

# 選挙区割の最適化と列挙索引化

堀田 敬介

選挙を実施するためには選挙区を事前に決める必要がある。選挙区の画定には議員定数配分と区割画定の作業が必要となる。日本の国政選挙における区割について、近年最も重視されている評価軸は一票の重みの格差である。例えば衆議院小選挙区制においては、制度実施以来、一票の格差が2倍を超えている状況が続く、批判の対象となっている。制度設計、画定作業の効率化、政治的評価・検証など選挙区画定には解決すべき問題が山積しているが、本稿では最適化と列挙がこれらの問題にどのように有効であるのかを概観する。

キーワード：選挙制度、議員定数配分、区割画定、一票の格差、集合分割、グラフ分割、列挙索引化

## 1. はじめに

1994年衆議院議員選挙に小選挙区制が導入されて以来、「一票の格差」が2倍を超えている状態が続いている。日本においてはこの「一票の格差」が非常に問題とされ、日本国憲法14条1項などに違反しているとして、選挙の度に訴訟が起こされている。最近では2009年夏の衆議院議員選挙の無効請求について、2011年3月23日最高裁が小選挙区制導入後初めて「違憲状態」の判決を出した。批判は多くあり、是正が必要なことは多くの人が考えていると思うが、ではどこをどのように制度改革して格差縮小を目指すのか？という議論はまだまだ弱いように思う。本稿では、最適化や列挙がこの問題にどう活用できるのか見ていきたい。

## 2. 定数配分

議員定数配分では、よく知られた剰余方式と除数方式、およびそのバリエーションが用いられることが多い。日本の衆議院小選挙区制（定数300人）では、「一人別枠方式」で47議席を配分し、残り253議席を「最大剰余法」を用いて配分する。同選挙制度を対象として、代表的な剰余方式と除数方式による定数配分結果を示す<sup>2</sup>。表1の各方式において、上段は「一人別枠」を用いない場合、下段は用いる場合の各都道府県一選挙区あたり平均人口の最大と最小、およびその比を示している。なお、区割画定後の最大人口選挙区と最小人口選挙区の人口比を本稿では「一票の格差」と呼ぶ。

表1 定数配分による一票の格差の下限值

剰余方式 最大	除数方式					
	切上	調和	幾何	算術	切捨	
588,418	465,765	500,631	588,418	588,418	785,873	
358,177	294,209	294,209	358,177	358,177	393,457	
1.643	1.583	1.702	1.643	1.643	1.997	
492,383	526,470	506,221	506,221	493,900	465,765	
268,823	196,139	238,785	254,865	261,958	294,209	
1.832	2.684	2.120	1.986	1.885	1.583	

一人別枠方式をやめれば、剰余法や除数法で1.643倍が達成される。現行制度（一人別枠+最大剰余）では1.832倍である。1.583倍を達成するものの、切上・切捨法は両極端なので採用しづらい<sup>3</sup>。

各手法は定性的な性質において一長一短で、決定的によい方法は知られていない[1, 5, 17]。格差を縮小することがお題目でなく本当に最重要ならば、定性的な性質や各種パラドクスには目をつぶり、それを目的関数とした最適化問題を解けばよい。

都道府県  $i \in V = \{1, 2, \dots, 47\}$  の人口を  $p_i$  とし、定数  $M = 300$  に対し、都道府県  $i$  への配分議席数の候補を  $m_{ij}$ , ( $j = \{1, 2, \dots\}$ ) とする。 $z_{ij}$  を都道府県  $i$  の各配分議席候補に対応する  $\{0, 1\}$ -変数とすれば、

$$\min. u/l \quad (1)$$

$$\text{s.t. } l \leq \sum_{j_i} \frac{p_i}{m_{ij_i}} z_{ij_i} \leq u \quad (i \in V) \quad (2)$$

$$\sum_{j_i} z_{ij_i} = 1 \quad (i \in V) \quad (3)$$

<sup>1</sup> 最高裁判所の判決文などでは「格差」ではなく「較差」の字が用いられる。

<sup>2</sup> 本文で使用される人口はすべて2010年度国勢調査速報値で、東日本大震災2011年3月11日以前の数値である。同様に区割画定要素となる市区郡は2011年3月末時点の、大震災前に確定していた行政界に基づいている。

