非負半正定値計画問題に対する主バリア関数法

松川 恭明
(筑波大学大学院システム情報工学研究科 現所属・同大学院システム情報工学研究科社会システム・マネジメント専攻)
指導教員 吉瀬章子 教授

1. 研究の背景と目的

本研究では，非負半正定値計画問題に対する新しい非許容型主障壁関数法を提案する．

半正定値行列の中で，すべての要素の値が非負であるものを，非負半正定値行列と呼ぶ．非負半正定値行列全体の集合は，半正定値行列全体の集合と同様に凸錐を構成し，それぞれ，非負半正定値錐，半正定値錐と呼ばれる．これらの錐制約の下で，線形関数を最小化あるいは最大化する問題はそれぞれ，半正定値計画問題，非負半正定値計画問題と呼ばれる．

$$\text{半正定値計画問題}\left|\begin{array}{ll}\min & \mathrm{Trace}(C^TX)\\ \text{s.t.} & \mathcal{A}(X)=b\\ & X:\text{半正定値}\end{array}\right.$$

$$\text{非負半正定値計画問題}\left|\begin{array}{ll}\min & \mathrm{Trace}(C^TX)\\ \text{s.t.} & \mathcal{A}(X)=b\\ & X:\text{非負半正定値}\end{array}\right.$$

すでに半正定値計画問題に対しては，数多くのソフトウェア[7]や緩和問題としての応用例[1]が研究されているが，近年，非負半正定値計画問題も多くの注目を集めつつある．その理由として以下の三点が考えられる．

一つ目は，組合せ最適化問題に対する半正定値緩和の強化である．組合せ最適化問題に対する半正定値緩和[1]における行列変数を見ると，元問題の変数の性質により，行列の各要素が非負であるべき問題が多く見受けられる．半正定値制約に加え，各要素に対する非負制約を加えることで，より精度の高い緩和解が得られる可能性がある．

二つ目は，近年明らかになった，非凸二次0−1混合整数計画問題の完全正値計画問題による表現[3]である．非凸二次0−1混合整数計画問題は，二次割当問題などを含む，非常に大きな問題のクラスであるが，Burer[3]は，この問題の最適解の集合の凸包が最適解の集合となる完全正値計画問題が存在することを示した．完全正値計画問題は，完全正値錐という完全正値行列からなる集合上の凸計画問題であるが，完全正値錐を制約として陽に与えることが難しく，最適化問題として記述することが困難な問題である．一方，非負半正定値錐は，行列の各要素が非負であるという制約と行列の半正定値制約で，陽に与えることが可能である．また，非負半正定値錐は完全正値錐を含み，さらに行列の次数が4以下の場合は，完全正値錐と非負半正定値錐が一致することが知られている[2]．これらは，非凸二次0−1混合整数計画問題に対し非負半正定値緩和を行うことができることと，その結果，精度のよい緩和解が得られる可能性があることを意味している．

三つ目は，非負半正定値計画問題は，問題のサイズは大きくなるものの，半正定値計画問題として表現できることである．このことは，非負半正定値計画問題を解くために，半正定値計画問題に対する既存のソルバーが適用できることを意味している．

2. 二次割当問題に対する非負半正定値緩和

前節で述べた事実に着目し，非負半正定値緩和の効果を数値実験により確かめた．完全正値計画問題として記述された二次割当問題[5]に対し非負半正定値緩和を行い，これを半正定値計画問題に帰着させSDPA Online Solver[7]を用いて求解した．二次割当問題のインスタンスはQAPLIB[4]のものを使用した．結果を表1に示す．表の列は順に，二次割当問題のインスタンス名，半正定値緩和問題の主問題における目的関数値，半正定値緩和問題の双対問題における目的関数値，そのインスタンスの最適値，計算時間（秒）を表す．ほとんどの問題において，目的関数値は最適値に近い値であった．そこで緩和解に対し行列のスペクトル分解を用いて，元問題の最適解に対する近似解の抽出を試みた．その結果，いくつかのインスタンスにおいて，最適解とほぼ一致する近似解を得た．以下の行列はRou12というインスタンスの緩和解による，近似解の抽出結果である．

