団体戦の最適出場順序に関する数理的考察

加藤　直樹

本論文では，スポーツの勝敗を定める確率モデルとしてよく知られているBradley-Terryモデルを仮定して，スポーツの団体戦における勝敗決定方法として採用されている勝ち抜き戦およびせん滅戦における選手の最適出場順序について考察する．勝ち抜き戦，せん滅戦およびその一般形においてはチームの勝利確率が選手の出場順序に依存しないことを示す．また，点取り方式の団体戦の最適出場順序についても言及する．

キーワード：団体戦，勝ち抜き戦，最適出場順序，Bradley-Terryモデル

1. はじめに

昨年8月くらいに，本特集号の幹事をされている池辺先生から，「スポーツの数理」の特集号への原稿執筆の依頼があった．団体戦の最適出場順序について，私が20年以上前に書いた論文の内容を紹介してもらいたいというものであった．正直言って，20年以上の前の結果をOR学会の機関誌に書くことに，ためらいがあった．とはいえ，執筆を引き受けることにして，もう一度，自分の書いた論文を読み直してみた．20年以上前の論文なので，随分拙い文章なのかと思いきや，案外分かりやすく書いていて，自分のことながら驚いた．

本稿で解説するのは拙著[6][7]である．文献[6]の共著者は当時大学生であった安達彰裕君である．卒業論文として行った研究をまとめたものである．彼は当時ソフトテニス部の主将を務めていて，私も学生時代ソフトテニス（私が学生の頃は軟式テニスと呼んでいた）をしていたことから，ソフトテニスで昔から行われているせん滅戦という団体戦の試合形式に興味を持ったことが研究の動機である（せん滅戦の試合形式の詳細については後述する）．

せん滅戦を説明する前に，柔道，剣道でよく用いられている団体戦試合形式に勝ち抜き戦を説明する．こちらの方がよく知られている．勝ち抜き戦ではまず対戦する二つのチームの各々が試合に出場する選手の順序を決定する．選手の出場順序をオーダーという．いま，対戦する2チームをA, Bとし，各チーム5人の選手から構成されているものとする．チームA, Bの選手をそれぞれ$\{1, 2, ..., 5\}, \{1, 2, ..., 5\}$とする．仮にチーム$A, B$のオーダーをそれぞれ$(1, 2, ..., 5), (1, 2, ..., 5)$としよう．このとき，まずチームAの選手1とチームBの選手1が対戦する．仮にチームBの選手1が負けると，その選手は退去し以降試合を行わない．一方，チームAの選手1は引き続いてチームBの選手2と対戦する．ここでもチームAの選手1が勝つと，チームBの選手2は，前回と同様に退去し試合を行わない．つまり勝ち続ける限り，連続して試合を行い，負けるとチームから抜ける．これを繰り返していくと，どちらかのチームの選手がいなくなる．そうすると，選手がいなくなったチームが負けとなる．勝ち抜き戦の妙味は，たとえ残り一人になっても，その選手が次々と相手選手を打ち破って全滅させるといった大逆転勝利が起こりえることであろう．

日中スーパー囲碁は，1984年から2001年まで行われた，日本と中国の棋士のチームによる対抗戦形式の棋戦でここでも勝ち抜き戦が採用されていた．中国の聶衛平九段による11連勝（4年越しの連勝記録である）は強烈な印象を残している．その後，日中スーパー囲碁は，日本，中国，韓国の三国対抗である農心辛ラーメン杯世界囲碁最強戦として引き継がれている．ここでも勝ち抜き戦が採用されていて，各国5選手による勝ち抜き戦である．ただし，3チームなので，少しややこしくなる．

一方，せん滅戦であるが，勝ち抜き戦と同様にチームA, Bのオーダーをそれぞれ$(1, 2, ..., 5), (1, 2, ..., 5)$とする．勝ち抜き戦と同様，まずチームAの選手1とチームBの選手1が対戦する．仮にチームBの選手1が負けると，その選手は退去し以降試合を行わない．ここまでは勝ち抜き戦と同じである．しかし，勝ち抜き戦と違って，チームAの選手1は引き続い

