

実務的な意思決定問題への数理計画法を用いたアプローチ

田辺 隆人

本論文では、実務の現場での意思決定に数理計画法を用いる場合に行き当たる問題点について分析し、問題の構造に着目した対処ノウハウについて述べる。具体的には、問題をその構造に着目して分割して取り扱うラグランジュ緩和法と、変数をその重要度の順に決定する多段階法を紹介している。多段階法のスキーム設計を試行錯誤的に行うことそのものが問題の構造や性質に関する知見を蓄えるという意義を持つこと、その際に数理計画法アルゴリズムの特性についての理解が役立つことを示す。最後に退化（最適値を与える異なる解）が引き起こす様々な問題と未解決な課題を示す。

キーワード：カッティングストック、ラグランジュ緩和、設備計画、スタッフスケジューリング

1. はじめに

製造の現場の担当者は、段取り作業の回数を可能な限り減らしつつ発注されたオーダーを遅延なくこなそうと日々努力している。物流の担当者は、効率のよい担当領域割り当てや、顧客の要請に見合った無理のない車両繰り、在庫量の設定について常に考え続けている。月末がやってくるたび、様々な現場のシフトリーダーはシフト表作りという孤独な作業を繰り返す。コジェネを備えた冷暖房システムがあるビルには天気の行方を気にしながら、コスト最適な運転パターンを摸索している運転員の方々がいる。このように現代の社会は解かれるべき問題に満ちていて、我々の日常はそれに向き合っている方々が導いた「実行可能解」に支えられている。

数理計画法を専門とする立場からすれば、実務家の方々が取り組んでいる問題で、見たことも聞いたこともないといったものは逆に珍しいのではないだろうか。例えばプロジェクトスケジューリングやヴィーカルルーティングなどは何十年もの研究成果が効率的なアルゴリズムやベンチマークサイト、手軽に手に入るソルバーとして結実している。しかし残念ながらそれらの成果は多くの現場に広がっているとはい難く、数理計画の学問分野での成果と現場の間にはまだ溝が存在する。

その溝を埋めるには、潤沢な資金を準備する、ある

いは機会ロスを減らすといった手立てを講じることもおそらく有益だが、明文化されていない技術的な「ノウハウ」が必須であるというのが我々の主張である。実務的な最適化問題に携わってきた経験に基づいてその記述と考察を試みたい。

2. 実務的な問題の特徴

現在、標準的な計算機環境において現実的な規模（例えば母材幅 3 m、製品種別 20、結果としての母材所要数は 300 本位になる程度）のカッティングストック問題は、教科書通りの列生成法を使えば 30 秒以内に解けてしまう。が、フィルム裁断などの現場で要請される「切り出しパターン数の減少」という目的関数を考慮するためには解法を根本的に見直さなければならなくなる¹[1]。

難問として知られる資源制約付きプロジェクトスケジューリングも現在では優れたアルゴリズムとその実装が存在し[3]、実用的な規模（数十個のタスク）にも十分対応できる。が、「人」を「再生可能資源」として抽象化するのではなく、仕事を割り振るべき「個人」と考えて、さらにタスクの属性や持ち場の移動の制約を考えて人繰りを同時に解こうとすると、問題がスタッフスケジューリングの様相を呈し、双方の解を矛盾なく「つなげる」ための工夫が必要になる。

コジェネプラントの運転計画問題は混合整数計画法（分枝限定法）の実装の進歩によって、一日を 30 分刻

たなべ たかひと

（株）数理システム

〒160-0022 新宿区新宿 2-4-3

¹ それでも特化した解法を案出すれば、母材所要数が同程度でパターン数を 10 個前後しか使わない解が数分で得られることを付記しておく[2]。

みにしても数分で十分な精度の解が得られるようになつたが、プラントの設備の導入計画を同時に考慮しようとした途端に、複数の季節、平日・土曜・祝日などの需要パターンを同時に考慮する必要があり、我々が扱ったケースでは問題の規模が36倍になって、解くのが難しくなってしまう。

より問題に適合したソルバーを選ぶ、分枝限定法の性能を向上させるためにタイトな定式化を行う、といった工夫も重要であるが、以下では問題の構造そのものに着目した対処の方策とノウハウについて述べる。

