離散最適化解法の金融工学への応用
—年金等の長期運用に役立つ最適化技術の開発を目指して—

仲川　勇二，井垣　伸子，伊佐田百合子，疋田　光伯

金融危機が起こるたびに，年金等の長期資金の運用のあり方が問題になる．本稿では，年金等の長期資金の運用は本来どうあるべきかについて考える．すなわち，長期資金の運用に対してはその運用コストを最小にすることが重要であることを明らかにしたうえで，運用コストが最小となるポートフォリオの作成方法について考える．また，我々が開発を目指しているポートフォリオ作成法に役立つ最適化技術の現状について報告する．

キーワード：年金基金の運用，長期安定運用，インデックスファンド，ポートフォリオ最適化，離散最適化

1. はじめに

科学技術の利用には常に良い面と悪い面がある．高性能のカメラは子供の成長記録を残すにはまたとない道具である．しかし，この同じ道具がロボット兵器の目として使われてもいる．

金融工学の目的は，高い運用益を生み出すことによって，銀行・証券会社に莫大な利益をもたらすことや，アメリカで典型的に表れているように金融機関の従業員に高い報酬を支払うことが本来の目的ではないはずである．金融工学は，世界経済の持続的発展を可能にするためにこそ必要な道具である．また，年金等の長期資金の安定した運用をも可能にするものである．

塩沢教授の「金融危機と金融工学—どこの論理が破たんしたのか—」[8]の中で「金融工学を用いて金融商品を設計するとき，商品の売り手・買い手にどんなリスクが生ずるか，またどのような弱点があるのか，金融工学は十分に説明する義務があろう．その点に，金融工学が十分自覚的だったとは言えない」という指摘がある．銀行・証券会社といった資産運用会社の収益をいかに多くするかということに役立つ金融工学から個人投資家や企業（年金基金）といった最終投資家の収益をいかに多くするかに役立つ金融工学，言い換えれば生産者（金融商品取引業者）重視から消費者（顧客）重視の金融工学が必要とされている．

2. 手数料について

多くの人は投資信託を買う場合，売買の手数料には注意を払うが，毎年支払う運用手数料（信託報酬等）には無関心である．おそらく，株価では1日に2%以上変動することも珍しくないので，年2%の運用手数料はどうでもよい額に見えるのではないだろうか．しかし，年金のような長期運用資金では，この手数料は結果として非常に大きな額になる．ある銀行の信託報酬は純資産総額の最大は年約2.1%と書かれている．ここで，管理費（信託報酬等）を年2%と仮定して，100 m^2 の中古住宅（投資信託）の購入を例にとって考える．

2011年5月に中古住宅を1千万円で購入したとする．途中で最高3千万円に値上がりし最低は5百万円だったが，2051年5月に1千万円で住宅を売却することができた．自分で管理した場合の経費は購入と売却の際の手数料と税金だけである．しかし，住宅購入の際に，その管理を業者に依頼した場合には年2%の管理費の支払が必要となる．そして，40年後，あなたは100 m^2 の住宅のうちの半分以下 44.57 $(=100\times 0.98^{40})$ m^2 しか権利が残っていないという厳しい現実に直面するであろう．40年間の管理費（信託報酬等）

なかがわ　ゆうじ
関西大学 総合情報学部
〒569-1095 高槻市霊仙寺町2-1
いがき　のぶこ，いさだ　ゆりこ
関西学院大学 総合政策学部
〒669-1337 三田市学園2-1
ひきた　みつのり
四国大学 経営情報学部
〒771-1192 徳島市応神町古川

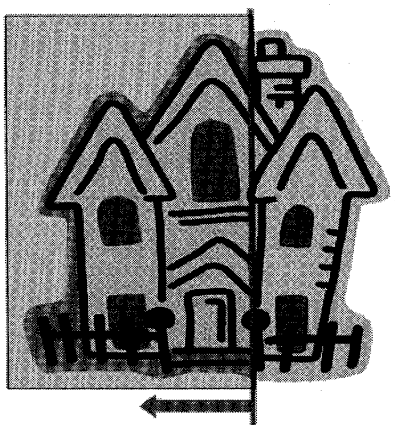

図1 失った資産
（半分以上が管理費として消える）

として住宅の半分以上の55.43 m^{2}が管理会社のものになってしまうのである（図1）．あなたはこのような管理（資金運用）を住宅管理会社（投資信託運用会社）に委託しますか？　長期運用資金はできれば自分で株式を購入して管理するのが好ましいといえる．

