論文・事例研究

距離最短DEAによる化学会社の効率測定

天達　洋文，上田　徹

1. はじめに

近年，日本の化学会社は，欧米企業と比較して，比較的堅調である．かつて，あこがれであり，師であった欧米の巨大化学会社の多くは，依然として優れた企業ではあるが，買収されたり，分割されたりして昔日ほどではなくなっている．これに対して，日本のほとんどの化学会社は業容を大きくしている．理由の一つは，日本には技術力のある優れた電気・電子・その他産業があり，その素材供給源としての化学会社も技術革新と成長を遂げた．結果として世界的に独占的製品をもつ企業も少なくない．シリコンの信越化学，青色発光LEDの日亜化学などはご存知の方が多いと思う．話題の電池の素材でも世界的シェアを持つ会社は少なくない．

日本の化学会社の特徴は，他社との激烈な技術開発競争である．欧米のように資本力で巨額な設備投資や研究開発やM＆Aを行い，独占的地位を目指すことは少ない．その結果，同業他社との比較検討は重要な業務である．同業他社との比較には，経営効率の比較も含まれるが，技術・設備比較と異なり，適当な比較手段は少ない．他方，DEA（Data Envelopment Analysis）は，経営効率の比較のために生まれ，内容は，多くの本や論文に記載されている．

DEAはDMU（Decision Making Unit）間の相対的効率を測定する．N個のDMUがあり，DMU jの入出力をx_j, y_jとし，効率を測定したいDMUをDMUoとする．本文ではDEAモデルの中で，距離を図で表現しやすい加法モデルを主として使う．Non orientedの加法モデルは次式で表される．

$$\text{目的関数}\quad \max_{s^-,s^+,\lambda}(es^-+es^+). \qquad (1)$$

$$\text{制約式}\quad X\lambda+s^-=x_o,\ Y\lambda-s^+=y_o,\ e\lambda=1,$$

$$\lambda\geq 0,\ s^-\geq 0,\ s^+\geq 0,$$

ただし，$e=(1, 1, \cdots, 1)$,

$X=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$,

$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$.

例えば，企業がDMUで，生産に必要な資本金や原材料が入力で，売上高や利益が出力である．DEAは入力と出力の多少で，効率の優劣を決める．

1入力，1出力の場合の(1)式を図1で描いた．式中の制約条件が生産可能領域を表しており，図では点の領域になる．実線の境界は効率的フロンティアと呼ばれ，その座標（x, y）は，いずれかのDMUまたは，その組み合わせで実現されている効率的な入力と出力を表現している．効率的フロンティア上の入力と出力を持つ企業はベストプラクティス企業である．

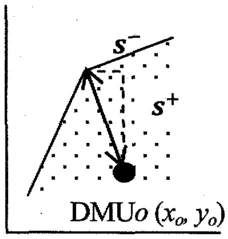

図1　加法モデルの距離

注：図1～7は，横軸は入力，縦軸は出力

加法モデルでは効率はDMUoから効率的フロンティア上の点までの距離で表現され，距離はes^-+es^+で表現される．距離0が効率的で，距離が大きいほどベストプラクティスから遠いので効率が低い．

効率的フロンティアまでの距離の測り方を，前図同様に，1入力1出力で図2に描いた．

(1)式の制約式から，

$$X\lambda\leq x_o,\ Y\lambda\geq y_o$$

なので，DMUoからの距離を測る効率的フロンティアは，点の領域内にある太線の範囲になる．DMUoをOで表すと，BとOの距離es^-+es^+はBD＋DOで，BD＋DO＞CO＞AOだから，Bから距離を測ることが分かる．一般的にはO

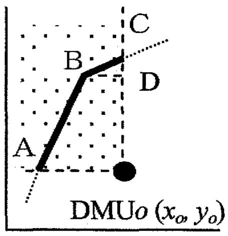

図2　距離を測る効率的フロンティア上の点

あまたつ　ひろふみ，うえだ　とおる
成蹊大学 理工学研究科
〒180-8633 武蔵野市吉祥寺北町 3-3-1
受付 10.5.17　採択 11.4.6

からＡかＢかＣまでの３つの距離の最大値で効率を評価している．

効率的フロンティア上では，すべての入力と出力の組み合わせが効率的，いいかえるとベストプラクティスであるのだから，このように距離最大を目指す必要はない．化学会社の効率測定に当てはめると，特殊な電子素材を主商品にし，入出力量は少ないが高収益率の企業群までの距離を測って，巨大な石油化学プラントを持ち，入力量も出力量も多いが低収益率の企業群の効率測定をするようなものである．経営企画部門には，トップから，このような比較を指示されてお困りの方もおられると思うが，やはり無理がある．