かとう　なおき
京都大学 工学研究科
〒615-8540 京都市西京区京都大学桂

て試合を行わず，チームAの待機選手リストに最後尾に加えられる．この点が勝ち抜き戦と異なるところである．つまり，両チームは，$A=(1, 2, ..., 5)$，$B=(1, 2, ..., 5)$ を初期状態とする待機選手リストを保持し，対戦結果に応じてこのリストを更新していく．そして，次の対戦にはこの二つのリストの先頭にいる選手同士が試合を行うということになる．

さて，勝ち抜き戦やせん滅戦についての歴史について触れておこう．勝ち抜き戦という試合形式は，柔道，剣道，相撲といった日本が発祥の競技で用いられている．相撲や剣道では「申し合い」という練習形式がある．これは試合ではないが，負けた選手が退き，勝った選手が他の選手と続けて稽古を行うというものであり，勝ち抜き戦のルーツかもしれない．柔道，剣道，相撲において，すべての団体戦が勝ち抜き戦で行われているわけではないが，例えば，全日本学生剣道東西対抗戦では勝ち抜き戦が用いられている．

せん滅戦はソフトテニスの団体戦でよく採用されている．例えば全日本大学対抗ソフトテニス選手権では，男子の場合各チーム3ペアからなるせん滅戦が採用されている．ソフトテニスも日本が発祥のスポーツである．せん滅戦の歴史について，日本ソフトテニス連盟の表孟宏副会長に話を聞いてみた．せん滅戦が導入される前（百年くらい前にさかのぼるそうである），二勝優先法と呼ばれる試合方式が採用されていたそうである．勝ち抜き戦と同様，勝つ限り続けて試合するのだが，2試合連続までで，2連勝した選手は待機選手リストの最後尾に回るという，勝ち抜き戦とせん滅戦の中間に位置する試合形式である．

一般に球技や格闘技は，記録の良し悪しで順位が決まる競技ではなく，対戦相手との試合によって勝敗が決まる対戦型競技であり，対戦相手との一対一の試合を行って勝敗が決する競技のことを指す．競技にはスポーツばかりではなくて囲碁，将棋を含めて考えてよいが，このような対戦型の競技は，野球，サッカー，相撲，テニス，卓球，バスケットボール，バレーボール，ラグビー，ハンドボール，柔道，剣道，レスリング，バドミントンなど数多い．対戦型競技のなかに大学対抗のように複数プレーヤーからなるチーム同士の対戦により，チームの勝敗を決する団体戦競技がある．本稿では，このような団体戦競技における最適出場順序について，これまでに得られている知見を紹介する．

前提としては，選手同士が試合をするとき，引き分けはないものと仮定する．また，選手間の勝敗を決定する確率モデルとしてBradley-Terryモデル（以下BTモデルと呼ぶ）を採用する．BTモデルでは，各選手に強さを表す正の数を付与する．いま，強さが a の選手1と強さが b の選手2が対戦するとき，選手1が2に勝つ確率が

$$\frac{a}{a+b} \tag{1}$$

によって定まるものとする．

もともとBT-モデルは官能検査（例えば，文献[9][10]参照）において複数の対象を「その好ましさ」により順位付けるための一対比較法のなかの一つの数学的モデルとしてBradley, Terry[4]，Bradley[1]～[3]により提案されたものである．BTモデルはその後，意思決定者の確率的選択理論の数学的モデルとしてLuce[5]により拡張され，Bradley-Terry-Luceモデルとも呼ばれるようになり，数理社会学，計量心理学などの分野でも議論されてきた．スポーツへの応用に関しては，竹内，藤野[8]において取り上げられていて，スポーツの勝敗決定方法，チーム，選手の順位付けの問題を数理的に取り扱う際に用いられている．