3. アクティブ運用とパッシブ運用

資産の運用には，運用者の判断で能動的に行うアクティブ運用と運用者の判断は交えずに市場に追従するよう運用する受動的なパッシブ運用がある．

アクティブ運用は市場インデックス（日経平均株価（日経225）や東証株価指数（TOPIX）など）よりも高いパフォーマンスを生みだすことを目的にした運用手法である．しかし長期運用の場合，市場平均以下の成績のものが多く，時期にもよるがアクティブ運用ファンドの7割前後が市場インデックスに負けていたといわれている．このことは世界的に実証されていることでもある[2]．

パッシブ（インデックス）運用は日経225やTOPIXといった指標の動きに連動する運用成果を目標としている．長期の資金運用には株式で運用する場合は，リスクと手数料の面からインデックス運用が適している．

4. インデックス運用

インデックスファンドのパフォーマンスの評価にはトラッキング・エラーが使われる．トラッキング・エラーは，ポートフォリオと目標とするTOPIX等のベンチマークのリターンの間の乖離のことで，ポートフォリオを運用している投資信託会社の場合はこの乖離をできるだけ小さくせざるを得ない．そのために銘柄

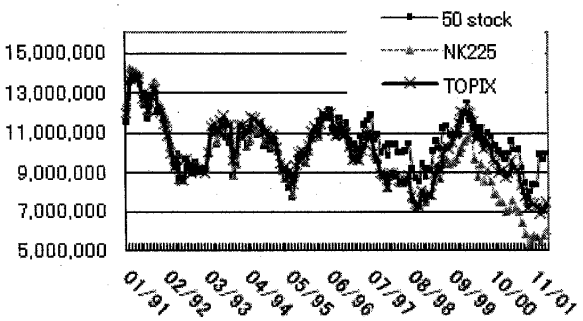

図2 50銘柄のポートフォリオと日経平均

の組み換え等（リバランス）を行う．例えば，東証一部に指定替えとなった銘柄がある場合，指定替え発表・変更日前後の株価は発表日以降急上昇し，その後徐々に下降している．これは，変更日にインデックス運用者が購入することを見越して，その銘柄を購入する投資家が存在するためである．インデックス投資家はトラッキング・エラーの最小化を優先するため，指定替え発表・変更日に購入せざるを得ないという事情がある[10]．各銘柄の価格が一斉に高くなる全面高や，一斉に低くなる全面安の現象が生じやすくなる要因となっている．このようにインデックス運用が市場に与える影響として，アブノーマルリターンの発生や，市場の効率性低下の可能性が挙げられている．しかし本来の年金資金の運用でこのような短期のリバランスが必要なのだろうか？　図2は1991年3月から1993年3月までのデータを用いて50銘柄のポートフォリオを作成し，その後9年間の50銘柄ポートフォリオの価格での軌跡を示したものである．この50銘柄は2000年のITバブル期も無事に乗り越えている．この間，日経225銘柄は1999年までは毎年2，3銘柄の入れ替えであったが，ITバブルの影響で2000年には37銘柄の異常な入れ替えがあり，さらに2001年，2002年には32銘柄の入れ替えまたは補充がなされている．日経225連動型ファンドのように日経225に追従するためには大量の売り買いを行う必要があり，運用コストの上昇が発生する．

リバランスを行うには当然コストがかかり，またポートフォリオのパフォーマンス（市場インデックスとの連動精度）の低下につながる．リバランスを数年間行わなければどうなるのであろうか？　もし，リバランスを必要とせずかつ市場インデックスに連動するようなポートフォリオを科学的に構成することができれば，年金等の長期資金を自主運用することが可能となる．すなわち，運用手数料を必要としないインデック

