リアルオプション理論と設備投資問題
—確率制御アプローチ—

後藤　允

本稿では，リアルオプション理論を設備投資問題に応用した際の定式化について，確率制御の視点から解説していく．まずはじめに，ある設備を建設するという単純な投資問題をとおして，リアルオプション理論を説明する．次に，建設された設備の規模を拡張また縮小していく投資問題を特異制御アプローチから説明する．さらに，規模調整に対する固定費を想定して，在庫管理でも使われるインパルス制御アプローチによって説明する．最後に，インパルス制御アプローチによる設備投資問題の限界について解説する．

キーワード：リアルオプション，設備投資問題，特異制御，インパルス制御

1. はじめに

リアルオプションという言葉は，Myers [6] によって提唱されたといわれている．その意味は，金融商品のオプションがもつ意思決定の柔軟性と，企業の実物資産への投資に対する意思決定の柔軟性の類似にある．しかし，Myers の提唱から 35 年を経た現在では，単なるコールオプションとの類似では説明できないほどに複雑な投資問題へ応用されている．むしろ，Dixit and Pindyck [2] のタイトルである“不確実性下の投資意思決定”という言葉のほうが，リアルオプションの意味を広義に説明しているといえる．

本稿では，不確実性下の投資問題のなかでも設備投資問題への応用に注目し，確率制御の視点から定式化について解説していく．特に，オペレーションズ・リサーチでも馴染みのある在庫管理問題に使われるインパルス制御アプローチとの関係性を追求する．なお紙幅の関係上，確率制御の数学的な厳密性は省略するので，各原著論文を参照願いたい．

2. 単純な設備の建設問題

まず，単純な投資問題から考える．企業がある設備への投資を検討しており，投資費用が I，設備の建設後に得られる時間当たり利益が不確実で，

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x > 0 \quad (1)$$

の幾何ブラウン運動に従っている，あるいは予測されるとする．このとき企業は，利益水準が十分に大きくなってから投資するのが合理的なので，この投資への価値関数は，企業が設定する割引率を ρ とすると，

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}\left[\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} X_t \mathrm{d}t - \mathrm{e}^{-\rho\tau} I\right] \quad (2)$$

という最大化問題となる．(2) 式は，投資時刻 τ を全体集合 $\mathcal{T}$ の中から選ぶ最適停止問題となっており，この場合の τ は，

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \geq X^*\} \quad (3)$$

という投資閾値 X^* への初到達時刻となる．したがって，最適停止時刻 τ を求める問題は，閾値 X^* を求める問題に変換されていることになる．

求める解は，$x \geq X^*$ のとき即座に設備へ投資するので，明らかに

$$V(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} X_t \mathrm{d}t - I\right] = \frac{x}{\rho - \mu} - I \quad (4)$$

となる．$x < X^*$ のときは，伊藤の公式とベルマンの最適性原理によって，

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) + \mu x V'(x) - \rho V(x) = 0 \quad (5)$$

が成立する．この常微分方程式の一般解は，

$$V(x) = A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} \quad (6)$$

となる．ただし $\gamma_1 > 1, \gamma_2 < 0$ は，ともに特性 2 次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma - \rho = 0 \quad (7)$$

ごとう　まこと
北海道大学大学院経済学研究科
〒 060–0809 北海道札幌市北区北 9 条西 7 丁目

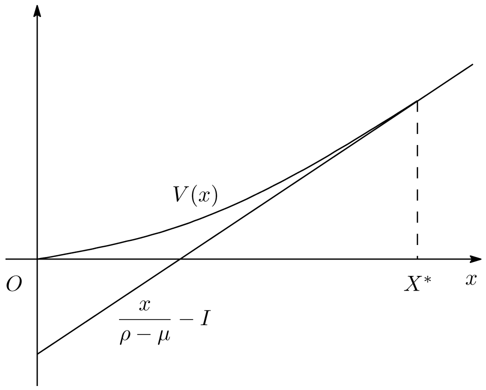

図 1　単純な投資オプションの価値関数

の根である．ここで $V(x)$ に対する収束条件より，

$$V(0)=0 \tag{8}$$

であり，$A_2=0$ でなければならない．したがって，(2) 式は

$$V(x)=\begin{cases} A_1 x^{\gamma_1}, & x<X^*, \\ \dfrac{x}{\rho-\mu}-I, & x \geq X^*, \end{cases} \tag{9}$$

