重み付き最大独立集合問題に対する大規模な近傍を用いた局所探索法

糸柳 順慈
（名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻 現所属・日立製作所）
指導教員 柳浦睦憲 准教授・橋本英樹 助教

1. はじめに

与えられた無向グラフ $G=(V, E)$ において，頂点集合 $I \subseteq V$ のうち I のいずれの頂点間にも枝が存在しないものを独立集合と呼び，その大きさ $|I|$ が最大のものを見つける問題を最大独立集合問題（maximum independent set problem, MISP）という．また，各頂点に重みが与えられ，総重み最大の独立集合を求める問題を重み付き最大独立集合問題（maximum weighted independent set problem, MWISP）という．これらの問題はNP困難であり，厳密解法は大規模な問題例に対しては現実的ではない．そのため，現実的な時間で良質の解を得る近似アルゴリズムが求められ，数多く研究されている．

本研究では，反復局所探索法を主体とした近似アルゴリズムを提案する．その特徴のひとつに，大規模な近傍の探索を効率的に実現する方法を提案し，局所探索法に組み込んだことが挙げられる．具体的には，近傍操作中に厳密解法を組み込むことで大規模な近傍の探索を行いつつ，近傍内の改善解を逃すことなく探索の対象を限定することで効率的な近傍の探索を可能とした．また，頂点にペナルティを付加し，それを適応的に調整することで生成される解に多様性を持たせている．

2. 重み付き最大独立集合問題

入力として，連結な無向グラフ $G=(V, E)$ と，各頂点 $i \in V$ に対する正整数の重み w_i が与えられる．MWISPの目的は $\sum_{i \in I} w_i$ を最大にする独立集合 I を求めることである．便宜上，無向グラフ $G=(V, E)$ の頂点数を $n=|V|$, $m=|E|$, 各頂点 i の次数を $\deg(i)$，最大次数を $\Delta=\max_{i \in V} \deg(i)$ と記す．また，ある頂点集合 $I \subseteq V$ に対しその集合に含まれる頂点の重み和を $W(I)=\sum_{i \in I} w_i$ で表す．本研究では，I がMWISPの実行可能解（すなわち独立集合）であるとき，I をMWISPの解と呼ぶ．

ある解 I に対し，ある頂点 $i \in V \setminus I$ の *tightness* を，解 I に含まれている頂点の中で i に隣接するものの個数と定義し，$\tau(i)=|\{j \in I \mid (i, j) \in E\}|$ と記す．また，$\tau(i)=k$ である頂点 $i \in V \setminus I$ を k-tightな頂点と呼び，k-tightな頂点全ての集合を T_k とする．0-tightである頂点を特に *free* な頂点と呼ぶ．

3. 局所探索法

実行可能解 x に対し，x に少しの変化を加えることによって得られる解集合 $N(x)$ を x の近傍と呼ぶ．また，解 x から近傍 $N(x)$ 内の解を1つ生成するために x に加える変形操作を近傍操作と呼ぶ．局所探索法とは，適当な解 x から始め，x の近傍 $N(x)$ 内に x の改善解 x' があれば $x:=x'$ と移動する操作を，近傍内に改善解が存在しなくなるまで反復する方法である．

3.1 (k-drop, l-add) 近傍

(k-drop, l-add) 近傍とは，解から丁度 k 個の頂点を削除し，高々 l 個の頂点を解に追加することで得られる解集合である．解に追加する頂点の集合を V_{add}，解から削除する頂点の集合を V_{drop} とすると，$W(V_{\text{add}})>W(V_{\text{drop}})$ の場合，解を改善することができる．MISPに対する (1-drop, 2-add) 近傍と (2-drop, 3-add) 近傍の探索をそれぞれ $O(m)$, $O(m\Delta)$ 時間で行う効率的なアルゴリズムが既存の研究[1]で考案されている．

本研究ではこれを重み付きの問題であるMWISPに拡張し，$k=1, 2, 3$ とした近傍操作を局所探索法に適用した．さらに，近傍の探索に厳密解法を組み込むことにより，追加する頂点の数 l を限定しない (k-drop, n-add) 近傍を考案した．