BTモデルは，選手には固有の実力があり，それは正の数であらわされていて，それに基づいて勝利確率が決まるというものであるから，いわゆる三すくみの状態は存在しない．ここで，三すくみとは，選手A，B，Cの間で，AはBに強く，BはCに強いが，CはAに強いという関係である．一般にはこのような関係はよく現れるのだが，BTモデルの下ではこの関係は成り立たない．一方，BTモデルを仮定して，選手の強さを推定するには，最尤推定が用いられている（文献[8]参照）．これにより得られた強さは選手の実力を表していると考えられ，選手のランキングを作るのにしばしば用いられている．

本稿では，BTモデルの仮定の下で，勝ち抜き戦やせん滅戦による団体戦における最適出場順序を考えるのだが，いずれの場合も，チームの勝利確率は出場順序に依存せず一定であることを示す（このことを**オーダー独立性**という）．この証明は文献[6][7]に書かれているが，ここではその概略を述べることにする．また，勝ち抜き戦やせん滅戦以外の団体戦方式についても考察する．両チームがオーダーを決めて各選手が一度ずつ対戦し，勝利数が多いチームを勝利チームとする方式が最もポピュラーである（点取り方式と呼ぶ）．相手チームのオーダーがわからないと最適オーダーも求めることはできないのだが，仮にそれが既知の場合，

最適オーダーが有する性質について述べる．この結果は文献[7]による．

2. オーダー独立性

チーム A，チーム B はそれぞれ M 人，N 人の選手からなっているものとし，毎回一人の選手を選び出し試合（個人戦）を行い，敗れた選手はチームから去り，先に全滅したチーム（選手がいなくなったチーム）が団体戦の敗者となる．まず，勝ち抜き戦について考察する．チーム A，チーム B の選手に番号を付し，それぞれ $\{1, 2, ..., M\}$, $\{1, 2, ..., N\}$ とし，初期オーダーをそれぞれ $(1, 2, ..., M)$, $(1, 2, ..., N)$ とする．いま，BT モデルを仮定して，チーム A の選手 i の強さを a_i，チーム B の選手 j の強さを b_j とする．$M=2$, $N=2$ の場合を考えよう．チーム A, B の初期オーダーをそれぞれ $(1, 2), (1, 2)$ とし，勝ち抜き戦におけるチーム A の勝利確率を P_A とする．P_A を求めてみよう．チーム A が勝つケースは，次の 3 つである．(i) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1, 2 に連勝する．(ii) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に勝つがチーム B の選手 2 に負ける．しかし，最後にチーム A の選手 2 がチーム B の選手 2 に勝つ．(iii) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に負けるが，チーム A の選手 2 がチーム B の選手 1，2 に連勝する．したがって，チーム A の勝利確率 P_A は

$$P_A=\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_1}{a_1+b_2} +\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{b_2}{a_1+b_2}\frac{a_2}{a_2+b_2} +\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_2} \tag{2}$$

となる．これを整理すると

$$P_A=\frac{a_1a_2(a_1a_2+(a_1+a_2)(b_1+b_2))}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} +\frac{b_1b_2(a_1a_2+(a_1+a_2))}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \tag{3}$$

となる．ここで注目すべき点は，この式は a_1, a_2 の交換または（および）b_1, b_2 の交換を行っても値が変化しないということである．これはチーム A の勝利確率は 2 チームのオーダーに依存せずに一定ということを意味する．

せん滅戦に対しても同様のことを調べてみる．チーム A, B の初期オーダーをそれぞれ $(1, 2), (1, 2)$ とし，せん滅戦におけるチーム A の勝利確率を Q_A とする．Q_A を求めてみよう．チーム A が勝つケースは，次の 3 つである．(i) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に勝ち，続いてチーム A の選手 2 がチーム B の選手 2 に勝つ．(ii) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に勝ち，続く 2 つ目の試合でチーム A の選手 2 がチーム B の選手 2 に負ける．最後の試合でチーム A の選手 2 がチーム B の選手 2 に勝つ．(iii) チーム A の選手 1 がチーム B の選手 1 に負けるが，チーム A の選手 2 がチーム B の選手 1，2 に連勝する．したがって，チーム A の勝利確率 Q_A は

$$Q_A=\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_2} +\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{b_2}{a_2+b_2}\frac{a_1}{a_1+b_2} +\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_2} \tag{4}$$