Takeda[6]や Tone[7]が指摘しているように，DEA のほとんどのアルゴリズムは，効率的フロンティア上の一番近い点までの距離で効率値を測定していない．そのために，Takeda[6]や上田[1]や Tone[7]や Aparicio[2]，その他は，効率的フロンティア上の一番近い点までの距離を測るアルゴリズムを提案している．どのような論文があるかは Aparicio[2]に詳しい．

本文では，Ueda[8]のアルゴリズムを適用して自社の生産技術や経営技術に近い企業群までの距離で効率測定を試みる．2 節では，Ueda[8]のアルゴリズムの概要を説明し，3 節で化学会社に適用したときの評価を述べる．4 節でまとめとする．

2. 距離最短モデルのアルゴリズム

2.1 距離最短アルゴリズムの概要

効率的フロンティア上で DMUo の効率を測定する基準となる点を「参照点」と呼ぶことにする．DMUo から効率的フロンティア上の最も近い点（最短点）を参照点として，DMUo と最短点との距離で効率を測定するアルゴリズムを「距離最短アルゴリズム」，または，「最短モデル」と呼ぶ．参照点は，1 つまたは複数の効率的 DMU の組み合わせであるが，このような DMU の集合を「参照集合」と呼ぶ．本文の事例では DMU は（化学）企業を指しているので，参照集合に属する企業を「参照企業」と呼ぶことがある．

加法モデルの(1)式の解は，図 2 の B で，効率的フロンティア上にある．それに対して，(1)式で，max を min に変えると，生産可能領域内で距離最小の点を探すので，DMUo 自体になり，効率的フロンティア上の点は求まらない．ほとんどの DEA のアルゴリズムはこのように，生産可能領域で最遠点を探すことで効率的フロンティア上の参照点を見いだしている．最短点は求めていない．

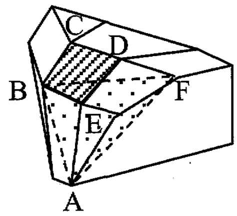

図 3　Facet と凸包

本文の用語の Facet と凸包を説明する．図 3 は 2 入力 1 出力の生産可能領域のイメージである．表面の点が効率的 DMU の座標で，内部に，非効率的 DMU の座標を含んでいる．Facet は多面体のカット面の意味で，例えば，BCDE がその例である．本文では BC のような境界の線分や BCD のようなカット面も Facet と呼ぶ．図 2 との関連では効率的フロンティア上の面になる．凸包は与えられた点集合を含む最小の凸集合で，例えば点 A, B, F を含む凸包は ABF である．Facet と同様に，境界の線分や面も含む．凸包は Facet も含む．

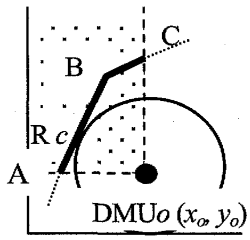

図 4　距離最短点

図 4 に最短点の例を 1 入力 1 出力で描いた．最短点を Rc（Closest）とし，距離をユークリッド距離で測るとする．DMUo から線分 AB, BC までの最短点は線分に接する円周の接点である．

Rc を求めるには，次に述べる Takeda の方法のように，接点を探す方法と，線分 AB, BC を定義し，AB, BC と DMUo の最短距離を探す方法が知られている．

1) Takeda[6]の方法は，DMUo を中心とする小さな円を描き，その半径を大きくしていき，境界に接するときの円の半径（距離）を求める．
2) Tone[7]の方法は，図 5 のように Supporting Hyper Plane と生産可能領域の重なる部分の Facet AB，BC，CD を求める．Facet と DMUo との最短距離を求め，得られた距離の中で最小の距離が最短距離になる．
3) Ueda[8]の方法は，図 6 のように，効率的フロ

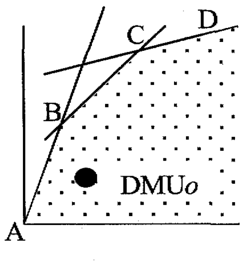

図 5　Tone の方法

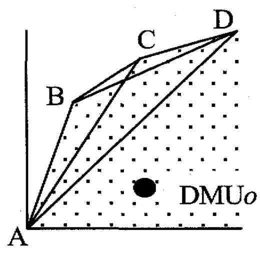

図 6　Ueda の方法

ンティア上の（効率的）DMU で作られるすべての凸包 AB，BC，CD，AC，BD，AD，ABC，ABD，ACD，BCD，ABCD を求め，その凸包が効率的フロンティア上にあるかを調べる．図 6 の場合は，Facet AB，BC，CD である．各 Facet と DMUo との最短距離を求め，得られた距離の中で最小の距離が最短距離になる．