<sup>3</sup> しかし、参議院比例代表の当選決定方法には切捨法が使われている。

$$\sum_i \sum_{j_i} m_{ij_i} z_{ij_i} = M \quad (4)$$

$$\sum_{j_i} m_{ij_i} z_{ij_i} \leq \sum_{j_{i'}} m_{i'j_{i'}} z_{i'j_{i'}} \quad (i, i' \text{ s.t. } p_i \leq p_{i'}) \quad (5)$$

$$z_{ij_i} \in \{0, 1\} \quad (i \in V) \quad (6)$$

となる。式 (3) で、都道府県  $i$  ごとに、配分議席候補数  $m_{ij_i}$  のうち 1 つだけを採用し、式 (2) で、配分議席候補数に対する一選挙区当たり平均人口 ( $p_i/m_{ij_i}$ ) が上下限 ( $u, l$ ) 内に収まることを要求し、式 (4) でその合計が  $M = 300$  議席となるようにする。式 (5) は、人口に対する配分議席数の単調性を満たすために必要となる。

定数配分の最適化モデルでは、都道府県  $i$  の配分議席候補  $m_{ij_i}$  を、割当分特性を満たすように決める場合と、そうしない場合の 2 種類が考えられる。割当分特性を満たすとは、例えば北海道 ( $i = 1$ ) の人口比例値は 12.902 人なので、 $m_{1j_1} = 12, m_{1j_2} = 13$  の 2 つのみを候補とするということである。割当分特性を要求する場合、全都道府県で候補議席数はちょうど 2 つ ( $j_i = 1, 2$ ) となる。ちなみに、表 1 の剰余方式は割当分特性を満たすが、除数方式は満たさない [1, 5]。

割当分特性を満たさないモデルでは、 $l \geq \bar{l}, u \leq \bar{u}$  となる一選挙区の人口下限  $\bar{l}$ 、上限  $\bar{u}$  を設定し、都道府県ごとにその範囲内に入るすべての配分議席候補を考慮する。よって、都道府県ごとにその数は異なる。

このモデルにおける一票の格差の下限は表 2 となる<sup>4</sup>。総定数  $M = 300$  のもとでは割当分特性を満たさない場合でも、1.583 倍が限界であることがわかる。

ちなみに、総定数にも自由度をもたせる (式 (4) を範囲にする) と、 $\pm 20$  程度なら限界値は 1.5 倍前後となる。これが、他の制約を緩めて都道府県境をまもる場合の限界である。

都道府県境を緩和する場合は、「どこを」「どのよう

表 2 最適化による一票の格差の下限値

	割当分特性	
	満たす	満たさず
max	470,631	465,765
min	294,209	294,209
rato	1.600	1.583

<sup>4</sup>  $u^*, l^*$  に該当する以外の 45 都道府県については、一票の格差縮小の観点からは、目的関数を  $\min u$  として解き直したほうがよい。

に」緩和するかでさまざまなバリエーションが考えられる [13]。また、剰余方式や最適定数配分モデルなどでは、合県前と後で配分議席が異なるパラドクスが起こる [1, 17] ので、県境緩和の実施には細心の注意を要する (やるべきではない)。

一票の格差縮小を真剣に考える場合は、これら定数配分における制約と目的、以降に述べる区割画定の制約と目的を勘案し、定数配分と区割画定の順番を変えることも考慮して総合的に判断し、決定することが求められる [10, 11, 12]<sup>5</sup>。同時に、一票の格差を縮小させることだけに注力すると、複雑でわかりにくい制度設計に陥りやすいため、バランス感覚が大事である。

### 3. 区割画定

都道府県への議席配分後、区割画定を行う。現行では衆議院議員選挙区画定審議会が総合的に判断して決定しているようである。最適区割導出の解法にはさまざまなモデルが考えられるが、実用上は集合  $m$  分割型とグラフ  $m$  分割型が有用である [9, 10]。