ス運用（顧客重視の金融工学）への道を切り拓くことができる．例えば，長期間リバランスなしで日経225に連動する50銘柄のポートフォリオが分かったとし，この50銘柄を株式（ミニ株の場合は10分の1の価格）で購入したとする．そのまま持っていて数十年後に売却した場合，必要となる経費は売買の手数料（ネットを用いるとかなり安い）と税金のみである．長期運用する場合は，株式で保有し自主運用するのが最も賢明な選択だといえる．このとき，問題となるのは長期間リバランスなしで日経225に連動するポートフォリオの構成要素50銘柄をいかに選定するかである．次に筆者らが開発した自主運用に役立つ金融工学の道具について述べる．

5. 長期運用銘柄選定に役立つ最適化手法

5.1 単一目的最適化

プロジェクトの数がnで資源の数がmの最適化問題を考える．各プロジェクトiにk_i+1レベルの代替案（項目）があるものとする．また，プロジェクト$i\in\{1,2,\cdots,n\}$がレベル$x_i\in\{0,1,\cdots,k_i\}$で採用されるとき，資源jは$g_{ji}(x_i)$消費されるものとし，このとき得られる利得を$f_i(x_i)$とする．また，資源jの最大許容量をb_jとする．この最適化問題は多次元（多制約）非線形ナップザック（変数分離形離散最適化）問題として次のように書ける．

$$\mathrm{P}:\max f(\mathbf{x})=\sum_{i\in N} f_i(x_i)$$
$$\text{subject to } g_j(\mathbf{x})=\sum_{i\in N} g_{ji}(x_i)\le b_j\ (j\in M)$$
$$x_i\in K_i\ (i\in N),$$

ここで，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$は決定変数ベクトル，$M=\{1,2,\ldots,m\}$は制約条件の添字集合，$N=\{1,2,\ldots,n\}$は決定変数の添字集合，$K_i=\{0,1,2,\ldots,k_i\}$は各変数$x_i$の代替項目集合である．代理制約法と次に示す標的問題を用いることによって，改良代理制約法（ISC法）[6]が開発され，大規模な多次元非線形ナップザック問題が厳密に解けるようになっている．

$$\mathrm{P_T}(f_\mathrm{T},\mathbf{u}^*):\text{Enumerate all solutions } \mathbf{x} \text{ hitting the target}: f(\mathbf{x})\ge f_\mathrm{T}$$
$$\text{subject to } \sum_{j\in M} u_j^* g_j(\mathbf{x})\le \sum_{j\in M} u_j^* b_j$$
$$x_i\in K_i\ (i\in N)$$

ここで，$\mathbf{u}^*$は最適な代理乗数で，f_Tは標的値である．この単一制約の標的問題を解くことで，ISC法は複数制約の原問題Pの厳密解を求めている．ISC法を金融の問題に応用したのが文献[4][7]である．

連動すべき市場インデックス（日経225等）の収益率（ランダム変数）をR_0とし，個別の銘柄$i\in\{1,2,\ldots,n\}$の収益率をR_i，求めるべきポートフォリオの収益率をR，すなわち$R=\sum_{i=1}^n R_i\xi_i$，とおくと，市場インデックスに連動するq銘柄の最適なポートフォリオを見つけ出す問題は次のように書ける．

$$\mathrm{P^A}:\text{Minimize } S(\xi)=E[(R_0-R)^2]$$
$$=\mu_0^2+\sigma_{00}+\sum_{i\in N}\sum_{s\in N}(\mu_i\mu_s+\sigma_{is})\xi_i\xi_s$$
$$-2\sum_{i\in N}(\mu_0\mu_i+\sigma_{0i})\xi_i$$
$$\text{subject to } \sum_{i\in N}\xi_i=1,\ \sum_{i\in N} z_i(\xi_i)=q,$$
$$\xi_i^L\le\xi_i\le\xi_i^U\quad(i\in N),$$

ここで，$E[\cdot]$はランダム変数・の期待値で，μ_iは銘柄iのリターンの平均，$\mu_i=E[R_i]$，σ_{is}は銘柄iとsの間の共分散，$\sigma_{is}=E[(R_i-\mu_i)(R_s-\mu_s)]$．$\mu_0=E[R_0]$，そして$\sigma_{0s}=E[(R_0-\mu_0)(R_s-\mu_s)]$ $(s=0,1,\cdots,n)$，qは選択される銘柄の個数，$z_i(\xi_i)$はステップ関数でξ_iが正のとき1で，0のときは0の値を持つとする．この問題をISC法で解くためにξ_iの定義域を離散化する．このとき制約条件は変数分離形の関数に書き換え可能であるが（$z_i(\xi_i)$はξ_iの離散値が0のとき以外は値を1に固定すればよい），目的関数はこのままでは変数分離形には書き換えられない．そこで二次対角近似（Diagonal Quadratic Approximation）[5]を用いて交差項（cross term）を線形近似し変数分離形に問題を変換する．暫定解$\boldsymbol{\xi}^{(l)}$の近傍での交差項$\xi_i\xi_s(i\ne s,\ i\in N,\ s\in N)$は