2.2 Ueda[8]の距離最短アルゴリズム

加法モデルで VRS（Variable Returns to Scale）を用いて，Ueda[8]の方法のアルゴリズムを説明する．Ueda の方法では効率的 DMU で作られる凸包が効率的フロンティア上にあるかどうかを判定する必要がある．

定理　n 個の点 $\{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)\,;\, i=1, \cdots, n\}$ が作る凸包上の重心が効率的なら，この凸包上のすべての点は効率的である．

この定理は直観的にもうなずけると思うが，証明を付録 A に記載した．この定理は凸包上の重心が効率的であれば，この凸包は効率的フロンティア上にあり，Facet であることを意味している．さらに，この凸包上の点はすべて効率的なのだから，効率的 DMU で生成される凸包だけを考慮すればよい．重心は次式(2)で求まる．

$$(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i). \tag{2}$$

アルゴリズムは次のようになる．

1) 加法モデルは，入出力データの単位で効率値が変わるので，基準化する．
2) 加法モデルと入出力データを用いて，DMU が効率的かを調べる．効率的 DMU を $E_1, E_2, \cdots, E_E$ とする．
3) $E_1, E_2, \cdots, E_E$ からなるすべての凸包 $P_1, P_2, \cdots, P_P$ を作る．ここで，P_p は P_p に含まれる効率的 DMU の集合で表すことにする．
4) $P_1, P_2, \cdots, P_P$ の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_P$ を計算する．
5) 加法モデルと入出力データを用いて $G_1, G_2, \cdots, G_P$ が効率的 DMU かを調べる．
6) 効率的 DMU である重心を含む凸包は Facet であり，$F_1, F_2, \cdots, F_F$ とする．その一つの Facet F_f に含まれる効率的 DMU を $E_{f1}, E_{f2}, \cdots, E_{fE}$ とする．$\{E_{\overline{f1}}, E_{\overline{f2}}, \cdots, E_{\overline{fe}}\}\subset\{E_{f1}, E_{f2}, \cdots, E_{fE}\}$ の関係があると，前者は後者に含まれるから，$\{E_{\overline{f1}}, E_{\overline{f2}}, \cdots, E_{\overline{fe}}\}$ を除く．例えば，F_1 と F_2 の効率的 DMU が $\{E_1, E_2\}$ と $\{E_1, E_2, E_3\}$ のとき，F_1 は F_2 に含まれるから除く．
7) 残った Facet を凸包 $H_1, H_2, \cdots, H_P$ とし，凸包 $H_1, H_2, \cdots, H_H$ のすべてについて，DMUo からの最短距離を求める．ξ, η をそれぞれ，入力 $(\boldsymbol{x})$ と出力 $(\boldsymbol{y})$ の個数とすると，凸包 H_h までの最短距離 D_h は次式で表される．

目的関数

$$D_h=\min_{s_i^-, s_j^+, \lambda_k}\left(\sum_{i=1}^{\xi} s_i^- + \sum_{j=1}^{\eta} s_j^+\right). \tag{3}$$

制約式

$$\sum_{k\in H_h} x_{ik}\lambda_k + s_i^- = x_{io},\ (i=1, \cdots, \xi)$$

$$\sum_{k\in H_h} y_{jk}\lambda_k - s_j^+ = y_{jo},\ (j=1, \cdots, \eta)$$

$$\sum_{k\in H_h} \lambda_k = 1,$$

$$s^-, s^+, \lambda \geq 0.$$

8) $D_1, D_2, \cdots, D_H$ の最小の値 D_d が解である．
   参照点は，$(\sum_{k\in H_d}\boldsymbol{x}_k\lambda_k, \sum_{k\in H_d}\boldsymbol{y}_k\lambda_k)$ である最短モデルの参照集合は $\lambda_k>0(k\in H_d)$ となる DMU$_k$ である．この λ_k は「荷重」と呼ぶ．

注 1）アルゴリズムのプログラムは数理計画ソフトの一つである Xpress MP を用いると，250 ステップ程度である．手順 2〜6 は Facet を列挙しているので，プログラム言語の C が使える場合は，Fukuda[4]らの Facet の列挙をするフリーソフトを使うのも良い．また，Olesen[5]を参考にしても良い．

注 2）手順 2 では，効率的 DMU を使うことで，凸包の数を減らしている．しかし，定理では，効率的 DMU である必要はない．計算誤差などの理由で，DMU が効率的かの判断が難しい場合は，効率的 DMU とみなした方が良い．

注 3）手順 7 の(3)式の制約式を見ればわかるように，Facet の入力は DMUo の入力以下で，出力は DMUo の出力以上である必要がある．したがって，Facet と