選挙区候補数の明らかな上界は、市区郡数を  $n$  とすれば、空集合を除いて  $2^n - 1$  である<sup>6</sup>。選挙区に飛び地があることは原則認められないので実際にはもっと少ない。集合  $m$  分割型では、選挙区候補を全列挙するか、陰列挙を使わなければ定式化できない。根本・堀田は第  $k$  妥当性のアイデアで全列挙定式化を実現している [10, 14]。さらに、第 2 妥当選挙区に基づく  $\{0, 1\}$ -変数固定などを行い解を導出している [9, 10]。

**定義** 一選挙区当たり人口の上下限値  $\bar{u}, \bar{l}$  に対し、

1. 選挙区  $j$  (人口  $q_j$ ) が第 1 妥当であるとは  $\bar{l} \leq q_j \leq \bar{u}$  を満たすこと
2. 選挙区  $j$  が第 2 妥当であるとは、以下を満たすこと。ただし、 $j'$  は隣接グラフから選挙区  $j$  を除くことで誘導される連結部分グラフである。

$$\forall j', \exists i \in \{1, \dots, m-1\}, \bar{l} \leq \frac{q_{j'}}{i} \leq \bar{u}.$$

上下限値  $\bar{u}, \bar{l}$  は、作成方針 [8] を尊重する場合、当該都道府県の一選挙区平均人口の  $4/3$  倍と  $2/3$  倍を使う。いくつかの都道府県について、第 1, 2 妥当選挙区の数表 3 のとおり。

東京都・神奈川県・大阪府の飛び地なし選挙区候補数の「不明」は、工夫しないと数えられないほど大き

<sup>5</sup> 現行の「区割り案の作成方針 [8]」では、歴史的経緯から 2 倍未満におさえることを当面の目標とし、それ以上縮小させることについては考慮されていない。

<sup>6</sup> 配分議席数  $m \geq 2$  なら全集合も除く。

表3 全候補，飛び地無，第1 妥当，第2 妥当選挙区数

都道府県	東京都	北海道	青森県
人口	13,161,751	5,507,456	1,373,164
議席数	29	12	3
市区郡数	56	36	25
$2^n - 1$	$7.2 \times 10^{16}$	68,719,476,735	33,554,431
飛び地無	不明	3,971,008,416	2,768,310
第1 妥当	3,145	1,045	106,025
第2 妥当	1,981	716	2,637
都道府県	神奈川県	新潟県	山梨県
人口	9,049,500	2,374,922	862,772
議席数	20	6	2
市区郡数	50	38	19
$2^n - 1$	$1.1 \times 10^{15}$	274,877,906,943	524,287
飛び地無	不明	7,227,585,333	153,825
第1 妥当	565	185,554	92,863
第2 妥当	415	38,832	4,638
都道府県	大阪府	岡山県	佐賀県
人口	8,862,896	1,944,986	849,709
議席数	20	5	2
市区郡数	69	28	17
$2^n - 1$	$5.9 \times 10^{20}$	268,435,455	131,071
飛び地無	不明	28,711,986	5,356
第1 妥当	6,814	182,949	1,494
第2 妥当	6,025	4,460	20

表4 一票の格差の限界値

	割当分特性	
	満たす	満たさず
max	561,211	561,211
min	290,637	290,637
rato	1.931	1.931
分割数	15	15

く70億以上と推測される。

表3より，第 $k$  妥当選挙区数は，人口・議席数・市区郡数が大きいほど多いわけではないことがわかる。例えば，東京都・神奈川県・大阪府は人口・議席数・市区郡数とも大きい，第1 妥当選挙区数は高々数千であるのに対し，青森県・山梨県の第1 妥当選挙区数は10万前後で，新潟県・岡山県は18万以上存在する。

候補選挙区数は，隣接グラフの隣接具合と人口相対規模・分布によるところが大きい。特に，一選挙区当たり平均人口と比べた場合に，各市区郡の人口がうまい具合にそろっている（例えば神奈川県など）と，第 $k$  妥当選挙区数はかなり少なくなる。

この候補選挙区集合から，配分議席数に等しい $m$  個の組合せを分割になるよう選ぶ問題が区割画定問題である。2010年人口，2011年行政界隣接グラフにおける一票の格差の最適解は，表4となる[15]。