となる．これを整理すると

$$Q_A=\frac{a_1a_2(a_1a_2+(a_1+a_2)(b_1+b_2))}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} +\frac{b_1b_2(a_1a_2+(a_1+a_2))}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \tag{5}$$

となる．これは式(3)の P_A と等しい．したがって，a_1, a_2 の交換または（および）b_1, b_2 の交換を行っても値が変化しない．

以上から，2 選手同士の団体戦の場合，勝ち抜き戦およびせん滅戦における選手のオーダーに依存せずに，チームの勝利確率は一定である．

選手数が一般の場合についても，勝利確率がオーダ依存せず一定であることが証明され以下の定理が成り立つ．

せん滅戦の場合も同様の性質が成り立つ（詳細は文献[6]を参照）．証明はチーム A, B の選手数 M, N に関する帰納法による．

定理 1 勝ち抜き戦における勝利確率はオーダーに依存せず一定である．

定理 2 せん滅戦における勝利確率はオーダーに依存せず一定であり，勝ち抜き戦のそれと等しい．

勝ち抜き戦やせん滅戦を一般化して，待機選手の中からどの選手を次の試合に出してもよいとする．このような場合にもオーダー独立性が成り立つことが知られている（文献[7]参照）．

定理 1 の証明は付録に書いているので興味ある読者は参照されたい．以上から言えることは，勝ち抜き戦やせん滅戦では，オーダーをどのように決めたらよいかということに気を配る必要はないということを示唆している．

3. 点取り方式の団体戦における最適出場順序

この節では，点取り方式の団体戦を考察する．いま，チーム A, B の選手はそれぞれ N 人からなり，A の選手を $\{1, 2, ..., N\}$，B の選手を $\{1, 2, ..., N\}$ とする．また，A の選手 i の強さを a_i，B の選手 j の強さを b_j とし，$a_1>a_2>\cdots>a_N$, $b_1>b_2>\cdots>b_N$ を満たしていると仮定する．このとき，期待勝利数を最大にするオーダーが有する性質について調べる．チーム B のオーダーが未知のとき，チーム A の最適出場順序を求めることは実際上不可能で，ランダムに決めるしかない．そこで，チーム B のオーダーを $(1, 2, ..., N)$ と仮定する（つまり，強い順に選手を並べる）．実際，強い順に選手を並べることが多い．団体戦の興味として，最後に強い選手を配置すると，その選手が試合をする前にチームとしての勝敗が決まってしまうことによって最強の選手の試合が消化試合となる可能性がある．これを避けるために最強の選手をできるだけ最初の位置に持っていくことが多い．また，最初の方の試合で勝つことにより，チームに勢いをつけるという意味もある．しかし，柔道や剣道では最強の選手（大将）は最後に試合をするというように，慣習的に選手のオーダーが決められていることもある．

チーム A, B のオーダーをそれぞれ $(i_1, i_2, ..., i_N)$，$(j_1, j_2, ..., j_N)$ とする．このとき，チーム A の期待勝利数は

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{a_{i_m}}{a_{i_m}+b_{j_m}} \tag{6}$$

である．したがって，チーム B のオーダーが既知の場合，チーム A の最適オーダーは組合せ最適化における割り当て問題の特殊な場合とみることができ，最適オーダーが容易に得られる．

現実を考えた場合，選手の強さの値まで知っていることは少ない．しかし，自チーム内の選手の序列（強さの順序）や対戦チームの選手の序列はわかっていることが多い．その意味で以下に示す結果は現実に役立つと考える．

補題 3 [7] チーム A の最適オーダーを $(i_1, i_2, ..., i_N)$ とする．$i_N=1$ ならチーム A の最適オーダーは $(N, N-1, ..., 1)$ である．（証明は付録参照）