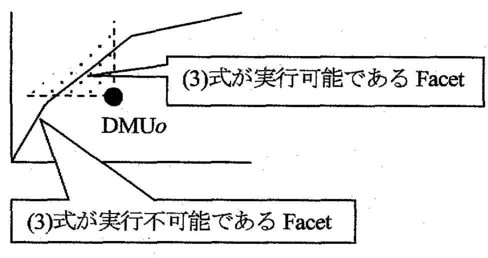

図 7　(3)式の実行可能性と Facet の関係

DMUo の位置関係で(3)式は実行可能解をもたない場合がある．図7に1入力，1出力での(3)式の実行可能性と Facet の関係を例示した．

2.3 加法モデル以外の利用

2.2 節では，説明の便宜上スラックスが明示的な加法モデルを用いて説明したが，手順2，5はDMUが効率的かどうかを判定しているだけなのでBCCなどの他のDEAモデルを用いても良い．

手順7は距離と効率値（または，効率性）との関係が分かりやすいDEAモデルである必要がある．3節の分析では，(3)式の代わりに，基準化した加法モデル(4)を使う（制約式は同じ）．

$$D_h = \min_{s_i^-, s_j^+, \lambda_k} \left(\sum_{i=1}^{\xi} \frac{s_i^-}{x_{io}} + \sum_{j=1}^{\eta} \frac{s_j^+}{y_{jo}} \right). \tag{4}$$

また，Tone [3] の SBM（Slacks based Measure）を利用する場合，目的関数の min を max に変えた次式(5)を用いる．

$$D_h = \max_{s_i^-, s_j^+, \lambda_k} \frac{1 - \sum_{i=1}^{\xi} s_i^- / x_{io}}{1 + \sum_{j=1}^{\eta} s_j^+ / y_{jo}} \tag{5}$$

ユークリッド距離を使うと，より直感的である．

ここまでは，VRS（Variable Returns to Scale）で説明してきたが，CRS（Constant Returns to Scale）の場合は，$\boldsymbol{e\lambda} = 1$ の制約を除けば良い．以下ではVRSと仮定している．

3. 化学会社の分析

3.1 データ

本節では，前節で述べたアルゴリズムを実データに適用する．データは，日経財務データベース [9] の2007年4月から2008年3月までに決算発表された化学会社のうち経常利益が赤字などの8社を除く188社のうち売上高の多い150社の財務諸表を用いる．

効率評価の入出力は，

1）入力を総資産と従業員数（人員）

2）出力を売上高と売上高経常率（経常率）

とする．企業は，規模は大きいが経常率の低い企業と，その逆に大別できることが多いが，化学会社の場合は比較的明確である．入出力は規模と経常率が分かるように選んだ．図8に3社を選んでレーダーチャートに描いた．三菱ケミカルは，規模が大きいが経常率が低く，他の2社はその逆である．なお，各評価項目値は各項目の最大の値を1としてそれに対する比率である．

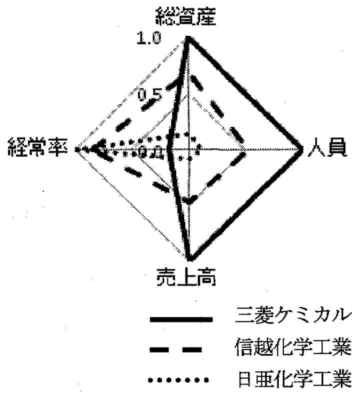

図8 入出力データで見る化学企業の特徴

表1 5社のデータ

会社名	総資産	人員	売上高	経常率
信越化学	1,919	20	1,376	0.22
旭化成	1,425	24	1,697	0.07
DIC	978	25	1,078	0.04
電気化学	375	5	364	0.07
JSR	417	5	407	0.14

注1）DICは，旧大日本インキ化学工業．

注2）単位は，総資産と，売上高は十億円，人員は千人．数字は，四捨五入してある．以下の表でも同じ．

3.2 分析の概要

2.2 節のアルゴリズムで，どのような処理がなされるかを，実例で見てみる．本節では，(4)式の基準化した加法モデルを用いる．

売上高の多い25社から，ランダムに4社を選び，それに信越化学を加えたのが表1である．

最短モデルでどのようにして参照点を決めるかを見てみる．紙面の都合で，社名は短縮して表現する．

1）手順2で効率的なのは，信越，旭，電気，JSR．DICは非効率（距離 2.29）で，旭（荷重 0.48）とJSR（0.47）と信越（0.05）が参照企業である．