定数配分において，割当分特性を満たす場合でも満たさない場合でも，最適区割による一票の格差の限界

値は同じ1.931倍となった。表において「分割数」とは，作成方針に基づいて例外的に市区郡分割を行った場合に，実際に分割される市区郡の数である。現行区割（2002年画定）では23の市区郡が分割されていて<sup>7</sup>，一票の格差2.5倍を超えているが，少なくとも8市区郡については必要な分割なのが見直したほうがよいことがわかる。

#### 4. 列挙

最適解は，制度改善や現行区割の妥当性，一票の格差限界値などのさまざまな政治判断の指標として有用であるが，実用に耐える区割を模索する場合は区割（集合分割）の列挙ができると作業の手助けとなる。一票の格差の縮小は急務だが，現実的にはそれ以外にもさまざまな指標（思惑？）のもとで区割画定作業が行われるためである。また，最適区割と現行区割の間にある区割の全列挙がなされていれば，政治的にも最終的に選ばれた区割の妥当性判断や，現行区割の検証に使える。

最適解が求まった後で，第 $k$  最適解 ( $k = 1, 2, \dots$ )<sup>8</sup> を求めるには，例えば最適解のみを解空間から除去する制約を追加すればよい[4]。集合 $m$  分割モデルでは，最適区割を $S^*$ ，その構成選挙区に対応する $\{0, 1\}$ -変数を $z_i^*$  とすると，

$$\sum_{i \in S^*} z_i^* \leq m - 2 \quad (7)$$

を制約に追加すればよい。分割の定義から，最適区割と異なる区割を見つけるには，選挙区を必ず2個以上入れ替える必要があるため，右辺は $m-1$ ではなく $m-2$ となる。例えば，5選挙区で15, 19, 245, 341, 610番目が最適区割構成選挙区なら， $z_{15} + z_{19} + z_{245} + z_{341} + z_{610} \leq 3$ を追加する。

いくつかの都道府県について結果を示す（表5～8）。

表中の「個数」とは最適解が同じ解の個数である。例えば，神奈川県第4 最適解は最大最小人口選挙区の人口 $u^*, l^*$  が同じで，選挙区の組合せが異なる解が38個あるということである。

第 $k$  最適解を求める際，現在はソルバーを用いているため，制約式追加後に解き直すという非効率なことをしている。最適区割と現行区割<sup>9</sup>を所与として，その

<sup>7</sup> 2002年画定時の分割数が23であり，Wikipediaによると大規模市町村合併後の現在は分割数が35となるようである。

<sup>8</sup> 最適解が同じ解が複数存在しうるので， $k = 1$ もある。

<sup>9</sup> 現行区割は，最適区割を求める時点の市区郡要素と配分

表 5 宮城県 ( $m = 5, n = 28, p = 2, 347, 975$ )

$k$	$u^*$	$l^*$	$r^*$	個数
1	500,172	458,795	1.09019	2
2	502,993	455,974	1.10312	2
3	500,172	445,747	1.12210	1
4	500,172	445,533	1.12264	1
5	500,172	443,198	1.12855	1
6	502,512	443,198	1.13383	1
7	502,993	443,198	1.13492	1
8	502,251	440,014	1.14144	1
9	502,512	440,014	1.14204	5
10	504,141	440,014	1.14574	1

表 6 群馬県 ( $m = 5, n = 22, p = 2, 008, 170$ )

$k$	$u^*$	$l^*$	$r^*$	個数
1	415,002	387,999	1.06960	1
2	419,772	387,999	1.08189	1
3	415,002	374,566	1.10795	1
4	419,772	374,566	1.12069	1
5	425,146	374,566	1.13504	1
6	434,119	374,566	1.15899	1
7	422,175	359,507	1.17432	2

表 7 神奈川県 ( $m = 20, n = 50, p = 9, 049, 500$ )

$k$	$u^*$	$l^*$	$r^*$	個数
1	505,912	404,236	1.25153	10
2	505,912	403,676	1.25326	6
3	505,912	403,571	1.25359	3
4	505,912	399,315	1.26695	38
5	505,912	394,580	1.28215	—