$$\xi_i\xi_s=\{\xi_i^{(l)}+(\xi_i-\xi_i^{(l)})\}\{\xi_s^{(l)}+(\xi_s-\xi_s^{(l)})\}$$
$$\fallingdotseq\{\xi_i^{(l)}\xi_s^{(l)}+\xi_s^{(l)}(\xi_i-\xi_i^{(l)})+\xi_i^{(l)}(\xi_s-\xi_s^{(l)})\}$$
$$=\xi_s^{(l)}\xi_i+\xi_i^{(l)}\xi_s-\xi_i^{(l)}\xi_s^{(l)}$$

と近似できる．この近似により問題$\mathrm{P^A}$は非線形ナップザック問題となりISC法により既存の解法では得られない精度の“かなり”よい解を得ることができる[4]．しかしこの“かなり”良い解がどの程度良い解なのか説明が困難であったが，最近の二目的最適化の研究を通じて，この“かなり”の説明に糸口が見えてきた．このことについては後述する．

この最適化法を用いて過去2年間（1992年，1993年）の株式のデータ（In-sample）に対して，日経225に連動するポートフォリオを探してみた．その結果，連動するポートフォリオは実用上問題がない程度

の小さな誤差を許せば選択される銘柄の組み合わせの違いとウエイトのパターンの違いにより，天文学的な数が存在していることが分かった．ポートフォリオの3パターンを図3に示す．使用したデータ（In-sample すなわち過去）の範囲で日経225（黒色）に連動するが，その後は日経225から離れてしまう軌跡を持つものがほとんどである．しかし，筆者らの長年の研究によって，天文学的な数のポートフォリオの中から未来の約3年間にわたってリバランスなしで連動する50銘柄のポートフォリオを見つけることができるようになってきている（図4）．

また，同じ技術を用いて日経225より毎月0.5%ずつリターンが増えるポートフォリオを見つけることができる．In-sample の外では日経225に対してプラスアルファのリターンを持つポートフォリオとなっている（図5）．