2）効率的DMUである信越，旭，電気，JSRの4社で，信越―旭，信越―電気など11の組み合わせ（凸包）ができる．

3）各凸包の重心の座標を計算し，表1の入出力データを用いて重心が効率的かを見ると，信越―旭―JSRと旭―電気―JSRの2つの組み合わせが効率的であり，Facetである．これらは包含関係にないので，手順6の残ったFacetになる．

4）手順7で，DICからこの2つのFacetまでの距離を調べると，信越―旭―JSRに対しては2.07になり，旭―電気―JSRに対しては1.26で最小

表2　DIC と参照点の財務

	資産	人員	売上	経常率
現状	978	25	1,078	0.04
加法モデル	978	15	1,078	0.11
BCC モデル	978	16	1,129	0.08
最短モデル	978	16	1,129	0.07

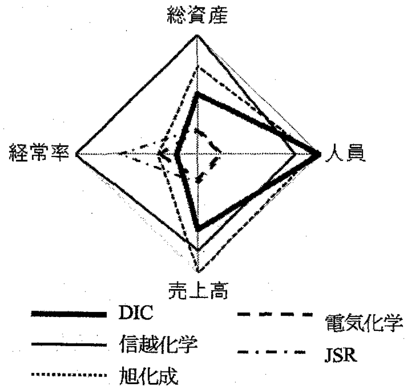

図9　5社の財務状況

値になる．したがって，参照点は旭（0.57)，電気（0.43)，JSR（0.00）の組み合わせで，参照企業は，旭と電気になる．

この例では，非効率なのは DIC1 社なので，効率順位の変化はないが，距離は 2.29 から 1.26 に変化した．参照点の財務は参照集合に属する各 DMU の財務と荷重を用いて（$\sum_{k \in H_d} x_k \lambda_k$, $\sum_{k \in H_d} y_k \lambda_k$）で計算できる．BCC モデルを加えて各モデルの参照点の財務を表2に掲げた．加法モデルは，最短モデルに比べて経常率はかなり大きく，人員と売上高は少し小さく，資産は同じである．BCC モデルは最短モデルより経常率が少し大きく，他は同じである．

図9にレーダーチャートを描いて，加法モデルと最短モデルが，このようになっている理由を検討してみる．

図からわかるように，DIC は経常率が低い．したがって，加法モデルでも最短モデルでも，これの改善が提案されている．加法モデルの参照点は旭と JSR の比重が高いのでこの2つで考える．JSR と DIC は経常率の差が大きいことは一目瞭然である．最短モデルでは，JSR から，より低い経常率である電気に入れ替わった．そのため派生的に，売上高は若干増えている．人員は，DIC は非常に多いので，両方の参照点の人員は少ない．ただ，インキ産業には人手のかかる多品種少量生産工程があるので人員削減は至難のことであると思われる．

表3　コンピュータ処理の統計

DMU	効率的 DMU	凸包	Facet	時間（秒）
50	11	2, 036	10	8
60	12	4, 083	15	23
70	11	2, 036	9	13
80	12	4, 083	13	26
90	14	16, 369	18	97
100	12	4, 083	11	29
110	13	8, 178	11	55
120	16	65, 519	15	425
130	13	8, 178	13	61
140	13	8, 178	14	65
150	14	16, 369	15	125

3.3　コンピュータ処理は？

手順2，3で大量の凸包ができるので，実用になるぐらいの数の DMU のコンピュータ処理ができるかは気になるところである．幸か不幸か，Cooper[3]が再三述べているように，DEA では，DMU の数が少ないと，ほとんどの DMU が効率的になる．逆に考えると DMU がふえても効率的 DMU は相対的に少なくなるので，凸包はそれほど増えない．

表3に DMU 数と，手順2の効率的 DMU 数，凸包数，Facet 数，計算時間を示した．使用したのは 2.6 GHz のデュアルコアパソコン．計算時間は，アルゴリズムが実用的かを調べるために計測したので，通信などの他のプログラムも動いており，厳密ではない．表からわかるように，計算時間は効率的 DMU の数，したがって，凸包（重心）の数に依存している．実際，計算時間の大部分は手順5の凸包の重心の効率計算である．今回のデータでは 120 DMU をピークに効率的 DMU が増えないので計算時間も増えない．

実際の DEA の応用では，DMU と効率的 DMU の数はそれほど多くないので，多分，困らないと思うが，計算できない場合は，Heuristic な方法になる．

3.4　40社への最短モデルの適用

本節では，3.1，3.2，3.3 節で用いた 150 社のデータのうち，売上高の多い 40 社に最短モデルを適用する．データは付録 B に掲げた．

効率的 DMU（企業）は9社（三菱ケミカル，三井化学，旭化成，信越化学工業，日立化成工業，日亜化学工業，大日精化工業，日産化学工業，チッソ）で，凸包が 502 個生成され，うち6個が手順6で残った