となる．

(9) 式は，求めるべき X^* に加えて，未知定数として A_1 があるため，境界条件が 2 つ必要である．1 つ目は，X^* において投資するというバリュー・マッチング条件

$$A_1(X^*)^{\gamma_1}=\frac{X^*}{\rho-\mu}-I \tag{10}$$

であり，2 つ目は X^* における最適性を保証するスムース・ペースティング条件

$$\gamma_1 A_1 (X^*)^{\gamma_1-1}=\frac{1}{\rho-\mu} \tag{11}$$

である．これら 2 つの境界条件から，

$$A_1=\left(\frac{X^*}{\rho-\mu}-I\right)\left(\frac{1}{X^*}\right)^{\gamma_1} \tag{12}$$

と最適閾値

$$X^*=\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}(\rho-\mu)I \tag{13}$$

が得られる．

図 1 は，(9) 式の例を描いたものである．$V(x)$ はコールオプションのような形状をしており，Myers の提唱の由来が結果にも表れていることがわかる．

3.　設備の規模選択問題：特異制御

次に，すでに建設された設備の規模を拡張または縮小していく問題を考える．この問題は，規模の選択問題 (capacity choice problem) と呼ばれ，設備投資問題の主要テーマの 1 つであり，リアルオプション関連の論文も数多く発表されている．ここでは，興味深い解法を提案した Guo and Tomecek [4] を参考に，設備の規模選択問題を説明する．

本節では，設備の規模と利益に関係をもたせるために，生産物価格を X_t，設備規模を Y_t，生産量を

$$H(Y_t)=Y_t^{\beta}, \qquad \beta\in(0,1] \tag{14}$$

として，時間当たりの利益を Y_t の凹関数

$$\Pi(X_t,Y_t)=H(Y_t)X_t \tag{15}$$

とする．生産物価格が幾何ブラウン運動 (1) に従い，企業は生産物価格の不確実性下で設備の規模を拡大または縮小することによって，期待利益の最大化を目指す．

設備の規模調整を，時刻 t までの拡大量 ξ_t^+ と縮小量 ξ_t^- で表すと，設備規模は初期値 $Y_0=y$ を使って，

$$Y_t=y+\xi_t^+-\xi_t^- \tag{16}$$

と書け，規模の上下限を $[a,b]$ とする．さらに，規模の拡大と縮小にかかる費用を単位当たりそれぞれ $K_1>0$, $K_0<0$ とする．縮小の費用が負であるとは，余剰設備の売却によって収入があるという意味である．

このとき，企業の設備規模選択に関する価値関数は，

$$\begin{aligned} V(x,y)=\sup_{(\xi^+,\xi^-)\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\Bigg[&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\Pi(X_t,Y_t)\mathrm{d}t \\ &-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}K_1\mathrm{d}\xi_t^+ - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}K_0\mathrm{d}\xi_t^-\Bigg] \end{aligned} \tag{17}$$

となる．(17) 式は，最適な規模調整の組 (ξ^+,ξ^-) を全体集合 $\mathcal{A}$ の中から選ぶ特異制御問題となっている．企業にとっては，価格が高くなれば規模を拡大して生産量を増やす動機づけがあり，価格が低くなれば生産するよりも余剰設備として売却したほうがよい．

通常，この種の特異制御問題は解析解を得ることが難しいが，Guo and Tomecek [4] ではスイッチング問題に変換することによって，最適な規模調整戦略を準解析的に求めている．具体的には 2 つのレジーム $\kappa_n\in\{0,1\}$ を考え，拡大後のレジームを 1，縮小後のレジームを