式(6)より，期待勝利数は加法的なので，補題3はオーダーの任意の部分列に対しても成り立つ．

補題 4 [7] チーム A の最適オーダー $(i_1, i_2, ..., i_N)$ の任意の部分列 $(i_{k_1}, i_{k_2}, ..., i_{k_n})$ に対して，$i_{k_n}=\min_{1\le m\le n} i_{k_m}$ なら $(i_{k_1}, i_{k_2}, ..., i_{k_n})$ は単調減少列である．（証明略）

補題 5 [7] チーム A の最適オーダー $(i_1, i_2, ..., i_N)$ に対して，$i_1=1$, $i_1=N$, $i_N=1$, $i_N=N$ のいずれかが成り立つ．（証明略）

補題 3，5 は，次の(i)，(ii)のいずれかが成り立つということを主張している．(i)最初の試合に出るのは最も強い選手か，最も弱い選手である．(ii)最後の試合に出るのは最も強い選手か，最も弱い選手が出場である．(iii)最後の試合に最も強い選手が出るなら，最初の試合には最も弱い選手が出る．

この事実は，経験的に用いられているオーダーの組み方に合致する．最弱の選手は，最後の試合か，当て馬として最初に持ってくることが多いし，最強の選手はトップに持ってくることが多い．

先述の通り，補題5はオーダーの任意の部分列に対しても成り立つ．したがって，この性質と補題 3，4，5 を用いて，最適オーダーとなりえる出場順序の個数を調べよう．N 人の選手ずつが戦う点取り戦における最適オーダーの候補数は，相手チームのオーダーを固定しているので，$N!$ 通りあり得るのだが，このうち，補題 3，4，5 を満たさないものは数多い．例えば，$N=5$ として，$(5, 3, 4, 2, 1)$ は補題 4 を部分列 $(3, 4, 2)$ に適用すると最適オーダーとなり得ないことがわかる．

補題 3，4，5 を満たすオーダーの個数を c_N とする．すると，補題5より次の4つの場合のうち一つが成り立つ．(i)最適オーダーの先頭の選手は 1，(ii)最適オーダーの先頭の選手は N，(iii)最適オーダーの最後の選手は 1，(iv)最適オーダーの最後の選手は N．

(i)，(ii)，(iv)のいずれの場合も，残りの選手の最適オーダーの数は c_{N-1} である．(iii)の場合，補題3より残りの選手の最適オーダーの数は1通りしかない．また，$(1, 2, ..., N)$ は(i)にも含まれているので，$c_N \le 3c_{N-1}$ が成り立つ．これより，$c_N \le 3^N$ となり，$N!$ 通りよりずっと少ないことがわかる．

4. おわりに

Bradley-Terry モデルを仮定して，団体戦における最適出場順序に関する数学的性質について 20 年くらい前に得られた結果の解説を行った．今回の執筆にあたって，勝ち抜き戦やせん滅戦の歴史について関連する競技連盟に問い合わせた．歴史について調べてい

るというといろいろ教えていただけたが，最適オーダーについての研究をしているといっても全く関心を示さなかった．チームとして勝利を収めるには，個々の選手の技量を高めることが最も重要だが，最適オーダーについて関心を払うべきだと考えている．いかがであろうか．

参考文献

[1] R.A. Bradley, Incomplete block rank analysis: On the appropriateness of the model for a method of paired comparisons, *Biometriks*, Vol. 10 (1954), pp. 375-390.

[2] R.A. Bradley, Rank analysis of incomplete block designs II: Additional tables for the method of paired comparisons, *Biometrika*, Vol. 41 (1954), pp. 502-537.

[3] R.A. Bradley, Rank analysis of incomplete block designs III: Some large sample results on estimation and power for a method of paired comparisons, *Biometrika*, Vol. 42 (1955), pp. 450-470.

[4] R.A. Bradley and M.E. Terry, Rank analysis of incomplete block designs I, *Biometrika*, Vol. 39 (1952), pp. 324-354.

[5] R.D. Luce, Indivisual Choice Behaviour, John Wiley and Sons, New York, 1959.

