Gale-Shapley アルゴリズムでのプロポーズを決定する完全選好リストの存在とその判定方法

鮭川　矩義
(筑波大学社会工学類経営工学専攻　現所属・同大学院システム情報工学研究科社会システム工学専攻)
指導教員　山本芳嗣 教授

1. はじめに

本論文では，完全選好リストを扱う安定結婚モデルにおいて Gale-Shapley アルゴリズムでマッチングを決定する際の戦略的操作可能性に関するいくつかの存在判定問題を提案し，それらの解の存在判定方法と解になるための必要十分条件について議論する．

M, W をいずれも大きさ n の共通部分を持たない集合とする．M, W をそれぞれ男性集合，女性集合と呼び，その要素をそれぞれ男性，女性と呼ぶ．$M \cup W$ に属するすべての人は，同点を許さず異性全員を好みの順で並べた**完全選好リスト**を持っている．$i \in M \cup W$ の完全選好リストを $\mathcal{L}^i$ で表す．$\mathcal{L}^m$ を $m \in M$ について集めたものを $\mathcal{L}^M$，$\mathcal{L}^w$ を $w \in W$ について集めたものを $\mathcal{L}^W$ で表す．**完全マッチング**とは (M1) $\forall m \in M$, $\mu(m) \in W$，(M2) $\forall w \in W$, $\mu(w) \in M$，(M3) $w = \mu(m) \Longleftrightarrow m = \mu(w)$ を満たす写像 $\mu: M \cup W \to M \cup W$ である．また，(B1) $\mu(m) \neq w$，(B2) $w >_m \mu(m)$，(B3) $m >_w \mu(w)$ を満たすペア $(m, w) \in M \times W$ が存在しないとき，μ を**安定マッチング**と呼ぶ．ここで，$>_i$ は i の選好順序を表す．安定結婚問題は $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ が与えられて，安定マッチングを探す問題である．

Gale-Shapley アルゴリズムは，安定結婚問題の入力例に対して1つの安定マッチングを $O(n^2)$ の計算量で出力する．このアルゴリズムは M と W のどちらか一方がプロポーズをする形をとるのだが，本質的に同じであるため男性プロポーズ型に限定して話を進める．

男性プロポーズ型 Gale-Shapley アルゴリズム (GS^M)

Step 0：未婚男性集合 $U := M$

Step 1：もし $U = \emptyset$ なら，すべての女性のパートナーを出力し，停止．

Step 2：未婚男性 $m \in U$ を1人選ぶ．m がまだ断られていない女性のうち，m が $\mathcal{L}^M$ で最も好む女性を $w \in W$ とする．

Step 3：(m から w にプロポーズをさせる.)
もし w にパートナーがいないなら，
　m を w のパートナーとし，$U := U \backslash \{m\}$.
それ以外のとき，w のパートナーを m' とする．
　もし $m >_w m'$ なら，
　　w は m' を断り，
　　m を w のパートナーにして，
　　$U := U \backslash \{m\} \cup \{m'\}$.
　それ以外のとき，
　　w は m を断る．

Step 4：Step 1 に戻る．

安定結婚問題の入力例 $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ に対して GS^M が出力する安定マッチングを $GS^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ と書く．

小林，松井[1]で，次の存在判定問題 $Q1$ が考察された．

存在判定問題 $Q1(\mathcal{L}^M, \mu)$

入力：男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M$ と完全マッチング μ

出力：$GS^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = \mu$ となる女性の完全選好リスト $\mathcal{L}^W$ が存在するなら，その $\mathcal{L}^W$ を出力．存在しないなら，「存在しない」と出力．

また，存在判定問題 $Q1(\mathcal{L}^M, \mu)$ を解くために重要な役割を果たす**根つき求婚者グラフ** $\bar{G}(\mathcal{L}^M, \mu)$ という根つき有向グラフが提案された．

定理 1.1 (小林，松井[1])．男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M$ と完全マッチング μ が与えられて，$\bar{G}(\mathcal{L}^M, \mu)$ に根つき有向全域木が存在することは，$GS^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = \mu$ となるような $\mathcal{L}^W$ が存在することの必要十分条件である．

定理 1.1 より存在判定問題 $Q1$ は $\bar{G}(\mathcal{L}^M, \mu)$ に根つき有向全域木が存在するかどうかを判定することで解ける．根つき有向全域木の存在は $O(n^2)$ で確認できる．

小林，松井[1]は，存在判定問題 $Q1$ の解のいくつかを構成する方法を示したが，そのすべてを構成してはいない．そこで本論文では女性の選好リストが解になるための必要十分条件を示す．入力例 $(\mathcal{L}^M, \mu)$ に対