0 とする．さらに，n 回目にレジームがスイッチする時刻を τ_n とし，スイッチング制御 $\alpha = (\tau_n, \kappa_n)_{n\geq 0}$ とレジーム定義関数

$$I_t = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n \mathbf{1}_{\{\tau_n < t \leq \tau_{n+1}\}}, \qquad I_0 = \kappa_0 \tag{18}$$

を使って，スイッチング問題

$$\begin{aligned} &v_k(x,z) \\ &= \sup_{\alpha\in\mathcal{B},\kappa_0=k} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} H'(z) X_t I_t \mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho\tau_n} K_{\kappa_n}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

を定義する．z の意味は，設備規模をある $Y_t = z$ で考えるということである．証明は省略するが，特異制御問題 (17) はスイッチング問題 (19) を使って

$$V(x,y) = \frac{H(a)x}{r-\mu} + \int_a^y v_1(x,z)\mathrm{d}z + \int_y^b v_0(x,z)\mathrm{d}z \tag{20}$$

と書ける．すなわち，スイッチング問題 (19) を解けば，もとの特異制御問題 (17) が求まるということである．

(18) 式より，スイッチング問題 (19) は連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_0''(x,z) + \mu x v_0'(x,z) - \rho v_0(x,z) = 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_1''(x,z) + \mu x v_1'(x,z) - \rho v_1(x,z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + H'(z)x = 0 \end{cases} \tag{21}$$

を満たす．拡大と縮小の閾値をそれぞれ $G(z)$, $F(z)$ とすると，収束条件から一般解はそれぞれ

$$\begin{cases} v_0(x,z) = B_0(z)x^{\gamma_1}, & x < G(z), \\ v_1(x,z) = B_1(z)x^{\gamma_2} + \dfrac{\beta z^{\beta-1}x}{\rho-\mu}, & x > F(z), \end{cases} \tag{22}$$

となり，境界条件は

$$B_0(z)G^{\gamma_1}(z) = B_1(z)G^{\gamma_2}(z) + \frac{\beta z^{\beta-1}G(z)}{\rho-\mu} - K_1 \tag{23}$$

$$\gamma_1 B_0(z)G^{\gamma_1-1}(z) = \gamma_2 B_1(z)G^{\gamma_2-1}(z) + \frac{\beta z^{\beta-1}}{\rho-\mu} \tag{24}$$

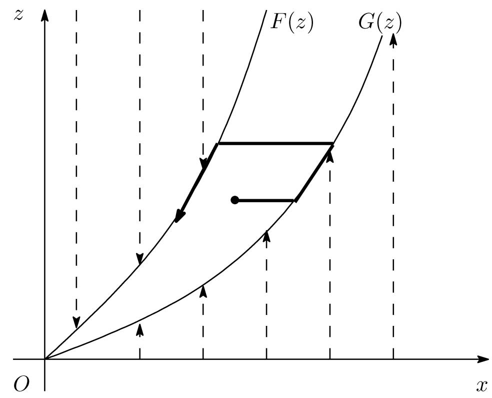

図 2　特異制御の規模拡大縮小の閾値

$$B_1(z)F^{\gamma_2}(z) + \frac{\beta z^{\beta-1}F(z)}{\rho-\mu} = B_0(z)F^{\gamma_1}(z) - K_0 \tag{25}$$

$$\gamma_2 B_1(z)F^{\gamma_2-1}(z) + \frac{\beta z^{\beta-1}}{\rho-\mu} = \gamma_1 B_0(z)F^{\gamma_1-1}(z) \tag{26}$$