[6] 加藤直樹，安達彰裕，「ある種の団体戦競技における出場順序と勝利確率の関係に関する数学的考察」，日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌，32巻，3号 (1989)，390-406.

[7] N. Katoh, J. Koyanagi, M. Ohnishi and T. Ibaraki, Optimal Strategies for some team games, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 35 (1992), 275-292.

[8] 竹内啓，藤野和建，「スポーツの数理科学，一もっと楽しむための数字の読み方一」，共立出版，1988.

[9] 佐藤信，「官能検査入門」，日科技連出版社，1978.

[10] 佐藤信，「統計的官能検査法」，日科技連出版社，1985.

付録

定理1の証明 (1) $M=1$ または $N=1$ の場合．$M=1$ の場合のみを考える ($N=1$ の場合も同様)．チーム A の勝利確率 P_A はチーム A の選1が B の選手にすべて勝つ確率であるので

$$P_A=\prod_{j=1}^{N}\frac{a_1}{a_1+b_j} \tag{7}$$

である．これより定理が成り立つ．

(2) $M\geq 3, N\geq 2$ または $M\geq 2, N\geq 3$ の場合．$M\geq 3, N\geq 2$ の場合のみを考える ($M\geq 2, N\geq 3$ の場合も同様)．$m\leq M, n\leq N$ (ただし，少なくとも一つの不等式は真に成り立つ) のとき，勝利確率がオーダ依存せず，一定であることを仮定して，$m=M, n=N$ のとき，勝利確率がオーダーに依存しないことを証明する．A, B のオーダーをそれぞれ $(1, 2, ..., M)$, $(1, 2, ..., N)$ とし，チーム A の勝利確率を $P_A((1, 2, ..., M), (1, 2, ..., N))$ とする (簡単のため U_{11} と表記する)．

$$\begin{aligned}U_{11}&=\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A((1, 2, ..., M), (2, 3, ..., N))\\&=\frac{b_1}{a_1+b_1}P_A((2, ..., M), (1, 2, ..., N))\end{aligned} \tag{8}$$

帰納法の仮定より，$P_A((1, 2, ..., M), (2, 3, ..., N))$ と $P_A((2, ..., M), (1, 2, ..., N))$ はオーダーに依存せずに一定で，選手の集合のみに依存する．したがって，$S_A=\{1, 2, ..., M\}, S_B=\{1, 2, ..., N\}$ とし，

$$P_A((1, 2, ..., M), (2, 3, ..., N))=P_A(S_A, S_B-\{1\})$$
$$P_A((2, ..., M), (1, 2, ..., N))=P_A(S_A-\{1\}, S_B)$$

と表記できる．すると，式(8)は

$$\begin{aligned}U_{11}=&\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A(S_A, S_B-\{1\})\\&+\frac{b_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{1\}, S_B)\end{aligned} \tag{9}$$

と書ける．また，

$$\begin{aligned}U_{ij}=&\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A, S_B-\{j\})\\&+\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{i\}, S_B)\end{aligned} \tag{10}$$

という記号を導入する．

ここで，帰納法の仮定を用いると，

$$\begin{aligned}&P_A(S_A, S_B-\{1\})\\&\quad=\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A, S_B-\{1, j\})\\&\qquad+\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{i\}, S_B-\{1\})\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&P_A(S_A-\{1\}, S_B)\\&\quad=\frac{a_i}{a_i+b_1}P_A(S_A-\{1\}, S_B-\{j\})\\&\qquad+\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{1, i\}, S_B)\end{aligned} \tag{12}$$

である．ここで $i\in S_A-\{1\}, j\in S_B-\{1\}$ である．式(11), (12)を式(9)に代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A(S_A, S_B-\{1\})\\&\quad=\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A, S_B-\{1, j\})\\&\qquad+\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{i\}, S_B-\{1\})\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{b_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{1\}, S_B)$$
$$=\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{1\}, S_B-\{j\})$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{1, i\}, S_B) \tag{14}$$

