FIFOキャッシュアルゴリズムの流体解析

塚田　直樹
（東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻　現所属・㈱オリエンタルインフォーメイションサービス）
指導教員　三好直人 准教授

1. はじめに

キャッシュとはコンピュータシステムや通信ネットワークにおいて，低速・大容量の記憶領域に対して高速・小容量の記憶領域（バッファ）を用意し，それらを組み合わせることにより，高速・大容量の記憶領域を実現する仕組みである．バッファに保存するアイテムを逐次に決定するルールをキャッシュアルゴリズムと呼ぶ．使用頻度の高いアイテムをバッファに保存するほどキャッシュの効率が向上するため，キャッシュの性能はキャッシュアルゴリズムに依存している．キャッシュアルゴリズムはリクエストされたアイテムがバッファに無い確率（ミス率）により評価される．

First-In First-Out（FIFO）アルゴリズムはシンプルなアルゴリズムであるが，毎回のリクエストが独立同一分布に従う場合（独立参照モデル）において，Least Recently Used（LRU）アルゴリズムよりもミス率が高いことがBerg and Gandolfi[2]によって示されており，それ以来あまり研究がなされていない．しかし，実用的なアルゴリズムとしてFull2Q[5]やMulti-Queue[8]などのFIFOやLRUを組み合わせた複雑なものが考案されており，FIFOについて詳細な解析を行うことは，複雑なキャッシュアルゴリズムを解析する際に有用であると考えられる．

独立参照モデルにおけるFIFOについて，King[6]により，マルコフ連鎖の定常分布から定常状態のミス率が求められている．しかし，アイテム数が大きい場合には，計算量の観点から数値計算が困難である．一方，Dan and Towsley[3]ではアイテム間の依存性を無視した簡便な計算により，ミス率の良い近似を与えているが，理論的な根拠については触れられていない．また，Gelenbe[4]によりFIFOとRandom Replacement（RR）アルゴリズムのミス率が等しいことが示されている．

本研究では独立参照モデルにおいて，FIFOの定常ミス率の近似を得るために，RRに対してアイテム数とバッファサイズをn倍し，$n\to\infty$とする流体極限を考える．Benaïm and Le Boudec[1]とLe Boudec[7]の結果を用いることにより，RRの定常ミス率の流体極限が求められるが，RRとFIFOの定常状態におけるミス率が一致していることから，これはFIFOの定常ミス率の流体極限を求めたことと等価である．さらに，得られた定常ミス率の流体極限は文献[3]の近似と一致しており，本研究の成果は文献[3]の直感的な近似に理論的な根拠を与えるものにもなっている．

2. モデル

FIFOはリクエストされたアイテムをバッファに保存し，バッファが溢れる際に，最も長い間バッファ内にいるアイテムを破棄するアルゴリズムである．

一方，RRは，バッファが溢れた際に破棄するアイテムの選び方がFIFOと異なっている．すなわち，バッファが溢れる際に破棄するアイテムをバッファ内から等確率で選ぶアルゴリズムである．

FIFOとRRは独立参照モデルにおいて定常ミス率が等しいことから，RRについて考える．以下では，すべてのアイテムはサイズが等しいとし，初期状態からバッファ内は満杯であるとする．

2.1 リクエストの生起

バッファサイズをK，アイテム数をN，アイテムの集合を$I:=\{1, 2, ..., N\}$とする．アイテム$i\in I$のサイズは1とする．各時点$k=1, 2, ...$において，必ず一つのアイテムがリクエストされるとする．アイテムiがリクエストされる確率をp_iとし，$\sum_{i=1}^{N} p_i=1$とする．$I_0:=\{i\in I : p_i=0\}$とし，$I_+:=\{i\in I : p_i>0\}$とすると，$I=I_0\cup I_+$である．また，集合の要素の数を$|\cdot|$により表す．

2.2 RRキャッシュアルゴリズム

RRの下での各アイテムの挙動を考える．$X_i(k)$を，時刻$k=0, 1, ...$においてアイテム$i\in I$がバッファ内にあれば1，そうでなければ0をとる確率変数とする．

ただし，$\sum_{i=1}^{N} X_i(k)=K$ である．

時刻 k から $k+1$ での状態推移は，時刻 $k+1$ でアイテム i がリクエストされた場合，$X_i(k)=1$ ならば変化しない．$X_i(k)=0$ ならば，$X_i(k+1)=1$ であり，バッファ内にあるアイテムからランダムに選ばれたアイテムを i' とすると，$X_{i'}(k+1)=0$ となり，それ以外のアイテム j に対しては，$X_j(k+1)=X_j(k)$ である．$X(k)=(X_i(k))_{i\in I}$ は有限状態マルコフ連鎖であり，$|I_+|\geq K$ ならば，状態空間は一時的状態の集合と唯一の既約な集合に分けることができ，定常分布が存在する．