となる．

ここまでくると，前節と同様に連立方程式を解けばよいことになる．しかし，本節では非線形項がどうしても残るため，η, ν を非線形連立方程式の解として，最適な拡大と縮小の閾値

$$F(z) = \eta z^{1-\beta}, \quad G(z) = \nu z^{1-\beta} \tag{27}$$

が準解析的に求まる．この $F(z)$, $G(z)$ を z の関数として見れば，もとの特異制御問題 (17) の解になっている．

図 2 は，$F(z)$, $G(z)$ の例を x–z 平面に描いたものである．$x < F(z)$ からスタートすれば，企業は即座に規模を垂直に $F(z)$ に達するまで縮小する．反対に，$x > G(z)$ からスタートすれば，企業は即座に規模を垂直に $G(z)$ に達するまで拡大する．両閾値の中間からスタートしたときは，x が水平方向にどちらかの閾値に到達するまで規模は変わらない．最初に $G(z)$ に到達した場合は，x が大きくなるにつれて $G(z)$ に沿って規模を拡大し，x が小さくなったときは規模は変化しない．さらに x が小さくなって $F(z)$ に到達すると，今度は $F(z)$ に沿って規模を縮小する．以上が，求められた最適な設備の規模選択行動であり，生産物価格が上昇すれば設備投資して規模を拡大し，価格が下落すれば余剰設備を売却して規模を縮小するという，直感的に理解しやすいものとなっている．

4. インパルス制御による定式化

前節では規模の調整に関して比例費用のみを考えていたが，今度はより一般的に固定費用も考えることにする．固定費用を考えると，特異制御のように連続して規模を調整することは最適ではなくなり，不連続に離散的に調整することになる．この問題はインパルス制御の範疇になり，定式化も前節から変更しなければならない．

まず，離散的な規模調整について，調整時刻 τ_i と拡大と縮小を合わせた調整量 ξ_i の組 $w = (\tau_i, \xi_i)_{i\geq 0}$ を考える．このとき，設備規模は時刻 τ_i においてのみ

$$Y_{\tau_i} = Y_{\tau_i -} + \xi_i \tag{28}$$

のように変化する．さらに，比例費用と固定費用を合わせた費用関数を

$$K(\xi) = \begin{cases} K_0^+ + K_1^+\xi, & \xi \geq 0, \\ K_0^- + K_1^-\xi, & \xi < 0, \end{cases} \tag{29}$$

と定義する．離散的な調整を保証するために，費用関数に優加法性

$$K(\xi + \xi') \leq K(\xi) + K(\xi') \tag{30}$$

を仮定する．

このとき，企業の設備規模選択に関する価値関数は，

$$\begin{aligned} &V(x, y) \qquad (31) \\ &= \sup_{w\in\mathcal{W}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}\Pi(X_t, Y_t)\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^\infty \mathrm{e}^{-\rho\tau_i}K(\xi_i)\right] \end{aligned}$$

となる．しかし (31) 式は，容易に解くことはできない．1 つ目の問題点は，確率過程 X_t と制御過程 Y_t が別々になっていることであり，2 つ目の問題点は拡大と縮小の方向である．

1 つ目の問題点については，確率過程を直接制御する形の問題のほうが扱いやすく，解析解が得られている場合もあるが，(31) 式のような問題では難しいとされる．例えば，Ohnishi and Tsujimura [7] は企業のキャッシュリザーブを確率過程として考え，キャッシュリザーブから直接配当支払いを制御するという問題をインパルス制御問題として定式化し，準解析解を導いている．前節で説明した Guo and Tomecek [4] の解法では，確率過程と制御過程が別々の特異制御問題をスイッチング問題に変換して準解析解が得られているが，インパルス制御問題に対して同様の解法はまだ発見されていない．Guo and Wu [5] が，確率過程を直接制御する形のインパルス制御問題に対して最適停止問題との関連から分析しているが，(31) 式のように別々の問題ではない．

2 つ目の問題点については，インパルス制御問題が想定する制御の方向は通常，内側であるということである．オペレーションズ・リサーチでも馴染みのある在庫管理問題におけるインパルス制御を考えると，在庫がある水準 s に達すると S まで発注するという (s, S) 政策である．この制御は，在庫水準が下がったら上げるという内側方向への制御である．Ohnishi and Tsujimura [7] の配当政策も，キャッシュリザーブが上がったら下げるという内側方向への制御である．(31) 式で考えている設備規模の拡大縮小問題は，価格が上がったら規模を拡大する，下がったら縮小するという外側方向への制御である．