3. 設備計画とラグランジュ緩和法

上で述べたコジェネプラントの設備計画の例を見てみる。コジェネプラントは単一の設備構成においてすべての季節と時間帯の冷暖房を賄わねばならない。例えば夏の冷房需要を満たすために機器はフル回転するが、冬の暖房需要はそこまで高負荷にせずとも賄える。もし、夏にあわせて大容量で高価な機器を購入してしまったら、冬にはその機器を（得てして効率の悪い）低負荷で運転することになり、全体として得策となる可能性がある。機器の導入のみならず、電力容量（電力利用可能上限値）の契約の決定にも同様の難しさがある。すなわちすべての季節を通じての利用のされ方を具体的に考慮に入れなければ、適切な契約の決定を導くことができない。この問題の構造を模式的に示したのが図1である。「設備（機器）・（電力）契約」の決定を介してすべての季節（実際にはより細分化されて36通り）の運転計画問題が接続して大きな問題が生み出されている。同様の構造の問題が、例えばネットワークの設備計画とルーティングを求めるという場合にも表れる。ネットワーク上の任意の二地点間に流さねばならない分割不可能なフローが定義されてい

るとき、ネットワークのどの部分の容量を増強すればコスト安になるのかを求めるという問題は、あらゆる二地点間のルーティングと増強の変数を同時に考えねばならない。この問題の構造は図1での各季節の「運転」を各二地点間の「ルーティング」に読み替えたものとなる。さらに、多数の顧客のサービス要求を満たすための容量制約付きの施設を配置するという問題も、各顧客の収容先を求めるという問題が施設配置の問題を通じて接続しており、図1と同様の構造（「運転」を「各施設への顧客の収容方法」、「設備・契約」を「施設配置」に置き換えたもの）となる。

このような構造を持つ問題に対処する方法としてはラグランジュ緩和法が有効である。ラグランジュ緩和法は問題の「結節点」となっている部分（図1では「設備・契約」の部分）を緩和して目的関数に移すことにより、部分問題に分け、取り扱いを容易にする方法である（図2）。

下界値（最小化問題の場合）を与えるラグランジュ緩和問題を解くことが、多数の部分問題を独立に解いて結果を集約することに帰着するため、低コストで計算可能となる。下界値を改善するためには、下界値の最大化問題という微分不可能だが凸な目的関数を持つ問題に対する切除平面法を用いて、ラグランジュ係数（図2の「λ」）を更新することを繰り返す。下界値を求める副産物として「切除平面」と各部分問題の実行可能解が得られるため、反復が進むにつれ部分問題の実行可能解の選択肢が増え、最終的には部分問題の実行可能解を組み合わせて元の問題の精度のよい実行可能解（上界値）を求めることができる[4]。

ラグランジュ緩和のスキームを採用する大きなメリットは、取り扱う問題を部分問題に分解し、複雑度を下げることによって、その特性に応じた適切な解法を選択できる余地が広がる点である。数理計画法のノウ

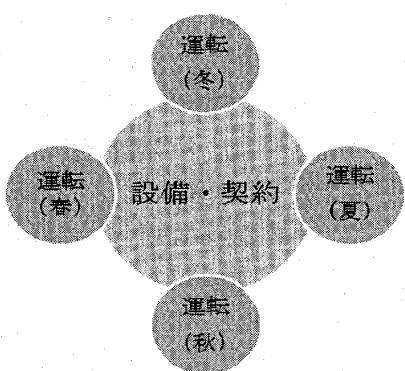


図1 プラント設備計画問題の構造の概念図

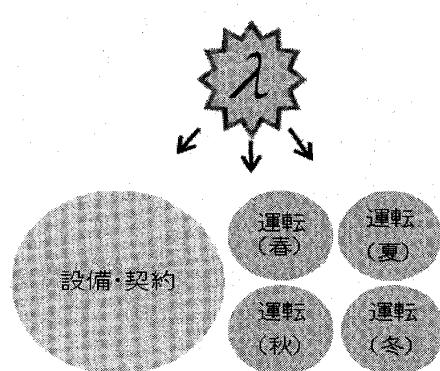


図2 設備計画問題に対するラグランジュ緩和

ハウは特徴的な構造を持つ問題に集中して存在することから、過去の知見を有効に活用するという意味においてもこのメリットは有効である。例えば最初のコジエネプラントの設備計画問題のケースでは、各季節の需要に対する運転計画問題そのものが部分問題となり、馴染みのある問題を繰り返して解けばよいことになる。この設備計画問題の具体的な計算例では、36通りの需要パターンを同時に考慮することによって原問題が10万変数となる問題でも1%程度の精度まで1時間程度で解を導くことができている。また、ネットワークの設備計画では最短経路問題が、施設配置問題ではナップサック問題が、それぞれ部分問題となるので、例えばダイクストラ法や動的計画法など、それぞれに特化した解法を用いることも可能であり、実装を加速することができる。

4. 多段階法

もちろん実務界には前節のような構造を持つ問題のみが現れるわけではない。例えばプロジェクトスケジューリングとスタッフスケジューリングが連携しているケース（図3）は異質な問題が「資源」を介して連携しており、ラグランジュ緩和の適用が容易ではない。