表 1　二次割当問題に対する非負半正定値緩和

	主問題	双対問題	最適値	計算時間
Chr12a	9552.19	9551.99	9552	(1196)
Chr12b	9742.18	9741.99	9742	(1250)
Chr12c	11156.30	11155.99	11156	(1247)
Had12	1653.62	1651.99	1652	(1384)
Nug12	568.15	567.81	578	(1279)
Rou12	235528.14	235527.99	235528	(1672)
Scr12	31410.91	31409.99	31410	(1570)
Tai12a	224416.03	224415.99	224416	(1195)
Had14	2725.26	2723.97	2724	(8585)
Nug14	1010.29	1009.98	1014	(8346)
Chr15a	9896.75	9895.99	9896	(21369)
Chr15b	7991.07	7989.99	7990	(19188)
Chr15c	9504.22	9503.99	9504	(18784)
Nug15	1141.44	1140.17	1150	(18948)
Rou15	350265.41	350167.07	354210	(20097)
Scr15	51141.53	51139.99	51140	(20183)

$$\begin{pmatrix}
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000\\
.000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .999 & .000 & .000
\end{pmatrix}$$

Rou12 の最適解となる置換行列において，1 である要素を 0.999 とおいた行列を得た．

このように非負半正定値緩和は強力である可能性がある．その一方で，この数値実験では安定した半正定値計画問題の解が得られていない．これは半正定値緩和問題に内点が存在しないことが理由として考えられる．また，必要とされる計算時間やメモリの容量を考慮すると，大規模な問題に対して半正定値計画問題への帰着を用いる手法は実用的でない．そこで本研究では，非負半正定値計画問題を半正定値計画問題に帰着せず，直接解くための新しいアルゴリズムを提案する．

3. 非負半正定値計画問題に対する非許容型主内点法

本研究で提案する解法は非許容型主障壁関数法を基本としている．その理由として以下の二点を挙げる．

一つ目は，非負半正定値錐は，その錐と双対錐が一致する自己双対錐ではないことである．そのため，非負半正定値計画問題に対して主双対内点法をそのまま適用することができない．また，非負半正定値錐に対する双対錐は，半正定値錐と非負対称行列錐のミンコフスキー和で与えられることが知られている．そのため，非負半正定値計画問題の双対変数が，非負半正定値錐に対する双対錐に含まれているかどうかを効率よく判定することが難しい．その結果，非負半正定値計画問題に対して，自己双対でない錐制約を持つ錐線形計画問題に対する内点法を適用することも困難である．

二つ目は，一般的に非負半正定値緩和問題は初期許容内点を持たない場合が多いためである．特に，Burer[3]による完全正値計画問題，およびその非負半正定値緩和問題は多くの問題において内点許容解を持たないことが知られている．

この非許容型主障壁関数法では，錐線形計画問題に対する許容型主内点法[6]を参考にする．探索方向は，線形制約の核空間へ射影した Newton 方向を基に，線形制約との残差ベクトルを小さくできるように修正したものを利用する．ステップサイズは Armijo の基準を満たしながら，錐制約を破らないように決定する．停止条件としては目的関数値の変動，線形制約との残差ベクトルのノルム，の二つの基準を用いる．

非負半正定値計画問題に対して予備的な数値実験を行い，この解法が最適解に収束する点列を生成することを確認した．非許容型主障壁関数法を実用的なものにするためには，さらなる理論的な考察が必要である．

参考文献

[1] F. Alizadeh, Interior point methods in semidefinite programming with application to combinatorial optimization, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 5, 1995, pp. 13–51.

[2] A. Berman and N.S. Monderer, *Completely Positive Matrices*, World Scientific Publishing, 2003.

[3] S. Burer, On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs, *Mathematical Programming*, Vol. 120, 2009, pp. 479–495.

[4] R.E. Burkard, E. Cela, S.E. Karisch and F. Rendl, QAPLIB–A Quadratic Assignment Problem Library, http://www.seas.upenn.edu/qaplib/ (2011 年 9 月 20 日確認)

[5] J. Povh and F. Rendl, Copositive and semidefinite relaxations of quadratic assignment problem, *Discrete Optimization*, Vol. 6, 2009, pp. 223–241.

[6] J. Renegar, *A Mathematical View of Interior-point Methods in Convex Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2001.

[7] SDPA Online Solver, http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/portal/ (2011 年 9 月 20 日確認)