のため，直方体$r(u,v)$を，そのX–Y平面への射影が$\sigma(u,v)$に含まれる直方体のいずれの射影よりも小さいか等しい直方体とする．このとき，$r(u,v)$のBL点は$\sigma(u,v)$に含まれる直方体のいずれのBL点よりもY座標が小さいか，Y座標が等しくX座標が小さいか等しい．したがって，このBL点の座標は現在の部分問題の下界として作用する．この下界値テストで終端できなかった部分問題に対しては，直方体$r(u,v)$のBL点に対して$\sigma(u,v)$に含まれる直方体が配置可能か否かの確認を優先順位の高い順に行う．配置可能な直方体$i$を初めて見つけたとき，この位置に直方体$i$を配置することで集合$\sigma(u,v)$に対応する部分問題の最適解が得られる．また，これは元の問題の上界を与える．

## 4. 計算実験

提案手法の性能評価のため，$O(tn^4)$時間で動作する単純な3BF法3BF-Simple，本稿の3.2節で提案したアルゴリズム3BF-NFP, これに3.3節の分枝限定法のアイデアを組み込んだアルゴリズム3BF-BBの計算時間を比較する．計算実験はDell PowerEdge T300 (Xeon X3363 2.83 GHz, 6 MB cache, 24 GB memory) 上で行った．実験に使用した問題例は，最適解において充填率が100%となる問題例であり，ほぼすべての直方体が相異なる形をしているため$(t \simeq n)$，提案手法の最悪計算量は$O(n^3 \log n)$となる．

**表1** 3次元best-fit法の実装方法による計算時間の比較

| | | time (sec) | | |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | VU (%) | 3BF-Simple | 3BF-NFP | 3BF-BB |
| 50 | 64.08 | 0.02 | 0.00 | 0.00 |
| 100 | 71.24 | 0.91 | 0.00 | 0.00 |
| 500 | 80.02 | 4189.57 | 0.01 | 0.00 |
| 1000 | 78.23 | — | 16.05 | 0.05 |
| 5000 | 90.42 | — | 606.15 | 1.06 |
| 10,000 | 92.61 | — | 2014.90 | 4.09 |
| 50,000 | 94.00 | — | — | 110.21 |
| 100,000 | 94.95 | — | — | 560.17 |

計算実験の結果を表1に示す．表中，$n$，VU (%)，time (sec)は，直方体数，充填率，計算時間（秒）をそれぞれ表す．なお，これら3つの手法によって得られる解（直方体の配置）は等しく，表中のVUは3通りの手法共通の充填率を表す．制限時間を5000秒とし，表中の「—」は制限時間の超過を意味する．表より高速化のアイデアの効果は非常に大きいことが確認できる．

### 参考文献

[1] S. Imahori, Y. Chien, Y. Tanaka and M. Yagiura: Enumerating bottom-left stable positions for rectangles with overlap, 第9回情報科学技術フォーラム 講演論文集（第1分冊），25–30, 2010.