このような場合には、意思決定を多段にすることによって問題を分離して取り扱うのが有効である（多段階法）。すなわち、元の問題の変数を重要な順に決定することを繰り返して解を絞り込む。図4がその概念図である。まず最も重要な変数についてAという解が選択され（ S_0 は最も重要な変数の実行可能解の集合）、その選択の下で次に重要な変数についてBという解が選択され（ S_A は解 A が規定する次に重要な変数の実行可能解の集合、 S_B も同様）、その選択の下で残った変数についてCという解が選択されている。ここでの階層化された選択は、元の問題をその階層に属する変数のみに着目して簡素化した問題を解くこと

によって行われる。

我々が直面した例では人を「資源」として抽象化したプロジェクトスケジューリングをまず解いて、各日時で必要な人数を割り出し、その人数を所与としたスタッフスケジューリングを解くという多段階法のスキームを設計した。この方法は直観的で理解しやすいが、最適性が保証できないばかりか、実行可能性の担保もない。具体的にはプロジェクトスケジューリングが、実行不可能な人繰りを強要する結果を出す可能性がないとは言い切れない。

しかしながら、我々は全体を結合した問題を作成して「ソルバー頼み」にする方法は取らない。それは、この問題がプロジェクトスケジューリングとスタッフスケジューリングという互いによく性質の知られた問題の結合であるので、適したソルバーを用いるメリットが期待できることもあるが、変数を解く順番を模索するという試行錯誤の積み上げが、問題の実行可能領域の構造についての情報収集という意味で有益だと考えているためである。

一般に制約の厳しい変数（重要な変数）から順に決定すると、多段階法は成功しやすい。我々が直面した例では、プロジェクトスケジューリング⇒スタッフスケジューリングの順で決定することにより、ほぼ問題なく良い解を求めることができることがわかった。それは、タスクの実行時刻が解の骨格を決定する重要な変数であることを示している。さらに、「人」という資源がプロジェクトスケジューリングの描像でいうところの「再生可能資源」という形に抽象化できるほど単純ではないが、スタッフの人数にある程度の余裕が存在するため、人繰りはタスクの実行時刻に比べれば次点の重要度を持つ変数と考えて良いことを示している。実務の現場には常にこのような自由度（冗長性）が存在するのが普通である。例えば配車問題を解くべき現場では通常、同一の属性の車が複数存在するし、

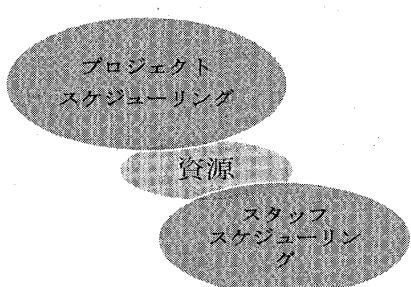


図3 プロジェクトスケジューリングとスタッフスケジューリングの連携

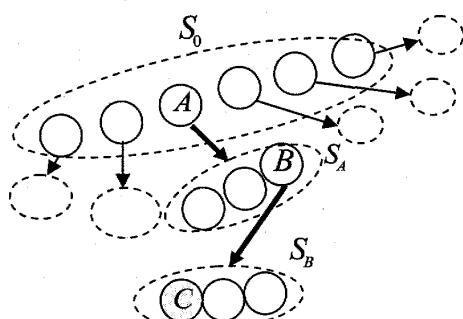


図4 多段階法の概念図

運転計画を解くべきプラントでは同一の特性を持つ機器が複数並列に接続されている。この自由度（冗長性）は、モデルの退化、すなわち最適値を与える複数の解の発生という形で現れる。

自由度（冗長性）の高い意思決定に対応する変数の決定を後回しにし、一方で全体の解の骨格を決定する変数を最初に決定するのが多段階法のスキーム設計における重要なノウハウである。試行錯誤によらずに問題構造（実行可能空間の構造）に関する深い知見を得ることができる、多段階法のスキーム設計を容易にする技術の出現に期待したい。また、我々数理計画法の使い手が試行錯誤の末に到達した多段階法が、結局実務の現場において経験的に得られた意思決定方法と等価である場合も実はかなり多いことをここで付記しておく²。

5. 退化の処理

意思決定の自由度（冗長性）に伴うモデルの退化（最適値を与える複数の解の発生）は、数理計画法アルゴリズムの特性と相まって実務的な問題を扱う上での落とし穴となるケースも多いので、注意が必要である。