2.3 スケーリング

システムのスケーリングを考える．スケールパラメータを n とし，バッファサイズを nK，アイテム数を nN，アイテムの集合を $I^{(n)}:=\{(i,j):1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n\}$ とする．アイテム $(i,j)\in I^{(n)}$ のリクエスト確率は p_i/n とし，前節と同様に $\{0,1\}$ 上の確率変数 $X_{i,j}^{(n)}(k)$ を定義する．

$i\in I$ に対して $M_i^{(n)}(k)$ を次式で定義する．

$$M_i^{(n)}(k):=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j}^{(n)}(k).$$

また，$M^{(n)}(k):=(M_i^{(n)}(k))_{i\in I}$ とおく．このとき，$K^{-1}M^{(n)}(k)$ はバッファ内のアイテムの種類に関する経験分布である．さらに，時間をスケールした過程を $\bar{M}^{(n)}(t):=M^{(n)}(\lfloor nt\rfloor)$ と定義する．

3. RR キャッシュアルゴリズムの流体解析

$E:=\{m\in[0,1]^N:\sum_{i=1}^{N} m_i=K]\}$ と定義し，$\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとする．

定理 1. $|I_+|\geq K$ とし，任意の $n=1,2,\ldots$ に対して，$M^{(n)}(0)$ が定常分布に従うと仮定する．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(\|M^{(n)}(0)-m^*\|\geq\varepsilon)=0.$$

ただし，$m^*=(m_i^*)_{i\in I}$ は連立方程式

$$p_i(1-m_i)-\frac{m_i}{K}\sum_{j=1}^{N} p_j(1-m_j)=0,\ i\in I,$$

の E 上で唯一の解である．

スケールされた確率過程 $\bar{M}^{(n)}(t)$ について，時刻 t 以降の最初にリクエストされたアイテムが，バッファ内に無い確率（ミス率）を $r^{(n)}(t)$ とする．

定理 1 より，次の系 2 が得られる．

系 2. $|I_+|\geq K$ とし，任意の $n=1,2,\ldots$ に対して，$M^{(n)}(0)$ は定常分布に従うと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} r^{(n)}(0)=r$ が成り立つ．ただし，r は次の方程式の非負の解である．

$$\sum_{i\in I_+}\frac{Kp_i}{r+Kp_i}=K.$$

系 2 より得られたミス率の極限は，文献[3]にて提案された近似と一致している．

4. おわりに

本研究では，RR アルゴリズムに対して流体極限の手法を適用した．RR において，システムの挙動をバッファ内のアイテムの経験分布として表し，文献[1][7]の結果を用いることにより，定常ミス率の流体極限を求めた．FIFO と RR では定常ミス率が等しいこと，および得られた定常ミス率の流体極限が文献[3]により提案されている直感的な近似と一致していることから，本研究の結果は文献[3]の近似に対して理論的な根拠を与えるものになっている．

今後の課題は他のキャッシュアルゴリズムへの流体極限の適用である．それにより，複数のアルゴリズムの比較が可能になる．また，リクエストに依存性がある場合を扱うことも挙げられる．

参考文献

[1] M. Benaïm and J. -Y. Le Boudec, *Performance Evaluation*, Vol. 65, Nos. 11-12, pp. 823-838, 2008.

[2] J. Van Den Berg and A. Gandolfi, *Journal of Applied Probability*, Vol. 29, No. 1, pp. 239-243, 1992.

[3] A. Dan and D. Towsley, *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, Vol. 18, No. 1, pp. 143-152, 1990.

[4] E. Gelenbe, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 22, No. 6, pp. 611-618, June 1973.

[5] T. Johnson and D. Shasha, in *Proc. 20th International Conference on VLDB*, pp. 439-450, 1994.

[6] W.F. King, in *Proc. IFIP Congress*, Ljublanjana (Yugoslavia), pp. 697-701, 1971.

[7] J.-Y. Le Boudec, arXiv: 1009.5021v2, 2010.

[8] Y. Zhou, J. Phillbin and K. Li, in *Proc. The General Track: 2002 USENIX Annual Technical Conference*, pp. 91-104, 2001.