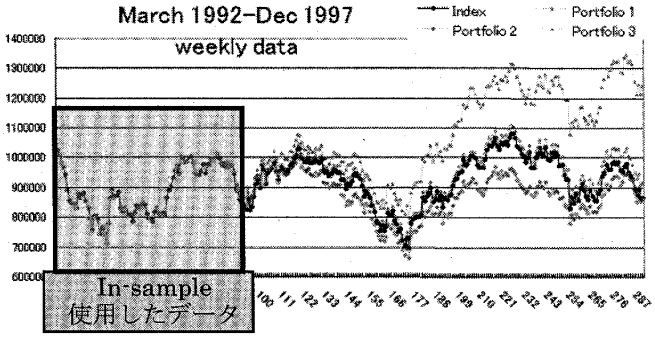

図3　過去2年間連動するポートフォリオ

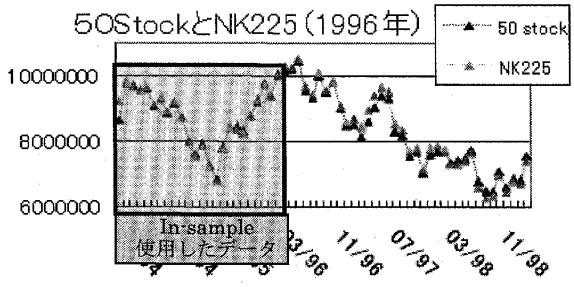

図4　Out-of-sample でも連動するポートフォリオ

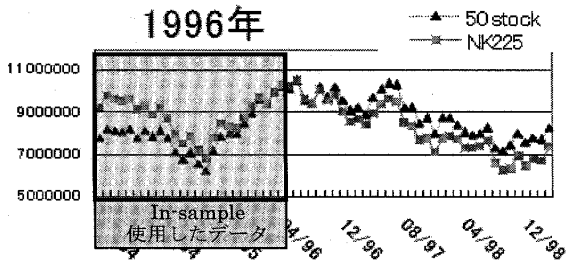

図5　月0.5%のプラスアルファの利得があるポートフォリオ

実際の株式の取引では，株式売買における最低限の株数である「売買単位」の制約がある．また，取引に関連した執行コストとして，ある銘柄に買いまたは売り注文を出すと市場での需給関係が変化し注文を出す以前よりも取引価格が上昇または下降するといったように価格が動くインパクトコスト，また注文を出すまでの間に取引価格が変化するタイミングコスト等がある．このような売買単位（口）と取引執行コストを考慮した総投資額 C の問題は次のように書ける[7]．

$$\mathrm{P}^{\mathrm{B}}: \text{Minimize } S(\boldsymbol{\xi})=E[(R_0-R)^2]$$

$$\text{subject to } \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i - 1\right| \leq \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\xi_i) \leq \theta C,$$

$$\xi_i \in \Omega_i \quad (i \in N)$$

ここで，ε は許容誤差，θ は執行コストの許容率，$h_i(\xi_i)$ は各銘柄 $i \in N$ の執行コスト，Ω_i は各銘柄の離散の購入割合；$\Omega_i=\{0, \omega_i, 2\omega_i, 3\omega_i, \ldots, a_i\omega_i\}$，$\omega_i$ は各銘柄の最低購入価格を総投資額 C で割った値，また a_i は各銘柄の最大の口数である．配当を考慮した問題も同様の問題として定式化できる．この問題についても“かなり”正確に解けるようになっている．この“かなり”も二次対角近似の影響がどの程度であるかにかかっている．

5.2　二目的最適化

二目的ナップザック問題の厳密解法としては，最近の代表的なものに Sayin ら[9]と Bazgan ら[1]のアルゴリズムがあるが，共に実用規模の問題を厳密に解くには欠点を持っている．しかし，標的問題を用いた標的解法[3]は二目的0-1ナップザック問題での実験結果（図6）では，問題規模がある程度以上になれば Sayin らや Bazgan らの解法よりも明確に優れた性能を発揮することが分かってきている．ここでは，この標的解法を金融工学の多目的問題へ応用する．

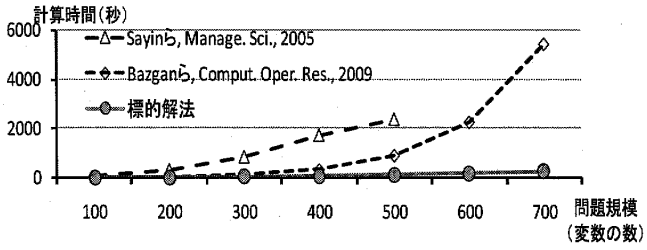

図6　標的解法と他の解法との比較

二目的の金融最適化問題で典型的な問題は平均・分散モデルである．株式を取引する売買単位の制約のもとで，ポートフォリオの平均（リターン）$E(\boldsymbol{\xi})$ を最大化し，分散（リスク）$V(\boldsymbol{\xi})$ を最小化する問題は下記のように書ける．

$$\mathrm{P^C}: \text{Minimize } V(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sigma_{is}\xi_i\xi_s$$

$$\text{Maximize } E(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\xi_i$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{n}\xi_i=1,$$

$$\xi_i\in\Omega_i\ (i\in N),$$

$$0\leq\xi_i^L\leq\xi_i\leq\xi_i^U\ (i\in N)$$

上記の問題 $\mathrm{P^C}$ の2つの目的関数を重みづけして一つの代理目的関数に変換した問題 $\mathrm{P^D}$ は下記のように表すことができる．

$$\mathrm{P^D}: \text{Maximize } f(\boldsymbol{\xi})=w_1E(\boldsymbol{\xi})-w_2V(\boldsymbol{\xi})$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{n}\xi_i=1,$$