表 8 岐阜県 ( $m = 5, n = 36, p = 2, 081, 147$ )

$k$	$u^*$	$l^*$	$r^*$	個数
1	417,830	413,454	1.01058	2
2	417,830	411,895	1.01441	2
3	418,821	411,895	1.01681	2
4	421,527	413,239	1.02006	1
5	421,646	413,239	1.02034	1
6	422,051	413,239	1.02132	1
7	422,271	413,239	1.02186	1
8	422,778	413,239	1.02308	1
9	421,527	411,895	1.02338	2
10	423,000	413,239	1.02362	1

間の全区割列挙が効率的にできるとなおい。フロンティア法 [16] などはその候補となりうる。

議席数が異なる場合があるので、必ず現行区割を利用できるわけではない。その場合は最適区割の何倍までかを与えて求めることになる。

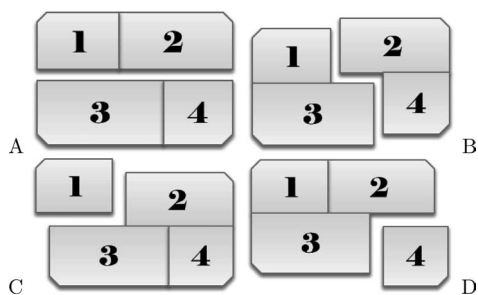


図 1 区割 (A, B, C, D) [ $n = 4, m = 2$ ] の乖離度?

表 9 図 1 の乖離度

	A	B	C	D
A	0	1/2	1/3	1/3
B		0	1/3	1/3
C			0	5/12
D				0

## 5. 区割の比較と列挙索引化の実用性

一票の格差の順で区割の列挙ができたからといって、それがすぐに画定作業に役立つわけではない。格差以外の特徴づけで分類されてはじめて意味を持つ。

例えば、重要な指標として「現行区割との差異が小さい」ことが求められる。現行制度では国勢調査の度（原則 10 年、審議会の判断により 5 年）ごとに見直しが行われる。平成の大合併が一段落した現在、人口変動・人口移動が一票の格差に影響を及ぼす [13]。しかし、一票の格差が拡大するからといって、見直しの度に選挙区が大幅に変わってしまえば、選挙実施の負担が増し、有権者や立候補者も混乱するであろう。したがって、一票の格差は多少犠牲になっても、「なるべく長い年月同じ区割を使いたい」という欲求が存在するのである。

区割（集合分割）の類似度を測定する指標が必要となる。しかも、構成要素である市区郡や配分議席が異なる場合でも、類似度比較ができなければならない。構成要素については、比較対象となる 2 つのそれぞれの細かいほうにあわせることで対処はできる。

例えば、市区郡数  $n = 4$ 、選挙区数  $m = 2$  のとき、図 1 の A~D の 4 つの区割について、どれとどれが似ていて、どれとどれが似ていないと言えるだろうか？

素朴には、市区郡  $i \in \{1, \dots, n\}$ 、選挙区数  $m_A, m_B$  の区割  $A(A_1, \dots, A_{m_A})$  と  $B(B_1, \dots, B_{m_B})$  の乖離度を

