エッシャー風タイリングの自動生成

小泉　拓
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・みずほ情報総研㈱）
指導教員　杉原厚吉 教授・寒野善博 准教授

1. はじめに

タイリングとは，様々な図形によって平面を隙間なく，かつ，重なりなく敷き詰めたものである．オランダの版画家 M. C. Escher は，1種類もしくは複数種類の動物の形で平面を敷き詰めた作品等，タイリングに関する多くの芸術的な作品を残している．この Escher の作品群のような，複雑で意味のある形をしたタイリングを実際に作ろうとすると，素人には非常に難しいことが分かる．

そこで，ある目標となる入力図形 S が与えられたとき，「図形 T は平面を敷き詰めることができる」，「図形 T は出来るだけ S に近い形である」という二つの条件を同時に満たす図形 T を生成する問題を Escherization Problem と呼ぶ[1]．Kaplan らはこの問題に対して，シミュレーテッドアニーリングを用いた手法を提案しており，凸に近い図形に対しては，困難なく解が得られることが数値実験により示されている．しかし，この手法には，シミュレーテッドアニーリングの性質上，質の良い解を得るまでに多くの計算時間を要する，といった弱点がある．また，入り組んだ図形に対しては良い解が得られない，といった点にも改良する余地がある．

このような問題に対して，本論文では，Escherization Problem を扱いやすい最適化問題として再定式化するところからアプローチし，その効率の良い解法を提案する．

2. 提案手法

まず，Escherization Problem を最適化問題としてモデル化することを考える．

Escherization Problem の二番目の条件を定量的に処理するには，二つの図形がどれくらい似ているかの評価基準となるものを考える必要がある．そのために，二つの図形を引数に取る関数で，距離の公理をみたすものを考える．この図形同士の距離を d とすると，二番目の条件は，「図形同士の距離 $d(S, T)$ ができるだけ小さい」と言い換えることができる．したがって，Escherization Problem は，

$$\begin{aligned} &\min \quad d(S, T), \\ &\text{s.t.} \quad \text{図形 } T \text{ はタイリング可能} \end{aligned} \tag{1}$$

という形でモデル化することができる．

最適化問題(1)の記述の仕方は，図形同士の距離の取り方や，制約条件の表現の仕方によって異なる．また，それに応じて，問題の解き易さや結果も異なってくる．本論文では，図形同士の距離と制約条件を，先行研究とは異なった形で定め，最適化問題(1)を定式化する．

ここでは，図形同士の距離として，プロクラステス距離と呼ばれる距離[3]を用いることにする．これを用いて(1)式を定式化し，それを半正定値対称行列の最大固有値を求める問題へと帰着させる．さらに，その行列の特殊な性質を用いることによって，その問題の陽解法を構成する．

図1～4に，この手法の計算結果を示す．図1において，大きい方の図形がトカゲを表した入力図形であり，小さい方の図形が出力図形である．図2では，出

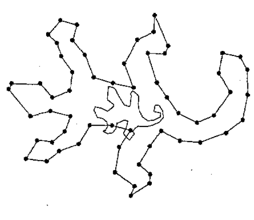

図1　トカゲの Escherization

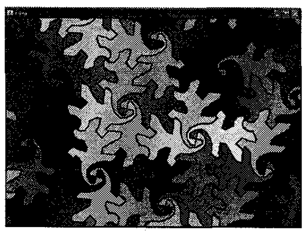

図2　タイリング

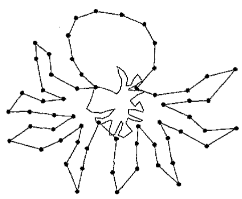

図3　タコの Escherization

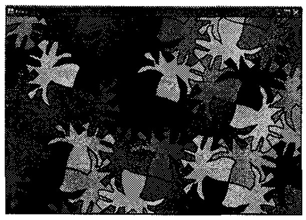

図4　タイリング

力図形を実際にタイリングした様子を表している．図3，図4についても同様である．

3．任意長点列の入力図形への拡張

先の提案手法では，プロクラステス距離の性質上，入力図形と出力図形の頂点数が同じである必要があった．ここでは，入力図形と出力図形の頂点数が異なる場合について拡張する．そのために，earth mover's distance と呼ばれる距離[2]を図形同士の距離として導入する．これを用いることによって，Escherization Problem を線形制約下の凸関数の最大化問題へと帰着させる．ここでの線形制約は，特殊な凸多面体を定めるが，この凸多面体の頂点を求めるために，Birkhoff の定理の拡張を利用する．

一般に線形制約下の凸関数の最大化問題では，その最適解は凸多面体の頂点に現れる．そこで，Birkhoff の定理の拡張で得られる頂点の一部を調べ，その中で，最適なものを出力することにする．

図5〜8に，この手法の計算結果を示す．図の見方は，先の提案手法の場合と同様である．

4．まとめと今後の課題

本論文では，Escherization Problem を先行研究とは異なる形で最適化問題として再定式化した．そして，その問題を対称行列の最大固有値を求める問題へと帰着させ，その陽解法を構成した．また，先の提案手法は，入力図形と出力図形の頂点数が同じである場合に限定されているが，入力図形と出力図形の頂点数が異なる場合への拡張も行った．その中で，Birkhoff の定理の拡張を証明し，その定理を用いた解法のひとつを示した．

現在実装してあるシステムでは，入力図形は頂点の座標を手動で入力する形となっている．一度，入力図形を与えるとタイルを自動生成するが，そのタイルの形が気に入るまで，入力図形の頂点の座標を与えなおす必要がある．

そこで，入力図形を線画とし，線画の状態から頂点も自動で生成するということも考えられる．しかしその場合，頂点の生成の仕方には自由度があり，その中から最適なものを計算する必要がある．すなわち，線画から自動で最適な頂点を生成し，タイルを自動生成することが今後の課題の一つとして考えられる．

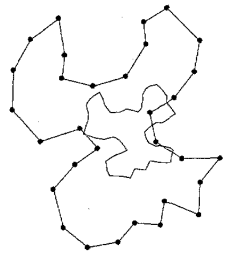

図5 31点の図形の Escherization

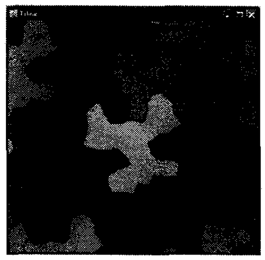

図6 タイリング

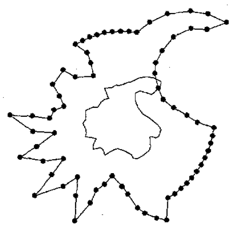

図7 71点の図形の Escherization

図8 タイリング

参考文献

[1] C. S. Kaplan and D. H. Salesin : Escherization, *Proceedings of SIGGRAPH*, New Orleans, July 2000, 499-510.

[2] Y. Rubner, L. J. Guibas and C. Tomasi : The Earth Mover's Distance, Multi-Dimensional Scaling, and Color-Based Image Retrieval, *Proceedings of the ARPA Image Understanding Workshop*, New Orleans, LA, May 1997, 661-668.

[3] M. Werman and D. Weinshall : Similarity and Affine Invariant Distances Between 2D Point Sets, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 17 (1995), 810-814.