表4　モデルによる順位の変化

最短モデル	加法モデル	BCCモデル
ＪＳＲ	三菱瓦斯化学	日東電工
昭和電工	ＪＳＲ	三菱瓦斯化学
三菱瓦斯化学	日東電工	コーセー
カネカ	イノアック	積水化学工業
東ソー	コーセー	イノアック
エア・ウォーター	エア・ウォーター	ライオン
クラレ	東亜合成	日本ゼオン
住友化学	ＡＤＥＫＡ	東亜合成
電気化学工業	花王	エア・ウォーター
日油	トクヤマ	ＡＤＥＫＡ
大陽日酸	日本ゼオン	日本触媒

表5　参照企業の荷重合計と被参照回数

	加法モデル		最短モデル	
	荷重	回数	荷重	回数
三菱ケミカル	0.58	4	0.47	1
三井化学	4.55	28	3.73	19
旭化成	――	0	1.17	3
信越化学工業	0.64	2	0.05	1
日立化成工業	1.71	5	5.92	23
チッソ	2.09	4	12.66	25
日亜化学工業	7.62	24	0.22	4
大日精化工業	0.27	1	2.86	5
日産化学工業	14.54	25	3.92	10

Facet である．

加法モデルやBCCモデルと最短モデルとでは，効率の考え方が違うので，非効率的DMUの効率順位が変わるのは当然である．表4に各モデルでの効率の高い上位10社の順位をまとめた．すべてのモデルで10位以内に入っているのは，三菱瓦斯化学とエアー・ウォーターだけである．

そのことを，最短モデルと加法モデルの参照企業の特徴で検討する．表5は参照企業を売上順に並べた．

荷重は，参照されたときの荷重（(3)式の制約式のλ）の合計である．荷重を見ると，従来モデルと最短モデルでは，参照企業に大きな変化がみられる．(注：(3)式は線形計画法であるので，多重解が存在するかもしれないが，被参照回数と荷重合計を求めているので，多重解の影響は少ないと判断した)

表6の参照企業の財務を用いて簡単に特徴を見てみる．表6では，総資産と人員は売上高との比率で表示してある．

加法モデルで主な参照企業になっている日亜化学と日産化学は，経常率が他社より格段に高くなっている．

表6　参照企業の財務

	資産率	従業員率	売上	経常率
三菱ケミカル	0.944	0.013	2930	0.04
三井化学	0.822	0.007	1787	0.04
旭化成	0.840	0.014	1697	0.07
信越化学工業	1.394	0.015	1376	0.22
日立化成工業	0.732	0.024	627	0.09
チッソ	0.793	0.010	270	0.07
日亜化学工業	1.820	0.021	221	0.26
大日精化工業	0.877	0.020	181	0.04
日産化学工業	1.021	0.013	169	0.14
４０社平均	1.039	0.019	1029	0.08

信越化学も経常率が高いが，2社に比べ付録Bの表に見るように資産の量が多いので，日亜化学，日産化学が参照企業になったと思われる．この3社を除くと，多数派の企業は低い経常率である．この多数派の中では，資産率や従業員率の低い日立化成やチッソや三井化学が最短モデルの参照企業になっていると思われる．

つまり，多数派には属さないが，エクセレントな点を持つ企業は従来モデルの参照企業になりやすいが，多数派の中でよい点を持つ企業は最短モデルの参照企業になりやすい傾向があるようだ．

4. まとめ

この数年，DEAによる化学業界の分析を行ってきた．DEAは便利ではあるが，業界常識と異なる回答を出すことが少なくない．その一つが，利益率の高い特化製品を主商品とする企業との比較で効率順位が決まることである．今回の例では，信越化学，日亜化学工業，日産化学工業である．多くの化学会社で範とすべき立派な会社である．しかし，現状の化学企業の比較対象といわれると首をかしげざるを得ない．化学産業の主たる製品は依然として，三菱ケミカルや三井化学に代表される石油化学製品やその誘導品や応用製品であり，はるかに大きな生産額である．特化製品を主商品にする企業を基準に，効率値を語られても意味がないことが多い．逆のケースも同じだろうと思う．

効率的フロンティア上の点は模範とする入出力の組み合わせであると同時に，DMUの効率測定の基準でもある．

1節で述べたように，最短モデルが提案されている．先行研究の著者の多くは前者の「効率的フロンティア上の点は模範とする入出力の組み合わせ」に関心があり，効率測定の基準に使うことに意図的には言及して

いない．一番近い点を参照点とすると，遠い点を参照点にする場合に比べ，真似しやすい目標になると主張している．このような視点については，Takeda[6]や上田[1]や Tone[7]や Aparicio[2]を参照いただきたい．