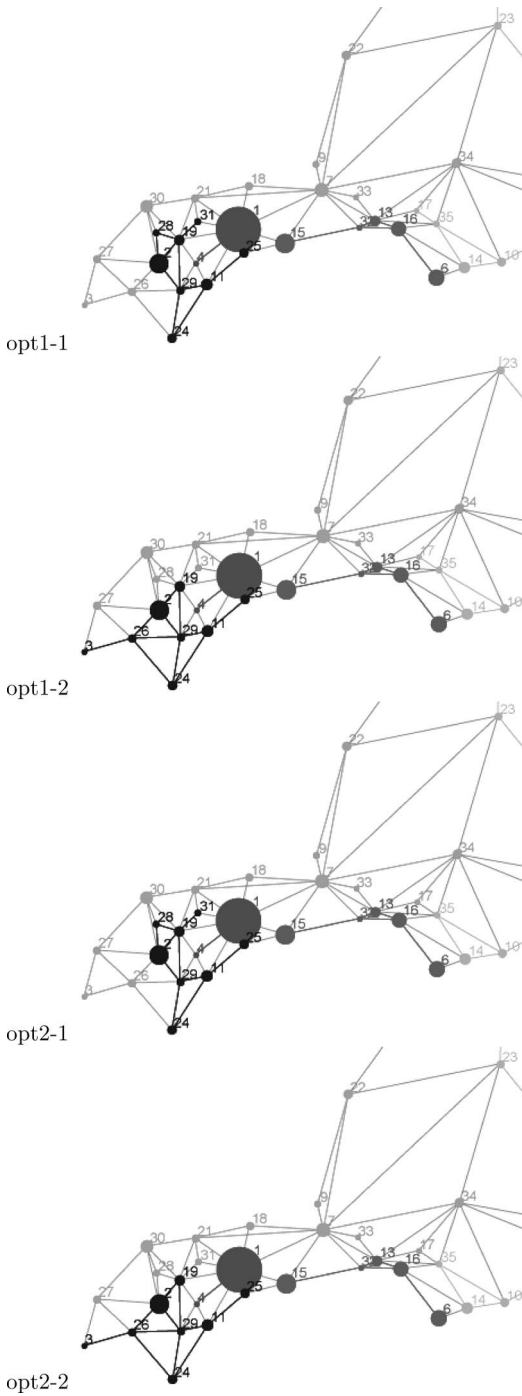


図2 岐阜県：4区割 [n = 36, m = 5] の乖離度

$$d(A, B) = \frac{1}{n} \sum_i d_i(A_j, B_i) \quad (8)$$

$$d_i(A_j, B_i) = \frac{|A_j \setminus B_i| + |B_i \setminus A_j|}{|A_j \setminus B_i| + |B_i \setminus A_j| + 2|A_j \cap B_i|} \quad (9)$$

と定義する。ここで  $A_j, B_i$  はそれぞれ区割  $A, B$  にお

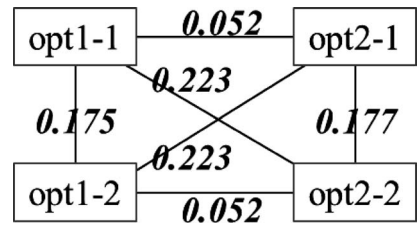


図3 岐阜県：4区割 [n = 36, m = 5] の乖離度

いて市区郡  $i$  を含む選挙区を指す。対応する市区郡ごとにその市区を含む選挙区を、共通部分とそれ以外で比較し、平均をとる。完全に同じ場合に限り 0 となる。この定義では、図1の例では  $A$  と  $B$  が最も似ていない、と判定される。その意図するところは、任意の市区郡  $i$  について、 $i$  を含む比較対象の2つの選挙区  $A_j, B_i$  が  $i$  以外の共通部分を持たないとき、乖離度最大とするということである。定義から  $d(A, B) \in [0, 1]$  となる。利点は、議席数  $m$  が異なっても計算可能なことである。

図2は、岐阜県の最適解 (opt1-1, opt1-2) と第2最適解 (opt2-1, opt2-2) の左下8割程度の隣接グラフである。

これらの乖離度  $d(\cdot, \cdot)$  を計算すると図3となる。

この中では opt1-1 と opt2-1, opt1-2 と opt2-2 がそれぞれ最も似ている (0.052) と判定されるが、実際にこの各々の2区割は、1市 (#17) の所属選挙区が異なる以外すべて同じ構成である。一票の格差の点では、opt1-1, opt1-2 と opt2-1, opt2-2 の2グループに分かれるが、類似度という点では opt1-1, opt2-1 と opt1-2, opt2-2 の2グループに分類される。

現行区割との類似度以外では、例えば市区郡の結びつき (経済圏・通勤圏・地形その他) の強弱を何らかの指標化し、隣接グラフの枝の重みとして区割の比較をすることなどが考えられる。