し，$\delta(w) := \{m \in M | w \succeq_m \mu(m)\}$ という集合を用意する．根つき求婚者グラフに存在する根つき有向全域木 T に対し，T が女性の完全選好リストに課す条件 P(T) を以下のように定義する．P(T)：$|\delta(w)| \geq 2$ を満たす女性 w について $\mu(w) = \max_{>w} \delta(w)$ かつ $prt(w) = \max_{>w} \delta(w) \backslash \{\mu(w)\}$．ただし $prt(w)$ は w の T での親ノードである．男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M$ と完全マッチング μ が与えられて，$\bar{G}(\mathcal{L}^M, \mu)$ に存在する根つき有向全域木の全体を $T_1, T_2, \cdots, T_k$ としたとき，条件 P(T_1), P(T_2), $\cdots$, P(T_k) の論理和を条件 (LW) と呼ぶ．これは女性の完全選好リストに課す条件である．

定理 1.2. 条件 (LW) は女性の完全選好リストが存在判定問題 $Q1$ の解になるための必要十分条件である．

安定結婚問題は男女の人数が異なる場合にも自然に拡張できる．

定理 1.3. 男女が同数でない場合の存在判定問題 $Q1$ は同数の存在判定問題 $Q1$ に帰着可能である．

2. 提案する問題

GS^M で出力される安定マッチングは，複数の男女の間にプロポーズが起きた結果生みだされるものであるという立場から，本論文では以下のような存在判定問題を考える．以下では，$Pro^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ は $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ を入力したときに GS^M 実行中にプロポーズが起きる男女の組集合とする．

存在判定問題 $Q1'(\mathcal{L}^M, Pro)$

入力：男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M$ と $Pro \subseteq M \times W$

出力：$Pro^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = Pro$ となる $\mathcal{L}^W$ が存在するなら，その $\mathcal{L}^W$ を出力．存在しないなら，「存在しない」と出力．

存在判定問題 $Q2(\mathcal{L}^W, Pro)$

入力：女性の完全選好リスト $\mathcal{L}^W$ と $Pro \subseteq M \times W$

出力：$Pro^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = Pro$ となる $\mathcal{L}^M$ が存在するなら，その $\mathcal{L}^M$ を出力．存在しないなら，「存在しない」と出力．

存在判定問題 $Q3(Pro, \mu)$

入力：$Pro \subseteq M \times W$ と完全マッチング μ

出力：$Pro^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = Pro$ かつ $GS^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W) = \mu$ となる男性と女性の完全選好リストの組 $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ が存在するとき，その $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ を出力．存在しないなら，「存在しない」と出力．

3. 解法と必要十分条件

存在判定問題 $Q1'$ について：GS^M で各男性が好みの順にプロポーズをしていくことに注意すると，存在判定問題 $Q1$ と存在判定問題 $Q1'$ は簡単な前処理によって相互に変換可能であることがわかる．この事実から，存在判定問題 $Q1'$ は存在判定問題 $Q1$ と本質的に同じ問題であり，存在判定問題 $Q1'$ の解になるための必要十分条件は存在判定問題 $Q1$ のそれと同様である．

存在判定問題 $Q2$ について：問題例 $(\mathcal{L}^W, Pro)$ から構成する根つき有向グラフを提案し，そのグラフに根つき有向全域木が存在することが解が存在するための必要十分条件であることを示した．方針は小林，松井 [1] と同様である．よって，存在判定問題 $Q2$ も $O(n^2)$ で解ける．$\mathcal{L}^M$ を存在判定問題 $Q2(\mathcal{L}^W, Pro)$ の1つの解とし，$\mu := GS^M(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ とする．男性の完全選好リストに課す条件 (LM) を以下のように定める．(LM)：すべての男性 $m \in M$ について $w \in pro^M(m) \backslash \{\mu(m)\} \iff w >_m \mu(m)$ かつ $w \notin pro^M(m) \iff \mu(m) >_m w$．条件 (LM) は (Pro, μ) で決定される条件である．

定理 3.1. 条件 (LM) は男性の完全選好リストが存在判定問題 $Q2$ の解になるための必要十分条件である．

存在判定問題 $Q3$ について：存在判定問題 $Q3(Pro, \mu)$ が解をもつための必要十分条件は，条件 (LM) を満たす勝手な男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M(Pro, \mu)$ を構成し，根つき求婚者グラフ $\bar{G}(\mathcal{L}^M(Pro, \mu), \mu)$ に根つき有向全域木が存在することである．よって，存在判定問題 $Q3$ も Tarjan [2] を利用して $O(n^2)$ で解ける．

また，解が存在するとき，男女の完全選好リストの組 $(\mathcal{L}^M, \mathcal{L}^W)$ が存在判定問題 $Q3(Pro, \mu)$ の解になるための必要十分条件は，女性の完全選好リスト $\mathcal{L}^W$ が $\bar{G}(\mathcal{L}^M(Pro, \mu), \mu)$ から得られる条件 (LW) を満たし，男性の完全選好リスト $\mathcal{L}^M$ が与えられた (Pro, μ) に対する条件 (LM) を満たすことである．解になるための必要十分条件が，男性と女性の完全選好リストそれぞれに対する独立な条件として与えられることは興味深い結果だと考えられる．

参考文献

[1] H. Kobayashi and T. Matsui: "Cheating Strategies for the Gale-Shapley Algorithm with Complete Preference Lists," *Algorithmica*, Vol. 58, pp. 151-169 (2010).