外側方向へのインパルス制御に対する問題点は，Goto, Takashima and Tsujimura [3] によって指摘されている．問題の所在を明らかにするため，(31) 式を確率過程を直接制御する問題として，

$$V(x) = \sup_{w\in\mathcal{W}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t}X_t\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^\infty \mathrm{e}^{-\rho\tau_i}K(\xi_i)\right] \tag{32}$$

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t\mathrm{d}t + \sigma X_t\mathrm{d}W_t, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \tag{33}$$

$$X_{\tau_i} = X_{\tau_i -} + \xi_i \tag{34}$$

と定義し直す．

もしも内側への制御を考えているとすると，下側の閾値 $\underline{X}$ に到達したら X^+ $(> \underline{X})$ まで拡大，上側の閾値 $\bar{X}$ に到達したら X^- $(< \bar{X})$ まで縮小という規模調整になる．このとき，価値関数は

$$V(x) = \begin{cases} V(X^+) - K_0^+ - K_1^+(X^+ - x), & x \leq \underline{X}, \\ C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \dfrac{x}{\rho - \mu}, & \underline{X} < x < \bar{X}, \\ V(X^-) - K_0^- - K_1^-(X^- - x), & x \geq \bar{X}, \end{cases} \tag{35}$$

を満たす．境界条件は，

$$V(\underline{X}) = V(X^+) - K_0^+ - K_1^+(X^+ - x) \quad (36)$$

$$V'(\underline{X}) = K_1^+ \quad (37)$$

$$V'(X^+) = K_1^+ \quad (38)$$

$$V(\bar{X}) = V(X^-) - K_0^- - K_1^-(X^- - x) \quad (39)$$

$$V'(\bar{X}) = K_1^- \quad (40)$$

$$V'(X^-) = K_1^- \quad (41)$$

となる．(36), (39) 式はバリュー・マッチング条件，(37), (40) 式はスムース・ペースティング条件である．(38), (41) 式は，それぞれ拡大量と縮小量に対する最適条件である．この問題は前節と同じで，非線形連立方程式の解として準解析解が求まる．上下の閾値からの内側への制御という同様の定式化は，Cadenillas and Zapatero [1] が中央銀行の為替介入に関して応用している．

次に，外側への制御に話を戻すと，下側の閾値 $\underline{X}$ に到達したら X^d $(< \underline{X})$ まで縮小，上側の閾値 $\bar{X}$ に到達したら X^u $(> \bar{X})$ まで拡大という規模調整になる．このとき，価値関数は (35) 式のようにはならない．図 3(a) のように内側への制御ならば，(36)～(41) 式の 6 本の閉じた連立方程式ですむ．しかし図 3(b) のように，外側への制御では x の上昇（下落）によって逐次的に拡大（縮小）していくことを想定しているため，2 回目の拡大（縮小）閾値は 1 回目の拡大（縮小）閾値とは異なる．

i 回目の拡大縮小を添字の i で表すことにすると，初期状態では下側の閾値 $\underline{X}_1$ に到達したら X_1^d まで縮小，上側の閾値 $\bar{X}_1$ に到達したら X_1^u まで拡大という規模調整になる．最初に縮小されたとすると，X_1^d から始まる問題では，下側の閾値 $\underline{X}_{2d}$ に到達したら X_2^{dd} まで縮小，上側の閾値 $\bar{X}_{2d}$ に到達したら X_2^{du} まで拡大という規模調整になる．また X_1^u から始まる問題では，下側の閾値 $\underline{X}_{2u}$ に到達したら X_2^{ud} まで縮小，上側の閾値 $\bar{X}_{2u}$ に到達したら X_2^{uu} まで拡大という規模調整になる．内側への制御のように 1 回の拡大縮小では，閾値が 2 個だけで各閾値に 3 本の連立方程式があったが，2 回の拡大縮小では閾値が 4 個増えて全部で 18 本の連立方程式になる．この時点で準解析解を得るための数値計算は極めて困難になるが，もちろん 2 回だけではなく無限回の拡大縮小が必要なので，解を得ることは不可能ということになる．