3.2 (k-drop, n-add) 近傍

(k-drop, n-add) 近傍の探索では，解 I に含まれる k 個の頂点 $i_1, \ldots, i_k \in I$ について，それらを解から削

除した後，free になった頂点集合を V' として，V' から互いに隣接しない頂点集合 I' の内，重み和が最大のものを解に追加することで解が改善するか否かを調べる．本研究では，削除する頂点の候補を限定することで効率的に（k-drop, n-add）近傍を探索する．以下に k=1, 2, 3 のそれぞれに対して削除する頂点の選択方法を説明する．

k=1 の場合，解の各頂点 $i \in I$ が削除される頂点の候補であり，$O(n)$ 通りの削除の組合せが存在する．

次に k=2 の場合，解に含まれる頂点から選択するペアを単純に全て考えると $O(n^2)$ 通りの削除の組合せが存在するが，解 I が（1-drop, n-add）近傍に関して局所最適解である場合，削除する頂点を 2-tight な頂点に隣接する頂点のペア i_1, i_2 に限定しても，改善解を見逃すことなく（2-drop, n-add）近傍を探索できることを証明した．この性質を用いると，2-tight な頂点の数は高々 n であることから，削除する頂点対を $O(n)$ 通りに限定することができる．

最後に k=3 の場合，解に含まれる頂点から 3 つの頂点を選択する組合せをすべて考えると $O(n^3)$ 通りの削除の組合せが存在するが，解 I が（1-drop, n-add）近傍，および（2-drop, n-add）近傍に関して局所最適解である場合，1 つの共通する頂点 $i_1 \in I$ に隣接する 2-tight な頂点ペアに対し，それらが隣接する 3 つの頂点 $i_1, i_2, i_3 \in I$，および，3-tight な頂点に隣接する 3 つの頂点 $i_1, i_2, i_3 \in I$ の 2 通りに限定しても改善解を見逃すことなく（3-drop, n-add）近傍を探索できることを証明した．3-tight な頂点の数は高々 n である．また，2-tight な頂点の数も高々 n で，2-tight な頂点の各々に対してペアとなりうる 2-tight な頂点は $O(\Delta)$ 個存在する．つまり上述の性質を用いると，削除する 3 頂点の組を $O(|T_3|+|T_2|\Delta)=O(n\Delta)$ 通りに限定することができる．

4. 反復局所探索法

提案するアルゴリズムは，反復局所探索法に基づいている．反復局所探索法とは，過去の探索で得られた良い解に小さな変形を加えたものを初期解として，局所探索法を反復する方法である．

本研究では，反復局所探索法において生成される解に多様性を持たせるために，適応メモリ戦略を用いている．

5. 計算実験

DIMACS の問題例を用いて，提案アルゴリズムと Pullan らのアルゴリズム（PLS）[2]を比較した．表 1 に計算結果を示す．PLS の結果において，“best” はこれまでの最良解，“success” は，複数回の独立した試行で best と等しい目的関数値を持つ解を発見した回数を表し，time の列の “-” は，アルゴリズムが終了するまでにそのような解を発見できなかったことを表す．提案アルゴリズムの結果において，複数の試行中に発見した最大の目的関数値と，そのような目的関数値を持つ解を発見した回数を表している．また，“*” が付いている値は，表に示したアルゴリズムが得た値の中で最も良い値（同点であればその解を求めた割合の高い方）であることを表している．提案手法は多くの問題例に対して同等，あるいはより良い解を得ることができた．特に，C2000.9, MANN_a45, MANN_a81 に対して PLS よりも良い解を得ることができた．

表 1 PLS との比較

グラフ	PLS(MWISP)			提案手法 (MWISP)	
	best	success	time	目的関数値	time
brock800_2	3043	(6/100)	107.69	3043*(5/9)	20.12
brock800_4	2971	(100/100)*	7.70	2970(8/9)	21.15
hamming10-2	50512	(100/100)	< 0.01	50512(9/9)	0.06
p_hat1500-1	1619	(100/100)	18.76	1619(9/9)	7.31
C2000.9	10028	(0/100)	–	10999(1/9)*	193.86
MANN_a45	34129	(0/100)	–	34265(1/9)*	41.79
MANN_a81	110564	(0/100)	–	111396(2/9)*	178.88

6. 結論

本論文では，重み付き最大独立集合問題に対する発見的解法を提案した．（2-drop, n-add）近傍と（3-drop, n-add）近傍における解から削除する頂点の組合せを単純に調べるとそれぞれ $O(n^2)$, $O(n^3)$ の候補があるのに対し，改善解を逃すことなく近傍を限定することでそれぞれ $O(n)$, $O(n\Delta)$ に減らすことを可能にした．計算実験の結果，既存のアルゴリズムよりも良い結果が得られた．

参考文献

[1] D.V. Andrade, M.G.C. Resende and R.F. Werneck, Fast local search for the maximum independent set problem, In *Proceedings of the 7th International Workshop on Experimental Algorithms*, pp. 220–234, Springer, 2008.

[2] W. Pullan, Optimisation of unweighted/weighted maximum independent sets and minimum vertex covers, *Discrete Optimization*, Vol. 6, pp. 214–219, 2009.