このような指標や、前記の乖離度、および一票の格差により、列挙された区割の索引化が可能となれば、画定作業にはとても有効な情報提供となるであろう。現在、手探りで行われていると推測される区割画定作業であるが、この索引化・呼び出しシステムがあれば、作業効率・能率が劇的に改善され、政治的不平等・公平さという本来十分に議論されるべき議題に時間をとることが可能となるであろう。BDD/ZDD は、コンパクトな保持・索引化ができる方法として今後期待される手法の一つである [16]。

高速列挙が困難な場合、一票の格差、区割の類似度、

その他の指標で分類しつつ、数え上げをすることができるだけでも有効である。比較検討すべき対象区割がどの程度の個数、各分類に存在するのかがわかっているならば、気になるものについて求解する、という手順での作業が可能となるからである。

## 6. おわりに

区割の高速列挙、コンパクト索引化が可能となれば、画定作業には非常に有効な情報提供となるし、政治的に比較検証ができ、ゲリマンダーなどの好ましくない思惑を排除できる可能性がある。現在の画定作業では、「なぜ最終的にこの区割を使うことになったのか？」を明確に説明できていないように思う。

最適化は、限界格差の情報提供により、画定作業・比較検証という点で貢献した。列挙索引化は、幾つかの重要な指標での分類索引化が可能となれば、画定作業・比較検証に大いに貢献する。これまでおそらく「よくわからない」ことを主な理由として不透明で非効率であった選挙区画定作業に、最適化と列挙索引化が風穴を明けることになれば望外の喜びである。

**謝辞** 執筆の機会をいただきました北海道大学 湊真一先生、および貴重なご助言・ご指摘をいただきました編集委員の方に感謝いたします。

## 参考文献

[1] M. L. Balinski and H. P. Young, *Fair Representation*

2nd ed., Brookings, 2001.

- [2] A. Mehrotra, E. Johnson and G. L. Nemhauser, An optimization based heuristic for political districting, *Management Science* **44**(8), 1100–1114, 1998.
- [3] J. C. Williams, Jr., Political redistricting: A review, *Papers in Regional Science* **74**(1), 13–40, 1995.
- [4] 宇野毅明, 列挙問題, 第  $K$  最適解, 久保他: 応用数理論計画ハンドブック, **14**(4), **14**(5), 886–953, 2002.
- [5] 大山達夫監訳, 公共政策 OR ハンドブック第 15 章議員定数配分, 朝倉書店, pp. 546–581, 1998.
- [6] 坂口利裕, 和田淳一郎, 選挙区割り問題, オペレーションズ・リサーチ, **48**(1), 30–35, 2003.
- [7] 佐藤令, 衆議院及び参議院における一票の格差, 国立国会図書館調査と情報第 714 号, 1–12, 2011.
- [8] 田中宗孝, 政治改革 6 年の道程, ぎょうせい, 1997.
- [9] 根本俊男, 堀田敬介, 区割画定問題のモデル化と最適区割の導出, オペレーションズ・リサーチ, **48**(4), 300–306, 2003.
- [10] 根本俊男, 堀田敬介, 選挙区最適区割問題のモデリングと厳密解導出, 第 15 回 RAMP シンポジウム論文集, 104–117, 2003.
- [11] 根本俊男, 堀田敬介, 衆議院小選挙区制における一票の重みの格差の限界とその考察, 選挙研究, **20**, 136–147, 2005.
- [12] 根本俊男, 堀田敬介, 一票の重みの格差から見た小選挙区数, 選挙研究, **21**, 169–181, 2006.
- [13] 根本俊男, 堀田敬介, 平成大合併を経た衆議院小選挙区区割環境の変化と一票の重みの格差, *TORSJ* **53**, 90–113, 2010.
- [14] 堀田敬介, 市区郡分割を考慮した選挙区画定問題の最適化モデル, 情報研究, **43**, 41–60, 2010.
- [15] 堀田敬介, 衆議院議員小選挙区制最適区割 2011, 情報研究, **47**, 43–83, 2012.
- [16] 湊真一, BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法, オペレーションズ・リサーチ, **57**(11), 597–603, 2012.
- [17] 大和毅彦, 議員定数配分方式について, オペレーションズ・リサーチ, **48**(1), 23–29, (2003).