数理計画法アルゴリズムは同一の最適値を与える解が複数存在するケースにおいては、その任意の一つを出力して終了する。「任意の一つ」の選択ロジックは例えば単体法をベースとした分枝限定法の場合には数値的な「ぶれ」や分枝変数アルゴリズムの問題選択の「癖」に依存しており、ユーザーが意図的に制御することができない。さらに問題なのは、アルゴリズムが出力した解が「多数あるうちの任意の一つ」なのか「唯一無二の最適解」なのかの区別がつにくい場合が多いことである。対象としている問題に対する理解の浅い数理計画法の使い手が、最適解の任意の一つを唯一無二のものだと主張し（「だって最適性の原理を満たしているのですから」）、現場の実務家に認識の誤りを看破され（「でもわたしがいつもの方法で導いた答えも悪くないはずだけどねえ、ほら確かめて御覧なさい」）信頼を失う、という不幸な展開は何としても避けねばならない。

そのような場合には同一の問題を複数の性質の違うアルゴリズムで解いてみるという方法が推奨できる。

² 多段階法の設計で迷ったら現場の意思決定方法に習うといふのも一つのノウハウである。

例えば線形計画問題ならば単体法と内点法で解いた解を比べてみれば自由度を含んだ変数に関するある程度の知識が得られる。離散最適化問題ならばメタヒューリスティクスの乱数シードを振っていろいろな解を出してみれば良い解の集合の性質を「体感」することができる。退化が激しいのならば、メタヒューリスティクスによる解法が有利であり、分枝限定法は（実は不要な）厳密性を指向してしまう分、不利となることもわかる。自由度の高い変数の決定はメタヒューリスティクス（あるいは人間系）にまかせるというのも実は有効であり、前節で述べた多段階法のスキーム設計のノウハウの一つである。

以上の考察に鑑みれば、「ソルバー頼み」にする方法、すなわち意思決定の方向性を大きく左右する重要な変数と冗長性を含む変数とを区別せずに結合して大規模な問題とする方法は、たとえそれが解けたとしても、実務的にかなり危険な方法といわざるを得ない。すなわち変数の意味に関する知見を得る機会がないので、解の解釈を誤る危険があるほか、そのソルバーが分枝限定法を用いている場合には計算時間を無為に費やしている可能性もある。

6. 記述不可能性の帰結としての退化

ただ、退化を発見したら、常に任意の一つを選べばよいというわけでもない。例えば制約充足問題として記述されたスタッフスケジューリングにおいては、メタヒューリスティクスによる求解を繰り返すことによって、モデル上はペナルティ値の似通った複数の解が大量に現れる。しかしそれはあくまで「モデル上」似通っているというのみであり、実務家にとってはそれらの解の間の優劣は確実に存在し、我々は「使える」解を速く出力することが求められている。もちろんそれにはモデルを完全なものに近付け、解の優劣を与える情報を使って出力される解を絞り込むことが必要になるのだが、漠然と信じられているように、それは目的関数や制約条件を増やして問題を細密化することはおそらく実現できない。なぜならば、実務家が本当に使える解を選び取る際に用いている直観を定式化することは困難を極め、例え大きな労力を払ってそれを行ったとしてもデータ入力が膨大となって、問題の複雑さと規模が増大し、ユーザーとアルゴリズム双方を苦しめることになるからである。筆者らはこの問題を特に人的スケジューリング問題における重要な未解決問題と位置付けて研究を行っている[5]。

7. おわりに

本稿では、複合している実務的な問題をその構造に着目することによって（ラグランジュ緩和）、あるいは試行錯誤によって（多段階法）、より御しやすく性質が知られた小さな問題に分割し、分割された問題の攻略には過去に得られたノウハウを適材適所で用いる、という解法を示し、その有効性を論じた。

現在は人手で、試行錯誤的に行っているこの作業をどこまで定式化し、さらには自動化できるかは数理計画が実務解に浸透するために必要な将来の大きな課題と考えている。

参考文献

- [1] S. Umetani, M. Yagiura and T. Ibaraki, One dimensional cutting stock problem to minimize the number of different patterns, European Journal of Operational Research, Vol. 146, pp. 388-402, 2003.
- [2] 汎用数理計画法パッケージ NUOPT ホームページ, 導入事例紹介
<http://www.msi.co.jp/nuopt/solution/index.html>
- [3] K. Nonobe and T. Ibaraki, Formulation and tabu search algorithm for the resource constrained project scheduling problem, in: C.C. Ribeiro and P. Hansen (eds.) : Essays and Surveys in Metaheuristics, Kluwer Academic Publishers, pp. 557-588, 2002.
- [4] 田辺隆人, 原田耕平, 島田直樹, 大規模離散計画問題へのラグランジュ緩和の応用, 第20回RAMPシンポジウム予稿集, pp. 45-60, 2008.
- [5] 田辺隆人, 岩永二郎, 多田明功, 池上敦子, 「納得」を生み出すスケジューリングアルゴリズムとソフトウェア制約充足を超えて: 実行可能領域の直観的把握, スケジューリング・シンポジウム2009予稿集, pp. 169-173, 2009.