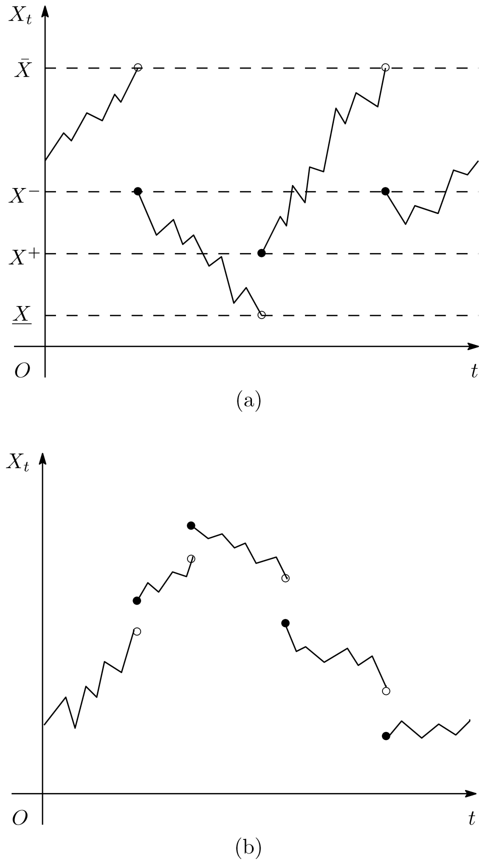

図 3　内側方向 (a) と外側方向 (b) へのインパルス制御のイメージ

5. おわりに

本稿では，不確実性下の投資問題の中でも設備投資問題への応用に注目し，確率制御の視点から定式化について解説した．特異制御による定式化では，生産物価格が上昇すれば設備投資して規模を拡大し，価格が下落すれば余剰設備を売却して規模を縮小するという，直感的に理解しやすい結果が得られた．

一方，在庫管理問題の (s, S) 政策でも馴染みのあるインパルス制御アプローチでは，Goto, Takashima and Tsujimura [3] が指摘したように，連立方程式が無限個必要になって解けないということを解説した．この問題点は，無限個の (s, S) が必要になることに起因しており，解決策としては以下のようなものが考えられる．

1 つ目は，金融工学でよく見られるような近似である．拡大縮小を 2 回，3 回と限定して解を求め，規則性や関数形を発見して無限回の問題の近似式を求めるという方法である．しかし，2 回の段階で 18 本，3 回になると 42 本の連立方程式になるため，非現実的な方

法であろう．2 つ目は，規模選択の問題（図 3(b)）を変換して，内側への制御（図 3(a)）になるように定式化することである．ただし，この変換には技術的な問題が少なからず存在することがわかっており，こちらも難航が予想される．

しかしながら，外側へ拡大縮小していく問題は，設備投資問題のみならず幅広く応用が可能である．本稿で解説したインパルス制御アプローチにおける限界を克服できれば，定式化の可能性が大きく広がるため，引き続き今後も挑戦していきたい．

参考文献

[1] A. Cadenillas and F. Zapatero: Classical and impulse stochastic control of the exchange rate using interest rate and reserves. *Mathematical Finance*, **10**, 141–156, 2000.

[2] A. K. Dixit and R. S. Pindyck: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

[3] M. Goto, R. Takashima and M. Tsujimura: Optimal capacity expansion and contraction with fixed and quadratic adjustment costs. *Proceedings of the Sapporo Symposium on Financial Engineering and Its Applications*, 7–20, 2006.

[4] X. Guo and P. Tomecek: Connections between singular control and optimal switching. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **47**, 421–443, 2008.

[5] X. Guo and G. L. Wu: Smooth fit principle for impulse control of multi-dimensional diffusion processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 594–617, 2009.

[6] S. C. Myers: Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, **5**, 147–175, 1995.

[7] M. Ohnishi and M. Tsujimura: Optimal dividend policy with transaction costs under a brownian cash reserve. Discussion Papers in Economics And Business, Osaka University, 02–07, 2002.