を得る．式(13)の第1項と式(14)の第1項を加えると

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A, S_B-\{1, j\})$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{1\}, S_B-\{j\})$$
$$=\frac{a_i}{a_i+b_j}\Big(\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A(S_A, S_B-\{1, j\})$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{1\}, S_B-\{j\})\Big)$$
$$=\frac{a_i}{a_i+b_j}P_A(S_A, S_B-\{j\}) \tag{15}$$

を得る．最後の等式は帰納法の仮定からしたがう．次に，式(13)の第2項と式(14)の第2項を加えると

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{i\}, S_B-\{1\})$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{1, i\}, S_B)$$
$$=\frac{b_j}{a_i+b_j}\Big(\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{i\}, S_B-\{1\})$$
$$=\frac{b_j}{a_i+b_j}\Big(\frac{a_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{i, i\}, S_B)$$
$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}P_A(S_A-\{1, i\}, S_B)$$
$$=\frac{b_j}{a_i+b_j}P_A(S_A-\{i\}, S_B) \tag{16}$$

を得る．最後の等式は帰納法の仮定からしたがう．式(15)，(16)を加えると，式(9)，(11)，(12)から，

$$U_{11}=U_{ij} \tag{17}$$

となる．式(17)を証明したのと同様に，$g \in S_A$, $h \in S_B$ に対して，$g \neq i$, $h \neq j$ である限り，

$$U_{ij}=U_{gh} \tag{18}$$

が一般に成り立つ．つぎに，$k \in S_A (k \neq i)$, $l \in S_B (l \neq j)$ に対して $U_{ij}=U_{kj}$, $U_{ij}=U_{il}$ が成り立つことを示す．いま，$k \neq i, g$ なる $k \in S_A$ を選ぶと，$U_{gh}=U_{kj}$ を得る（$h \neq j$ を仮定している）．これと，式(18)より，$U_{ij}=U_{kj}$ を得る．ここで，$l \neq j$ なる $l \in S_B$ を選び j, l を入れ替えると，$U_{il}=U_{kl}$ が成り立つ．よって，式(18)において g, h をそれぞれ k, l に置き換えると，$U_{ij}=U_{kl}$ が成り立つので，$U_{ij}=U_{il}$ を得る．以上から，式(17)より，定理の証明が完成した．

補題3の証明

まず次の補題を証明しておく

補題6 チーム A の最適オーダー$(i_1, i_2, \ldots, i_N)$ に対して

$$(a_{i_k}-a_{i_l})(b_k b_l-a_{i_k}a_{i_l}) \leq 0 \tag{19}$$

が任意の $k, l (k<l)$ に対して成り立つ．

[証明]最適オーダー$(i_1, i_2, \ldots, i_N)$ に対して，i_k と i_l を入れ替えても，期待勝利数は増加しない．したがって

$$\frac{a_{i_l}}{a_{i_l}+b_k}+\frac{a_{i_k}}{a_{i_k}+b_l}-\frac{a_{i_k}}{a_{i_k}+b_k}-\frac{a_{i_l}}{a_{i_l}+b_l} \leq 0$$

が成り立つ．これより，

$$(b_k-b_l)(a_{i_k}-a_{i_l})(b_k b_l-a_{i_k}a_{i_l}) \leq 0$$

となる．仮定より $b_k > b_l$ であるので，補題が成り立つ．

さて，補題3の証明に移ろう．いま，$i_p < i_q$ がある $p<q$ に対して成り立っていると仮定して矛盾を導こう．補題6より

$$(a_{i_p}-a_1)(b_N b_p-a_1 a_{ip}) \leq 0$$
$$(a_{i_p}-a_{i_q})(b_p b_q-a_{i_p}a_{i_q}) \leq 0$$

$a_{i_q} < a_{i_p} < a_1$ より，$b_N b_p-a_1 a_{ip} \geq 0$, $b_p b_q-a_{i_p}a_{i_q} \leq 0$ を得る．$a_1 a_{i_p} > a_{i_p}a_{i_q}$ より，$b_N b_p > b_p b_q$ を得るが，$b_N > b_q$ となり，仮定に矛盾する．