$$\xi_i\in\Omega_i\ (i\in N),$$

$$0\leq\xi_i^L\leq\xi_i\leq\xi_i^U\ (i\in N)$$

$$w_1+w_2=1,\ w_1,w_2\geq 0$$

ここで，重み (w_1, w_2) をある値に固定して，それに対応する単一目的関数の問題を解き得られた最適値を $f_{\max}$ とおく．

筆者らのアルゴリズムでは，$f(\boldsymbol{\xi})\geq f_{\mathrm{T}}$ を満たすような実行可能解（標的解）で列挙したい個数 m を指定すれば，列挙に必要な標的値 f_{T} が二分探索法で自動決定される．図7～9は，前節と同じ株式データに対して，$w_1=0.1$，$w_2=0.9$ として解き，平均を縦軸，分散を横軸として，それぞれ $m=50000$，5000，500 の場合の得られた標的解をプロットしたものである．解の個数が減少するとそれに対応して標的値 f_{T} の値は大きくなる．ぞれぞれの図の中の黒▲点は目的関数値が $f_{\max}$ となる場合の最適解の位置で，灰色○点はパレート解，灰色×点は標的解である．これを見るとその最適解に向けて解領域が収斂していく様子が分かる．また，パレート解の集合が $m=50000$，5000，500 のそれぞれの場合にほぼ一致していることが分かる．特に $m=50000$ と 5000 の場合は両端の一部を除いてほぼ完全に一致している．このことから二次対角近似の本解法への影響は極めて少ないと考えられる．