本文では後者の「DMU の効率測定の基準である」の視点で最短モデルを検討した．本節冒頭に述べた事業内容の異なる企業間での効率比較がなされる原因の一つは，距離最短の参照点を効率測定の基準としていないことから来ている．本文では，

1) 効率的フロンティア上の距離最短の参照点を効率測定の基準にするアルゴリズムを提案し，
2) コンピュータで実際に解けることを実証した．
3) 次に，化学会社の財務データに適用し，最短モデルと加法モデルと BCC モデルと比較し，効率順位が異なることを示した．
4) 最後に，参照企業の財務を調べ，最短モデルが少なくとも従来の DEA よりは，理解しやすい効率評価ができることを示した．

本文について某社の経営企画部門経験者と議論した．彼らの意見を要約すると，「三菱ケミカル，住友化学，三井化学，旭化成などはエチレンセンターが主体で，医薬等のファインケミカルを併せ持つ．このような同一業態内の比較であれば，経営効率比較は意味がある．これらと信越化学，日亜化学工業などとの比較であれば，経営効率の問題ではなく，長期にわたる事業選択という経営戦略の問題である．多くの化学企業で取られてきた経営戦略は事業規模拡大であったが，これが経営効率につながらないのは当然であり，経営効率の比較と経営戦略の比較を明確にして効率比較すべきである」である．この意見は必ずしも，普遍的ではないが，同一業態内で経営効率比較すべしとの問題提起には本文である程度答えた．長期にわたる経営戦略が効率に及ぼす影響は今後の検討課題と考えている．

参考文献

[1] 上田徹，『オペレーションズ・マネージメント』，208-209，牧野書店，2006.

[2] Aparicio, J., Ruiz, J.L. and Sirvent, I., "Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA," *Journal of Productivity Analysis*, 28 (2007), 209-218.

[3] Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, T., *Data Envelopment Analysis second edition*, Springer, 2007.

[4] Fukuda, K., "Welcome to the cdd and cddplus Homepage," 2008, last accessed in April 2010.

[5] Olesen, O.B. and Petersen, N. C. T., "Identification and Use of Efficient Faces and Facets in DEA," *Journal of Productivity Analysis*, 20 (2003), 323-360.

[6] Takeda, K. and Nishino, H., "On measuring the inefficiency with the inner-product norm in data envelopment analysis," *European Journal of Operational Research*, 133 (2001), 377-393.

[7] Tone, K., "Variations on the theme of slacks-based measure of efficiency in DEA," *European Journal of Operational Research*, 200 (2010), 901-907.

[8] Ueda, T. and Amatatsu, H., "Evaluation of Chemical Companies Using the Add-Min Model," *Proceeding of DEA Symposium 2008*, 96-101.

[9]『日経財務データ』，日本経済新聞社，2009.

付録 A　定理の証明

定理　n 個の点 $\{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)\,;\, i=1, \cdots, n\}$ が作る凸包上の重心が効率的なら，この凸包上のすべての点は効率的である．

証明　DMU（点）が N 個ある場合を，加法モデルを用いて証明する．

加法モデルの主問題は次式である．

$$\text{目的関数}\quad D=\max_{s^-,s^+,\lambda}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{s}^-+\boldsymbol{e}\boldsymbol{s}^+) \tag{A.1}$$

制約式

$$X\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{s}^-=\boldsymbol{x}_o,\quad (X=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N))$$
$$Y\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{s}^+=\boldsymbol{y}_o,\quad (Y=(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_N))$$
$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{\lambda}=1,\ \boldsymbol{s}^-\geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}^+\geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda}\geq \boldsymbol{0}.$$

双対問題は次式である．

$$\text{目的関数}\quad w=\min_{v,u,u_0}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_o+u_0) \tag{A.2}$$

制約式

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}X-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}Y+u_0\boldsymbol{e}-\boldsymbol{t}=0,$$
$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{t}_v=\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{e},$$
$$\boldsymbol{t}\geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{t}_v\geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{t}_u\geq \boldsymbol{0},\ u_0:\text{free}.$$

主問題で，点 $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ が効率的である必要十分条件は，Cooper[3]によれば，$D=0,\ \boldsymbol{s}^-=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}^+=\boldsymbol{0}$ である．次の関係式が成り立つ．

$$X\boldsymbol{\lambda}^*=\boldsymbol{x}_o,\ Y\boldsymbol{\lambda}^*=\boldsymbol{y}_o,\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{\lambda}^*=1, \tag{A.3}$$
$$D=0,\ \boldsymbol{s}^{-*}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}^{+*}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda}^*\geq 0.$$