次に重み (w_1, w_2) を少し変更して，同様の操作をする．このように重みを少しずつ変更すると得られる解空間は図10のようにつながる．図10は最低購入株

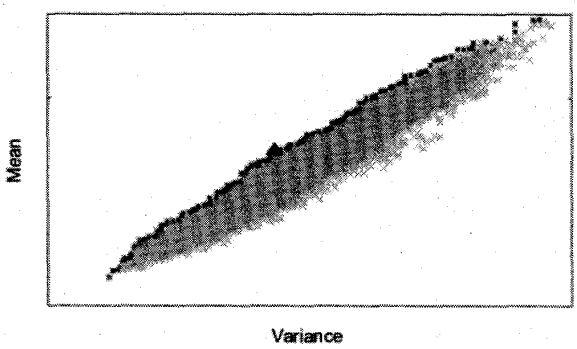

図7　$m=50000$ のときの解の平均分散

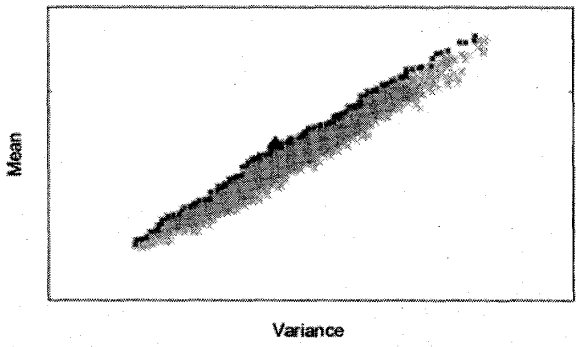

図8　$m=5000$ のときの解の平均分散

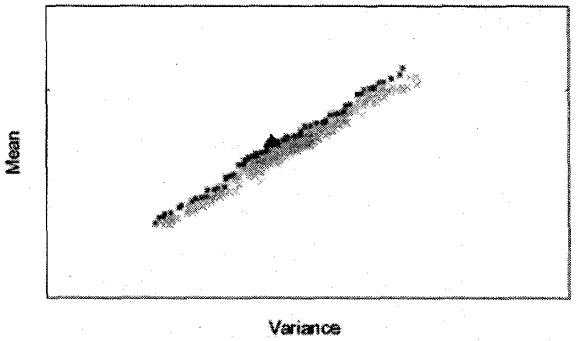

図9　$m=500$ のときの解の平均分散

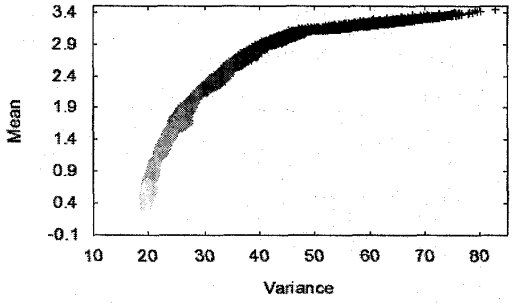

図10　9パターンの重みに対する標的解

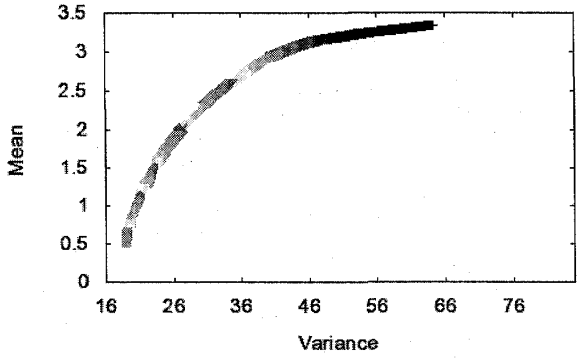

図 11　31 パターンの重みに対する標的解

数（単元株）を考慮して，2 千万円を投資した場合の実際の有効フロンティアである．9 パターンの重みの組に対して，それぞれ 5000 個の解を表示したものである．図 11 は 1 億円を投資した場合で，解の定義域を 5 倍精密にして 31 パターンの重みの組に対して解き，それぞれ 5000 個の解を表示したものである．これらの図の上辺がパレート解であり，いわゆるフロンティア曲線である．

6. おわりに

チャン[11]は今回の金融危機は一義的には経済学，特に自由市場経済学の責任が大きいと述べている．金融工学を社会の持続的発展に役立てるためには，自由市場経済学以外の経済学の立場からの議論が必要なのかもしれない．

本論文で述べた金融工学の各種の問題を解くための離散最適化技術は，すでにかなり完成度の高いものになっている．しかし，どのような問題に適用してどのように利用していくかという実用面での研究は十分になされているとはいえない．今後は，年金等の長期運用に役立つ離散最適化技術の実用化研究を行う必要がある．

謝辞　本研究の一部は，著者の一人が関西大学在外研究員として外国出張中の成果である．また関西大学重点研究および科学研究費の助成を受けて行われた．

参考文献

[1] C. Bazgan, H. Hugot and D. Vanderpooten, "Solving efficiently the 0-1 multi-objective knapsack problem," Computers & Operations Research, Vol. 36, pp. 260-279, 2009.

[2] J.E. Beasley, N. Meade and T.-J. Chang, "An evolutionary heuristic for the index tracking problem," European Journal of Operational Research, Vol. 148, pp. 621-643, 2003.

[3] Y. Isada, R.J.W. James and Y. Nakagawa, "An approach for solving nonlinear multi-objective separable discrete optimization problem with one constraint," European Journal of Operational Research, Vol. 162, pp. 503-513, 2005.

[4] 甲斐良隆，仲川勇二，田畑吉雄，改良代理制約法の非分離形非凸計画問題への応用，電子情報通信学会論文誌，Vol. J88-A, No. 3, pp. 422-424, 2005.

[5] Y. Li, Z. Lu and J.J. Michalek, " Diagonal quadratic approximation for parallelization of analytical target cascading," Journal of Mechanical Design, Vol. 130, 051402 (11 pages), May 2008.

[6] Y. Nakagawa, "An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming," Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 46, pp. 145-163, 2003.

[7] Y. Nakagawa, R.J.W. James, C. Rego and F. Glover, "A successive surrogate constraint search method for index fund portfolio optimization," INFORMS Washington D.C., 2008, working paper, Kansai University, 2010 (http://hdl.handle.net/10112/2581).

[8] 塩沢由典，金融危機と金融工学―どこの論理が破たんしたのか―，電子情報通信学会誌，Vol. 93, No. 2, pp. 166-169, 2010.

[9] S. Sayin and P. Kouvelis, "The multiobjective discrete optimization problem : A weighted min-max two-stage optimization approach and a bicriteria algorithm," Management Science, Vol. 51, No. 10, pp. 1572-1581, 2005.

[10] 清水祐希，西岡慎一，馬場直彦，わが国機関投資家の資産運用行動について―金融市場に与える影響を中心に―，マーケット・レビュー，日本銀行金融市場局，2003.

[11] バジュン チャン（田村訳），世界経済を破綻させる 23 の嘘，徳間書店，2010.