次に，n 個の点 $\{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)\,;\, i=1, \cdots, n\}$ で作られる凸包 F の重心

$$(\boldsymbol{x}_g, \boldsymbol{y}_g)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i) \tag{A.4}$$

が DMU$\{1, \cdots, N\}$ の中で効率的である場合に成立す

る条件を考える．重心が効率的であるためには式(A.3)が成り立たなければならない．

相補性の強定理から

$$\boldsymbol{s}^{-*}+\boldsymbol{t}_v{}^{\mathrm{T}}>0,\ \boldsymbol{s}^{+*}+\boldsymbol{t}_u{}^{\mathrm{T}}>0$$

を満たす解が存在する．その解においては，$\boldsymbol{s}^{-*}=\boldsymbol{s}^{+*}=\boldsymbol{0}$ なので

$$\boldsymbol{t}_v>0,\ \boldsymbol{t}_u>0 \tag{A.5}$$

となる．逆に(A.5)が成り立てば，相補性より

$$\boldsymbol{s}^{-*}=0,\ \boldsymbol{s}^{+*}=0$$

となる．

主問題が $D=0$ なので，双対定理から

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_g-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_g+u_0=0$$

であり，(A.4)式で置き換えると，

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\textstyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{x}_i/n-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{y}_i/n+\sum_{i=1}^n u_0/n$$
$$=\textstyle\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i+u_0)/n=0$$

でなければならないが，双対問題の制約式より

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i+u_0\geq 0 \quad (i=1,\cdots,n)$$

なので，

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i+u_0=0 \quad (i=1,\cdots,n) \tag{A.6}$$

を満たす．以上から(A.5)，(A.6)を満たす解が存在する．

重心が効率的なときに成立する関係式(A.5)，(A.6)が求まったので，F 上の任意の点 $(\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{y}_c)=(\sum_{i=1}^n\boldsymbol{x}_i\lambda_i,\ \sum_{i=1}^n\boldsymbol{y}_i\lambda_i,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i=1)$ を考える．

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_c-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_c+u_0$$
$$=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\textstyle\sum_{i=1}^n\boldsymbol{x}_i\lambda_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{y}_i\lambda_i+u_0\sum_{i=1}^n\lambda_i$$
$$=\textstyle\sum_{i=1}^n\lambda_i(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i+u_0)=0. \tag{A.7}$$

となる．すなわち F 上の任意の点で

$$w=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_c-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_c+u_0=0. \tag{A.8}$$

である．この $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$ に関しては(A.5)が成り立っており，相補性あるいは双対定理から $(\boldsymbol{x}_c,\boldsymbol{y}_c)$ は効率的であるといえる．　（証明終わり）

付録B　3.4節で用いた40社の財務データ

（経常率は、1,000,000倍してある）

	資産合計	従業員数	売上高	経常率
三菱ケミカル	2765837	39305	2929810	43991
住友化学	2358929	25588	1896539	48926
三井化学	1469248	12814	1786680	37022
旭化成	1425367	23854	1696789	70991
信越化学工業	1918544	20241	1376364	217995
花王	1232601	32900	1318513	86630
ＤＩＣ	978299	25164	1077897	38016
昭和電工	1029629	11329	1023238	58627
積水化学工業	782859	18907	958674	40209
東ソー	816994	11088	827394	63393
日東電工	595972	25852	745259	99922
資生堂	675864	28793	723484	89965
宇部興産	720898	11058	704284	66318
日立化成工業	458741	15303	626929	94905
三菱瓦斯化学	601386	4686	519329	118921
大陽日酸	547237	8741	507718	75849
カネカ	452620	7498	502968	67332
エア・ウォーター	353399	7397	426226	65012
クラレ	490365	6770	417601	102531
ダイセル化学工業	515617	7685	416989	66822
ＪＳＲ	416950	5122	406967	137758
電気化学工業	375364	4653	363996	68457
ライオン	279147	5761	341717	29568
トクヤマ	383264	5057	307453	98874
日本ゼオン	335730	3166	302925	68129
日本触媒	352783	3290	302669	68540
イノアック	227655	6717	272125	75520
チッソ	213754	2762	269687	74831
日本ペイント	288810	5814	259209	43583
東洋インキ製造	294961	6747	257446	38163
関西ペイント	282884	7724	256586	101814
住友ベークライト	267421	8833	225252	43236
日亜化学工業	402344	4604	221055	257814
セントラル硝子	235290	4601	193238	50953
ＡＤＥＫＡ	212511	2556	191987	79136
大日精化工業	158674	3594	180934	44723
コーセー	172128	5079	180222	82421
日産化学工業	172660	2241	169172	144504
東亜合成	182681	2552	162729	82726
日油	178772	3755	159045	64441